

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com



ОТЕЧЕСТВЕННОЙ

АКАДЕМИЯ НАУК
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК
УССР

КИЕВ — 1966



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНА-
НИЯ И ТЕХНИКИ

История

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СЕКТОР ИСТОРИИ ТЕХНИКИ И ЕСТЕ-
СТВОЗНАНИЯ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делоне, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, И. П. Кубилюс, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребынский, Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд, К. А. Рыбников, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Солёгуб (*ответственный секретарь*).

РЕДАКЦИЯ 1-го ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), Ю. А. Митропольский, И. Б. Погребынский, Е. Я. Ремез, К. А. Рыбников, Ю. Д. Соколов, В. С. Солёгуб (*ответственный секретарь*).

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

1

**С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН
ДО КОНЦА XVIII В.**

51 (09с)
И 90

$\frac{2-2-1}{3-66}$

КИЕВСКАЯ ФАБРИКА НАБОРА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Четырехтомный труд «История отечественной математики» подготовлен к изданию Институтом истории естествознания и техники АН СССР и Сектором истории техники и естествознания Института истории АН УССР. В написании этого труда приняла участие большая группа специалистов, поставившая перед собой цель осветить с позиций диалектического материализма развитие отечественной математики с древнейших времен до настоящего времени. История математики рассматривается в тесной связи с социально-экономическим и культурным развитием страны. Авторский коллектив стремился показать ход развития математики и математических знаний в нашей стране, установить их истоки, выяснить движущие силы этого развития, проследить тенденции и влияние его на дальнейшие творческие исследования.

Первый и второй тома посвящены развитию отечественной математики до 1917 г. Материал, изложенный в них, включает зарождение и развитие математических школ в Академии наук и в первых университетах, постановку преподавания математики в специальных высших учебных заведениях и в средней школе.

В третьем и четвертом томах рассматривается история математики и математических знаний в нашей стране от 1917 г. до настоящего времени. Изложение ведется по отдельным направлениям и разделам математики. Во вводных главах третьего тома освещается история развития математических направлений и школ, а также математического образования в тесной связи со строительством социализма и коммунизма в нашей стране.

Предлагаемое издание является первым в отечественной историко-научной литературе трудом по истории математики как по полноте охвата материала, так и по его объему, характеру построения и изложения. Естественно поэтому, что в нем неизбежны некоторые недочеты, неточности и пробелы. Авторский коллектив заранее выражает глубокую благодарность читателям за все замечания и предложения, направленные на улучшение издания.

□

В первом томе излагается материал, охватывающий период развития математики и математических знаний с древнейших времен до конца XVIII в.

Том подготовлен коллективом отдела истории естествознания Сектора истории техники и естествознания АН УССР в составе академика АН УССР И. З. Штокало,

старших научных сотрудников доктора технических наук А. Н. Боголюбова и кандидата физико-математических наук В. С. Сологуба, сотрудников Г. Н. Романенко, О. А. Сичкар, Э. Г. Цыганковой и Г. М. Могилевкиной (ими выполнена научно-вспомогательная работа) под общим руководством академика АН УССР И. З. Штокало.

План тома, а также содержание отдельных его глав неоднократно обсуждались на заседаниях Семинара по истории математических наук при Институте математики АН УССР (ныне при Секторе истории техники и естествознания Института истории АН УССР), на всесоюзных конференциях по истории физико-математических наук в Москве в 1960 и 1963 гг., на заседании Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики при Московском государственном университете и на ученом совете Института истории АН УССР.

Главы первого тома написали следующие авторы:

Введение — И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов.

Глава I — М. Ю. Брайчевский, А. Н. Боголюбов, Л. Н. Грацианская, А. Т. Чуб.

Глава II — К. И. Швецов, В. А. Дядиченко.

Глава III — К. И. Швецов, В. А. Дядиченко.

Глава IV — К. И. Швецов, А. Н. Боголюбов, В. А. Дядиченко.

Глава V — К. И. Швецов, В. А. Дядиченко.

Глава VI — К. И. Швецов, В. В. Котек, В. С. Сологуб, А. Н. Боголюбов, О. А. Сичкар.

Глава VII — Н. И. Симонов, А. Н. Боголюбов, В. В. Котек.

Глава VIII — Н. И. Симонов, В. В. Котек, Л. Е. Майстров.

Глава IX — В. В. Котек, А. Н. Боголюбов.

Глава X — А. Н. Боголюбов, И. Б. Погребысский, Н. А. Чайковский, О. А. Сичкар.

Глава XI — А. Н. Боголюбов.

Глава XII — И. Б. Погребысский, А. Н. Боголюбов.

В оглавлении указаны фамилии авторов каждого параграфа отдельно.

Авторский коллектив и редакционная коллегия выражают глубокую благодарность докт. физ.-мат. наук проф. К. А. Рыбникову, докт. физ.-мат. наук проф. А. П. Юшкевичу, чл.-корр. АН УССР докт. ист. наук И. А. Гуржию, докт. ист. наук Д. И. Мишко за рецензирование рукописи первого тома и весьма ценные замечания, а также всем товарищам, принимавшим участие в ее обсуждении и подготовке к печати.

ВВЕДЕНИЕ

Математика в нашей стране в своем развитии прошла большой путь — от первоначального ее зарождения в древнейшие времена до величайших достижений в годы Советской власти. Отечественную математику как науку создавали все наши братские народы, внося свой вклад как в теоретические ее основы, так и в многочисленные приложения. Поэтому история отечественной математики является большой и многоплановой темой, освещающей яркий талант наших народов, их творческий гений. В дореволюционные годы, несмотря на жестокий гнет царских правителей, народ находил в себе силы для развития науки и культуры страны, выдвигая мужественных борцов за свои права, за свободу, справедливость и прогресс. В годы Советской власти все лучшие стремления и мечты наших народов полностью осуществились. Наука становится непосредственной производительной силой, призванной играть важную роль в построении коммунистического общества.

Тот взлет научной мысли и подъем культуры, который явился результатом упорного и многостороннего труда советских людей, блестяще продемонстрировал творческое применение марксистско-ленинской теории к практике построения коммунистического общества. В нашей стране наука поставлена на службу народу. Положение науки в социалистическом обществе, цели и задачи научного исследования определены в Программе Коммунистической партии Советского Союза, принятой на XXII съезде КПСС: «Прогресс науки и техники в условиях социалистической системы хозяйства позволяет наиболее эффективно использовать богатства и силы природы в интересах народа, открывать новые виды энергии и создавать новые материалы, разрабатывать методы воздействия на климатические условия, овладевать космическим пространством. Применение науки становится решающим фактором могучего роста производительных сил общества»¹. Благодаря четкому планирующему началу, характерному для всех областей социалистического строительства, в том числе и для организации научных исследований, советская наука вышла широким фронтом на передовые позиции в мировом масштабе.

¹ Материалы XXII съезда КПСС. Госполитиздат, М., 1961, стр. 415.

В период развернутого коммунистического строительства в нашей стране наука призвана сыграть выдающуюся роль как в создании материально-технической базы коммунизма, так и в дальнейшем строительстве коммунистического общества.

В резолюции XXIII съезда Коммунистической партии Советского Союза записано:

«Съезд придает большое значение развитию советской науки, которая все больше и больше выступает как непосредственная производительная сила общества. Деятельность наших ученых должна быть направлена на дальнейшее решение актуальных научных проблем современности, на всемерное ускорение научно-технического прогресса, быстрее внедрение результатов научных исследований в народное хозяйство, обеспечение высоких темпов роста производительности труда»².

Настоящее и будущее советской науки ведет свое начало от апреля 1918 г., когда Владимир Ильич Ленин составил «Проект плана научно-технических работ», согласно которому Академии наук поручалась разработка больших научных проблем. За прошедшие с этого времени годы трудящиеся Советского Союза под руководством Коммунистической партии добились всемирно-исторических побед в строительстве коммунистического общества, создали передовую тяжелую промышленность — основу развития всех отраслей социалистической экономики, достигли повышения жизненного уровня населения, обеспечили обороноспособность советской страны, достигли выдающихся успехов во всех отраслях народного хозяйства. В этот труд немалую долю творческих дерзаний внесли и советские ученые. Такие грандиозные свершения, как пуск первой в мире атомной электростанции, создание первого атомного ледокола «Ленин», запуск первого искусственного спутника Земли, первые полеты советских космических кораблей с космонавтами на борту, первый выход советского человека из кабины в космос, осуществление мягкой посадки межпланетной станции на Луне, запуск ракеты с советским вымпелом на Луну и Венеру, запуск первого спутника Луны, являются результатом глубокого творческого труда советских ученых, конструкторов, инженеров, техников, рабочих, всего советского народа.

Одной из главных отраслей советской науки является математика. Методологической основой математики, как и всей советской науки, является диалектический материализм, указывающий единственно правильный путь развития науки. Марксизм-ленинизм служит той животворящей силой, которая обеспечивает советской науке вообще и математике в частности неограниченные возможности расцвета и определяет тесную связь ее с жизнью, взаимопроникновение теории и практики.

В своем развитии математика исходит из конкретных практических задач и, совершая при помощи абстрагирования теоретические обобщения и открытия, использует полученные результаты опять же на практи-

² Резолюция XXIII съезда Коммунистической партии Советского Союза по Отчетному докладу ЦК КПСС. Политиздат, М., 1966, стр. 20.

ке, причем на более высоком уровне. Этот незамкнутый прогрессирующий цикл характеризует диалектическую взаимосвязь математической теории и жизненной практики, ту творческую взаимосвязь, которая гарантирует математику от скатывания к изолированному практицизму и, вместе с тем, ограждает ее от так называемой чистой науки, оторванной от жизни. Указанное положение в развитии математической науки и ее приложений имеет особенно важное значение, ибо оно определяет тот сложный путь, который объединяет теоретические исследования в области математики с практической деятельностью людей и который показывает роль и место абстрактных построений в теоретических обобщениях и открытиях, с одной стороны, и в жизненно важных приложениях — с другой. Идеалисты разных мастей в зарубежной математике, не поняв этого основного положения, путаются и блуждают в своих рассуждениях о взаимосвязи теории и практики.

Содержание указанного выше цикла математического творчества может быть значительно сложнее. Обязательным является чередование практических (как исходного, так и заключительного) и теоретических этапов в математическом исследовании, однако теоретический этап может заключать в себе целую серию взаимозависимых и взаимоопределяющих математических исследований. Теория, основанная и построенная, казалось бы, исключительно на теоретических рассуждениях ученого, оказывается применимой на определенной стадии своего развития в человеческой деятельности. И это применение достижений теоретических исследований к практической деятельности людей является возможным потому, что основой теоретических построений в исходном этапе является материальный мир и практическая деятельность человека. Вопросы приложений математической теории к жизненной практике следует, конечно, понимать в широком смысле, не требуя обязательного применения каждого нового математического положения, вывода или теоремы сразу к практике. Эти новые теоретические открытия могут служить основой для дальнейших теоретических изысканий, которые в процессе своего последовательного развития в конечном итоге приведут к этапу приложений в практической деятельности людей. Многие области математики, которые, казалось, не находили применений, в дальнейшем своем развитии получили очень эффективный выход в жизненную практику. Выявление и выяснение реального развития математических идей является одной из основных задач истории математики.

В. И. Ленин в знаменитых «Философских тетрадах» писал, что с точки зрения диалектического материализма философский идеализм есть одностороннее, преувеличенное развитие (раздувание, распухание) одной из граней познания в абсолюте, оторванный от материи, от природы, обоготворенный. Он указывал, что абсолютизация любой отдельной стороны процесса познания и особенно принципа релятивизма нашего знания при незнании диалектики неминуемо ведет к идеализму.

Это целиком относится и к идеалистическим извращениям в области математики. Возведение некоторыми зарубежными математиками математических абстракций в абсолюте, оторванный от жизненной практики, приводит к идеалистическим концепциям. Примером этого могут служить

высказывания некоторых французских математиков, выступающих под псевдонимом Никола Бурбаки: «Неясно и, возможно, навсегда останется нерешенной задачей, каким образом результаты математики находят применение в практике», или французского ученого Пьера Бутру: «Если математика почти точно согласуется с эмпирическими условиями, то это есть результат не ее внутренних свойств, а лишь внешних обстоятельств. Оказалось, что сравнительно простая наука способна объяснить явления природы. Это — счастливая случайность, которая не должна была с необходимостью наступить».

Роль науки в развитии общества все более и более возрастает, поэтому важное значение приобретают методологические вопросы в различных ее отраслях. Исследования по методологическим проблемам науки, в том числе и математики, должны содействовать лучшему представлению и пониманию перспектив ее дальнейшего развития. В органической взаимосвязи марксистско-ленинской философии и специальных наук прокладывается единственно правильный путь развития самой передовой в мире советской науки. Прогресс отечественной науки, в том числе и математики, демонстрирует силу творчески развивающегося научного мировоззрения — диалектического и исторического материализма.

Одной из важнейших проблем в области методологии математики является взаимосвязь теоретических исследований и практических приложений. Вопросы методологии в науке важны потому, что наука — это один из участков идеологического фронта, имеющего огромное значение в деле марксистско-ленинского воспитания творческих научных кадров. Вопросы методологии — это вопросы мировоззрения. Поэтому изучение истории развития математических наук должно быть тесно увязано с изучением методологических вопросов математики.

Важнейшей характерной особенностью советской математики, как и всей науки, является ее плановое развитие. Плановый характер развития советского общества гарантирует гармоническое развитие всех областей науки и техники. Для развития науки в Советском Союзе созданы наиболее благоприятные условия. Советская власть воспитала многочисленные научные кадры, в том числе целую плеяду выдающихся советских математиков, которые обогатили отечественную науку достижениями мирового значения. Ученые в СССР работают не в одиночку, как это было в дореволюционной России, а большими коллективами, объединенными в крупные школы и направления. После Великой Октябрьской социалистической революции, наряду с огромным расширением объема научных исследований в Академии наук СССР, созданы республиканские академии наук, научно-исследовательские институты и лаборатории, новые университеты, педагогические и технические вузы. В каждом из научных центров нашей страны развиваются математические школы, ведутся научные исследования в различных направлениях математики. Математические исследования проводятся во всех братских республиках. В 1957 г. создано Сибирское отделение АН СССР в г. Новосибирске, где за сравнительно небольшой срок вырос большой академический городок с научно-исследовательскими институтами. Ма-

тематика в Советском Союзе получила все возможности для дальнейшего всестороннего развития.

В связи с этим перед историками математики стоит задача — описание, исследование и объяснение исторического процесса, обусловившего в Советском Союзе массовость математического творчества. В зарождении и развитии советских математических школ, наряду с благоприятными условиями для научных исследований и выдвижением новых математических идей, определенную роль играют достижения дореволюционной науки и культуры народов, населявших территорию нашей страны. Поэтому, чтобы полностью понять и осмыслить развитие математических теорий в СССР, необходимо исследовать историю математики и математических знаний у всех народов нашей страны, начиная с древнего периода развития. Иными словами, изучение истории отечественной математики в ее полном объеме, как части истории отечественной науки и культуры вообще, дает ясное представление о значении вклада, который внесли в мировую сокровищницу науки народы Советского Союза.

Другая задача историков математики заключается в глубоком изучении творчества ученых прошлого в целях теоретического и практического использования полученных ими результатов в настоящем. Как отмечалось выше, вследствие особенностей диалектического развития математики некоторые математические идеи, возникшие в исходном их начале из практики, в дальнейшем развитии доходят до теоретических результатов, образуя в своей совокупности определенную теорию, воспринимаемую современниками, а зачастую и самими создателями этих теорий, как нечто абстрактное. Эта теория может быть полностью использована для новых теоретических построений, а также на каком-то этапе своего развития оказаться полезной и пригодной для применения в производственной практике общества и поднятия производственной практики на высшую ступень, если последняя достигла такого уровня, что может воспринять разработанные теории. Может, однако, оказаться, что уровень общих теоретических достижений и производственной практики людей в момент создания указанных теорий не соответствует возможностям восприятия и применения теоретических результатов, полученных в процессе развития той или иной математической идеи. Тогда выдвинутая теория на этом временно прерывается, и научные исследования направляются по иному руслу. Получается временное своеобразное несоответствие теоретических результатов, содержащихся в разработанной теории на основе выдвинутых новых математических идей, с уровнем общих теоретических достижений в данной области науки и с уровнем производственной практики общества в данный период. Новая теория как бы опередила свою современность, не находя для себя в данное время применения. В дальнейшем же, когда практика и теория в своем развитии оказываются подготовленными для восприятия высказанной идеи и, более того, когда эта идея оказывается необходимой для дальнейшего движения вперед, начинается ее новое развитие, и она порождает новые мысли и новые теоретические исследования, пригодные для дальнейшего научного

прогресса и эффективного применения к производственной деятельности общества.

История математики знает много примеров такого «прерывистого» развития идей. Создание новой геометрии Лобачевским не обуславливалось нуждами материального производства, а было в определенной степени логическим развитием геометрических идей, заложенных еще в древности в геометрии Евклида, исходившей из человеческой практики. Построения Лобачевского, несмотря на всю кажущуюся их нежизненность, были связаны с потребностями практики. Если бы не было геометрии Евклида, то не смогла бы возникнуть и неевклидова геометрия. Геометрия Лобачевского, непонятая современниками, значительное время воспринималась как абстрактно-теоретическое рассуждение, не имеющее применений, и была проверена на практике лишь в XX в. То, что многие, даже выдающиеся ученые первой половины XIX в., считали непонятным и невоспринимаемым оказалось впоследствии необходимым для создания математического аппарата теории относительности и других новейших теорий в области математики, механики и физики. В этом аспекте можно также указать на теорию Галуа, на которую в свое время не обратил внимания такой тонкий аналитик, как О. Коши, или теорию Фурье, использованную электротехникой чуть ли не через 100 лет после того, как она была высказана.

Примером подобного рода, но более позднего времени, является теория функций многих комплексных переменных. Еще в начале XX в. были установлены специфические особенности этой теории, отличающие ее от теории функций одного комплексного аргумента. Результаты, полученные в теории функций многих комплексных переменных, привели на современном этапе к применению их в теории элементарных частиц. Дело в том, что одной из проблем здесь является нахождение амплитуды соударений, которая представляет собой функцию четырех импульсов частиц, принимающих участие в данной реакции. В теоретической физике установлено, что из соответствующих физических принципов вытекает возможность аналитического продолжения этих амплитуд как функций импульсов, точнее говоря, инвариантов, из них построенных. Вполне понятно, что аналитические свойства этих амплитуд следует изучать по методам теории функций многих комплексных переменных. Этот факт установлен совсем недавно и является важным звеном в теории элементарных частиц в физике.

Особенно много таких математических «предвидений» было у Л. Эйлера, который, торопясь выразить все свои мысли на бумаге, не очень задумывался над их дальнейшим развитием. Но современные Эйлеру математики, особенно те, которые работали около него и после него, не могли постичь глубины его мысли, и многие идеи Эйлера были использованы значительно позже или же открыты вновь другими учеными.

Итак, творческая задача истории математики заключается также в разыскании оставленных временно в стороне идей ученых для их дальнейшей теоретической разработки и применения на практике.

История отечественной математики является молодой наукой, всеми своими корнями вросшей в двадцатое столетие. Если не считать

нескольких отдельных статей, речей и замечаний, высказанных в монографиях иной тематики, то первым исследователем истории русской математики был В. В. Бобынин, начавший заниматься этими вопросами в 80-х годах XIX в. В дореволюционное время история математики развивалась слабо, силами немногочисленных любителей, не всегда хорошо подготовленных для этой деятельности, и лишь в советское время она получила свое настоящее развитие. Особенно много сделано в области истории математики в последние годы, когда индивидуальная разработка отдельных вопросов истории науки была заменена коллективными методами исследования историко-математических проблем. Советские историки математики исследовали многие вопросы истории отечественной математики. Однако все эти исследования ограничиваются более или менее узкой тематикой истории развития отдельных проблем, направлений или творчества отдельных отечественных ученых. Изредка тематика расширяется до объема очерков истории целых разделов отечественной математики или очерков математических знаний в отдельных республиках Советского Союза. Поэтому возникает потребность в обобщающем труде, в котором было бы показано развитие математики и математических знаний у всех народов Советского Союза с древнейших времен до настоящего времени. В таком труде, охватывающем историю отечественной математики в целом, следует осветить весь исторический путь математики — от элементарных математических знаний до наиболее передового математического творчества в настоящее время. При этом историю отечественной математики и математических знаний необходимо показать не саму по себе, а как одно из проявлений человеческой деятельности, чтобы полностью выяснить связь между самыми глубокими теоретическими рассуждениями и жизненной практикой, на которой они основаны и для которой в конечном итоге они предназначены.

Далее, история математики тесно связана с историей других видов человеческой деятельности — историей развития производительных сил и производственных отношений, историей культуры, техники, физики, астрономии и механики, с которой она тесно соприкасается, а также с историей философии. Таким образом, обобщающий труд по истории отечественной математики должен не только показать последовательное развитие отдельных математических идей и теорий, иными словами, — изменение знаний, которыми обладает народ в процессе своего развития при переходе от одной социально-экономической формации к другой, а и обосновать это изменение, исследуя его во взаимосвязи с другими явлениями человеческой деятельности.

К сожалению, до настоящего времени такой обобщающий труд по истории отечественной математики еще не создан. Были отдельные попытки наметить основные этапы развития отечественной математики, но это были краткие очерки, в которых авторы придерживались только основных, наиболее известных и детально исследованных явлений истории математики и математических знаний, оставляя в стороне все другие факты. Тот же самый упрек можно сделать и составителям более или менее подробных курсов и монографий всеобщей истории математики.

В этих изданиях факты истории нашей отечественной математики приведены лишь в отрывочном порядке и основное внимание обращено на их связь с фактами истории математики в других странах, причем их взаимосвязь с другими сторонами человеческой деятельности зачастую не принимается во внимание.

Авторы данного коллективного труда по истории отечественной математики поставили перед собой цель достаточно подробно и связно изложить историю математики и математических знаний в нашей стране, осветить развитие математических идей с позиций марксизма-ленинизма, показывая органическую связь этого процесса с социально-экономическим развитием страны.

Тесная связь между теоретическими исследованиями в области математики и практической деятельностью человека в первоначальный период возникновения и становления математических знаний совершенно ясна и не представляет никаких затруднений в ее освещении, несмотря на то, что и тогда проявлялись тенденции идеализировать числа и действия над ними, оторвать их от почвы реальной действительности (например, школа Пифагора в Древней Греции). Распространение мистики чисел тормозило развитие математики. В дальнейшем ученые-математики в своих исследованиях старались увязывать теоретические изыскания с жизненной практикой. В трудах Г. Галилея, П. Ферма, И. Ньютона, Г. Лейбница, братьев Бернулли, Л. Эйлера и других ученых ярко выступает связь между математическими исследованиями и питающими их запросами современной им науки и техники. Выдающийся математик и механик XVIII в. Леонард Эйлер никогда не ограничивал себя узкими рамками чисто математических исследований. Математические, механические, астрономические, технические и другие работы Эйлера тесно связаны между собой и настолько взаимопроникают, что сразу же становится ясным его отношение к математике. Для него математика была не самоцелью, а исключительно точным оружием при исследовании окружающей его действительности. Это же можно сказать и о других ученых XVIII в.

Очень четко выразил свое отношение к математическим знаниям М. В. Ломоносов. Исходя из общей идеи связи теории с практикой, высказанной им в формуле: «Науки художествам путь показывают; художества происхождение наук ускоряют. Обоим общему пользою согласно слушают», он обращал большое внимание на изучение математических наук и на их применение на практике: «Какой свет способна возжечь... математика, может предвидеть тот, кто посвящен в ее таинства и знает такие главы естественных наук, удачно обработанные математически, как гидравлика, аэрометрия, оптика и др.: все, что до того было в этих науках темно, сомнительно и недостоверно, математика сделала ясным, достоверным и очевидным... Если бы те, которые все свои дни затемняют дымом и сажей и в мозгу которых господствует хаос от массы непродуманных опытов, не гнушались поучиться священным законам геометров, которые некогда были строго установлены Евклидом и в наше время усовершенствованы знаменитым Вольфом, то несомненно могли бы глубже проникнуть в таинства природы, истолкователями которой они себя

объявляют»³. Кроме практической и познавательной ценности математики Ломоносов указывал и на ее методологическое значение.

Значение математики как обусловленного практикой тонкого и точного инструмента исследования было понято великими умами уже в XVIII в. В XIX в. вопрос несколько усложнился, так как математика, развивая свои методы, начала обгонять потребности практики и создавать такие теории, понять которые своевременно не могли и многие математики. Появились мысли о самоцели математики, о ее оторванности от практики жизни, о ее развитии по имманентным, присущим лишь ей законам. Таким образом, назревшие вопросы, в связи с бурным развитием математики, требовали правильной философской трактовки. Вопросам философии математики уделяли большое внимание К. Маркс и Ф. Энгельс. К. Маркс изучал не только вопросы философии математики, но и непосредственно предмет математики, придавая ей важное значение в развитии науки. Всю глубину оценки К. Марксом значения математики для развития науки можно осознать в полной мере теперь, когда наука становится непосредственной производительной силой нашего общества. Интересно, что самого Маркса привели к занятиям математикой его экономические исследования. Эти занятия относятся к последним двадцати годам его жизни. Начал он с арифметики и алгебры, затем перешел к аналитической геометрии и к дифференциальному и интегральному исчислениям. В предисловии ко второму тому «Капитала» Ф. Энгельс пишет: «После 1870 г. снова наступила пауза, обусловленная главным образом болезненным состоянием Маркса. По обыкновению, он заполнял это время изучением; агрономия, американские и в особенности русские поземельные отношения, денежный рынок и банки, наконец естественные науки: геология и физиология, и в особенности самостоятельные математические работы составляют содержание многочисленных тетрадей Маркса с выписками, относящихся к этому времени»⁴. В предисловии ко второму изданию «Анти-Дюринга», указав, что «для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием»⁵, Энгельс пишет, что «Маркс был основательным знатоком математики»⁶. Об этом же свидетельствует и сохранившееся математическое наследие Маркса, насчитывающее в общей сложности (конспекты и самостоятельные работы) свыше тысячи страниц рукописного текста.

Ф. Энгельс в своих философских трудах также уделил много места взаимоотношениям математики с другими науками. «...Совершенно неверно, — писал он, — будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. произво-

³ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 75.

⁴ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 24, стр. 8.

⁵ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 20, стр. 10—11.

⁶ Там же.

дить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира... Точно так же выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только их рациональную взаимную связь... Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая математика применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей, — и как раз *только поэтому* и может вообще применяться⁷.

История математики может дать бесчисленное множество примеров, подтверждающих этот тезис Энгельса. Научное творчество среднеазиатских математиков в начальный период развития математики свидетельствует о том, как житейские требования земледелия, землемерия и орошения, а также архитектурного строительства, требования астрономии и гномоники вызвали создание и развитие геометрии, требования жизненной практики, включая и общественные взаимоотношения (вопросы наследства в соответствии с правом шариата) способствовали созданию алгебры. Не менее житейскими являются корни начальных математических знаний в Киевской Руси: здесь все очень конкретно и все привязано к практике, даже арифметические правила и ошибки в геометрических подсчетах. Первая русская математическая школа, созданная Эйлером, также воздавала должное практике, применяя к развитию последней глубокие теоретические построения, исходившие в своей основе из практической деятельности людей и нацеленные в конечном счете на решение конкретных потребностей того времени.

История математических знаний должна показать не только связь теории с практикой, но и проверку теории практикой. Существенное

⁷ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 20, стр. 37—38.

значение в этом смысле имеет история развития отдельных математических теорий, возникновение и развитие самих математических абстракций. Классики марксизма-ленинизма, в сущности, заново поставили ряд вопросов обоснования математики. Ф. Энгельс писал: «До конца прошлого столетия и даже до 1830 г. естествоиспытатели более или менее обходились при помощи старой метафизики, ибо действительная наука не выходила еще за пределы механики, земной и космической. Однако известное замешательство вызвала уже высшая математика, которая рассматривает вечную истину низшей математики как преодоленную точку зрения, часто утверждает нечто противоположное ей и выставляет положения, кажущиеся представителю низшей математики просто бессмыслицей. Здесь затвердевшие категории расплавились, математика вступила в такую область, где даже столь простые отношения, как отношения абстрактного количества, дурная бесконечность, приняли совершенно диалектический вид и заставили математиков стихийно и против их воли стать диалектиками. Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и вынужденные приемы, к которым прибегают математики, чтобы разрешить это противоречие, примирить между собой высшую и низшую математику, уяснить себе, что то, что у них получилось в виде неоспоримого результата, не представляет собой чистой бессмыслицы, — и вообще рационально объяснить исходный пункт, метод и результаты математики бесконечного»⁸. Энгельс не случайно обратил внимание на вопросы обоснования математики, так как именно эти вопросы имели наиболее важное значение для ее дальнейшего развития в последней трети XIX в. Выдающиеся математики Р. Декарт, И. Ньютон и Г. Лейбниц не задумывались над обоснованием своих результатов, удовлетворяясь достижениями своего творчества. Основатели дифференциального и интегрального исчисления Ньютон и Лейбниц пользовались на практике представлениями о бесконечно малой величине, которую можно было принимать в расчет как некоторую конечную, отличную от нуля величину или отбрасывать, не влияя, однако, на правильность получаемого результата. Оба пытались оправдать это представление метафизическими соображениями, причем Ньютон делал это, опираясь на механику. Он представлял себе изменение всякой величины (геометрической, физической и т. д.) как прямолинейное движение точки с переменной, вообще говоря, скоростью. В своем исчислении он в этом смысле использовал термины — флюксии, флюэнты. Таким образом, была перенесена проблема из математики в механику, причем без достаточного разъяснения оставался как вопрос о том, что следует понимать под скоростью (в данный момент), так и, особенно, вопрос о моментах или приращениях величины (флюэнты) за бесконечно малый промежуток времени, в течение которого скорость ее изменения (флюксию) можно считать неизменной. Флюэнты, к которым Ньютон всегда прибегал на практике, по сути ничем не отличались от лейбницеvских дифференциалов. За эти-то слабые места нового исчисления, давшего, несмотря на шаткость оснований, поразительные результаты, ухвати-

⁸ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 20, стр. 519.

лись идеалисты, причем в откровенной форме неприкрытого фидеизма. Положение с обоснованием математики особенно обострилось к концу XIX в.; и, естественно, поэтому, что оно заинтересовало К. Маркса.

Работа К. Маркса по обоснованию дифференциального исчисления относится к концу 70-х — началу 80-х годов XIX в. В ней Маркс задался целью установить связь между элементарной математикой и идеями высшей математики, сформулированными в XVIII в. Ф. Энгельс также занимался этими вопросами и пришел к следующему выводу: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение»⁹. Используя понятие бесконечно малой, он установил ее реальное происхождение и постоянную связь с практикой, аналогии между математическими выражениями и явлениями природы. «Но как только математики укроются в свою неприступную твердыню абстракции, — отмечает Энгельс, — так называемую чистую математику, все эти аналогии забываются; бесконечное становится чем-то совершенно таинственным, и тот способ, каким с ним оперируют в анализе, начинает казаться чем-то совершенно непонятным, противоречащим всякому опыту и всякому смыслу. Те глупости и нелепости, которыми математики не столько объясняли, сколько извиняли этот свой метод, приводящий странным образом всегда к правильным результатам, превосходят самое худшее, действительное и мнимое, фантазерство натурфилософии (например, гегелевской), по адресу которого математики и естествоиспытатели не могут найти достаточных слов для выражения своего ужаса. Они сами делают — притом в гораздо большем масштабе — то, в чем они упрекают Гегеля, а именно доводят абстракции до крайности. Они забывают, что вся так называемая чистая математика занимается абстракциями, что *все* ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины и что все абстракции, доведенные до крайности, превращаются в бессмыслицу или в свою противоположность. Математическое бесконечное заимствовано из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому оно может быть объяснено только из действительности, а не из самого себя, не из математической абстракции. А когда мы подвергаем действительность исследованию в этом направлении, то мы находим, как мы видели, также и те действительные отношения, из области которых заимствовано математическое отношение бесконечности, и даже наталкиваемся на имеющиеся в природе аналогии того математического приема, посредством которого это отношение проявляется в действии. И тем самым вопрос разъяснен»¹⁰.

Высказывания Ф. Энгельса, относящиеся к истории науки, освещают целый ряд ее актуальных вопросов, правильное, марксистско-ленинское истолкование которых было совершенно необходимо. Действительно, при историко-научных исследованиях ученый встречается с вопросом истолкования развития определенной научной идеи и с выяс-

⁹ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 20, стр. 587.

¹⁰ Там же, стр. 586.

нением ее генетических корней. Многие математические идеи, несмотря на кажущуюся абстрактность и оторванность их от жизни, тесно связаны с практикой и определяются очень многими ее сторонами и явлениями. Правда, чем выше уровень научного творчества ученого, тем больше возникает усложнений и трудностей, связанных с объяснением генезиса не только творчества данного ученого в настоящем, но и его прогнозов на будущее. Естественно, что эти вопросы могут быть правильно исследованы лишь на основе использования марксистско-ленинской философии, т. е. при помощи единственно верного и надежного метода — диалектического материализма.

Классические образцы такого историко-научного анализа дал Ф. Энгельс. Как уже отмечалось, заинтересованность Маркса и Энгельса вопросами истории и философии математики была не случайной: ведь в истории математики 70—80-е годы XIX в. являются периодом исследований в области обоснования математики. Крупнейшие математики мира не смогли разобраться в философских вопросах математики, вследствие чего в своих исследованиях они пользовались разного рода паллиативами философии, следуя зачастую идеалистическим направлениям. Нечто подобное произошло в начале XX в., когда вследствие «кризиса» в физике среди некоторой части ученых (Мах, Оствальд) начали распространяться взгляды субъективного идеализма. Выковать верное надежное идеологическое оружие для нового исторического периода революционной борьбы пролетариата пришлось В. И. Ленину. Его гениальные произведения «Материализм и эмпириокритицизм» и «Философские тетради» явились основополагающими трудами, значение которых для современного естествознания трудно переоценить.

В труде «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин, проанализировав гносеологические вопросы, касающиеся положения в естествознании, пришел к выводу, что махистский идеализм не был связан с научными открытиями, которые вызвали революцию в этой области знания, а возник вследствие отхода некоторой части естествоиспытателей к идеализму и агностицизму. Он показал, что так называемый кризис в развитии физики является не кризисом естествознания, как это старались доказать идеалисты, агностики и клерикалы различных толков и мастей, а лишь новым качественным скачком в чрезвычайно бурном и непрерывном движении вперед к единственно правильному пониманию природы и ее явлений, которое дает диалектический материализм. В острой и напряженной борьбе против идеализма и разных его течений В. И. Ленин в книге «Материализм и эмпириокритицизм» мастерски отстоял и творчески развил марксистскую философскую теорию.

Философские труды В. И. Ленина имеют исключительно большое значение для марксистского понимания путей развития математики. Научное решение гносеологических вопросов математики, т. е. решение, соответствующее действительному пути, пройденному математикой, включая и современный период ее развития, возможно лишь на основании материалистической теории познания. Благодаря поистине не-

исчерпаемому богатству идей, содержащихся в философских трудах В. И. Ленина, советские математики получили возможность подвергнуть критическому анализу с правильных диалектико-материалистических позиций математические идеалистические концепции некоторых современных западных математиков — конвенционализм, формализм, логицизм, интуиционизм, эффе́ктивизм и др. Как известно, математики-конвенционалисты во главе с А. Пуанкаре считали, что математические истины являются только условными соглашениями, введенными в целях «экономии мышления». По поводу «принципа экономии мышления», или, иначе, «принципа наименьшей затраты силы», который положили в основу своей теории познания Мах и Авенариус, В. И. Ленин говорил, что «принцип экономии мышления, если его действительно положить *«в основу»* теории познания, не может вести *ни к чему* иному, кроме субъективного идеализма»¹¹. И далее: «Мышление человека тогда «экономно», когда оно *правильно* отражает объективную истину, и критерием этой правильности служит практика, эксперимент, индустрия. Только при отрицании объективной реальности, т. е. при отрицании *основ* марксизма, можно всерьез говорить об экономии мышления в теории познания!»¹².

В результате глубокого анализа работ Маха и примыкающих к нему философствующих физиков и математиков разных толков В. И. Ленин пришел к выводу, что «уклон школы Маха — Пуанкаре — Пирсона к идеализму (сиречь утонченному фидеизму) неоспорим». В. И. Ленин был глубоко убежден, что эта болезнь естествоиспытателей будет преодолена: «Материалистический основной дух физики, как и всего современного естествознания, победит все и всяческие кризисы, но только с неперменной заменой материализма метафизического материализмом диалектическим»¹³.

После выхода в свет «Материализма и эмпириокритицизма» все попытки идеалистов решать философские вопросы, исходя из идеалистических концепций, всегда оканчивались крахом. Так было с Пуанкаре в начале XX в., с интуиционистами в 30-х годах XX в., так же случилось с группой французских ученых, известных под именем Никола Бурбаки, в самое последнее время.

Ленинский анализ «кризиса» физики начала XX в. полностью можно использовать при характеристике «кризиса» современных буржуазных философско-математических течений. Общим для всех этих течений является субъективно-идеалистический подход к решению основных методологических вопросов развития математики.

Философские вопросы математики, главным образом вопросы ее методологии, решены В. И. Лениным в «Философских тетрадах». В этом труде содержится также богатейший материал, в котором заложены диалектико-материалистические основы для решения многих новых философских проблем математики и даны глубокие и конкретные заме-

¹¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 18, стр. 175—176.

¹² Там же, стр. 176.

¹³ Там же, стр. 324.

чания по этим проблемам. Интерес В. И. Ленина к математике был обусловлен не только ее непосредственной связью с естествознанием и существенным значением для разрешения таких философских проблем, как конечное — бесконечное, прерывное — непрерывное, частное — общее, индукция — дедукция, но и необходимостью разоблачения различных идеалистических течений в математике. В конспекте книги Гегеля «Наука логики» В. И. Ленин подчеркивает: «Метод философии должен быть ее собственный (не математики, *contra* Spinoza, Wolf und Andere)»¹⁴. Характерно, что попытки использовать метод математики в качестве основания для построения системы философии не прекратились на Западе до настоящего времени. Это обстоятельство с еще большей силой подчеркивает жизненность и прозорливость ленинских указаний. В. И. Ленин неоднократно подчеркивал мысли Гегеля о недостаточности обоснования самой математики:

«... „математика... донныне не была в состоянии оправдать собственными силами, т. е. математически, те действия, которые основываются на этом переходе“ (переход от величин каких-то к каким-то), „так как этот переход не математической природы“. *Leibnitz*-де, коему приписывают честь открытия дифференциального исчисления, произвел этот переход „самым недопустимым, столь же совершенно чуждым понятию, сколь и нематематическим способом“...»¹⁵.

И в другом месте: «До сих пор оправдание состоит *только* в *правильности результатов* („доказанной из других оснований“), ... а **NB** не в ясности предмета confer Engels ...

При исчислении бесконечных известная неточность (заведомая) игнорируется, а результат все же получается не приблизительный, а *вполне точный!*»¹⁶.

Ленинский анализ вопросов взаимоотношений философии и математики, природы математических абстракций, ряда специальных вопросов математической логики и диалектики категорий в математике служит надежным указателем пути в научных исследованиях. В очень многогранном и быстром развитии математики, характерном для середины XX в., существенное значение приобрели две его особенности: тенденция связи с естественными науками, возникновение совместных теорий и теорий «на стыке», порождающих новые отрасли науки, подобно кибернетике, бионике и другим, и тенденция развития новых математических идей, исходящих из новых явлений в жизни общества.

Рассматривая книгу Абеля Рея «Современная философия», В. И. Ленин особенное внимание уделил вопросам философии математики, тщательно отмечая места, относящиеся к математическому творчеству. В цитате: «Математик, замечают рационалисты, мог бы по-прежнему умножать богатства своей науки, даже если бы материальный мир внезапно исчез. Да, бесспорно, если бы он исчез теперь; но мог ли бы он создать математику, если бы материального мира никогда не существо-

¹⁴ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 29, стр. 88.

¹⁵ Там же, стр. 191.

¹⁶ Там же, стр. 107.

вало?..»¹⁷ В. И. Ленин подчеркивает последнюю фразу и отмечает ее на полях. Он обращает внимание на те места, которые могут служить разоблачением философии прагматизма, особенно останавливаясь на высказываниях и идеях Пуанкаре. При этом В. И. Ленин выделяет не только те места, в которых изобличается идеалистическое понимание Пуанкаре сущности математики, но и указывает на использование прагматистами авторитета Пуанкаре не всегда с достаточным основанием.

Классики марксизма-ленинизма подвергли тщательному исследованию вопросы философии математики, особенно вопросы взаимоотношений математики с физикой и другими естественными науками. Важность этих исследований заключается в том, что они не ограничиваются методологической стороной, а непосредственно касаются самых глубоких тайников математического творчества.

Наиболее плодотворные математические идеи современности характерны для «мест соприкосновения» математики с другими науками естественного цикла. История науки учит, что «науки на стыке» являются определяющими не только в зарождении математических теорий, но и в развитии их. В самом деле, при исследовании древних культур района Средиземного моря обнаружено только зарождение математики на этом этапе, возникшей из практики земледелия, строительства и связанных с ними астрономии, техники ирригации, общественных отношений. Абстракция в нумерации и в действиях с простыми числами представляет собой приобретение человечества на одной из ранних, «предысторических» фаз его общественного бытия. Но уже происхождение геометрии как науки «на стыке» между искусством счета и обработкой земли, а затем, значительно позже, и строительством (измерения объемов тел) является несомненным.

Геометрию как науку создали древние греки, а затем усовершенствовали ученые эпохи эллинизма. В создании арифметики и алгебры значительную роль сыграли ученые Средней Азии в VIII—XIII вв. Основы тригонометрии заложили, главным образом, математики и астрономы Средней Азии и Азербайджана. Выдающиеся математики Средней Азии не применяли математических обозначений. При изложении материала они пользовались научно-описательным языком своего времени, что, естественно, затрудняло выработку абстрактных понятий. Поэтому вклад ученых, сумевших в таких неблагоприятных условиях преодолеть трудности конкретного содержания задач, представляется особенно значительным. И все же творчество их, например ал-Хорезми, в большой мере стимулировалось хозяйственной жизнью эпохи и общественными взаимоотношениями. Еще резче практическое содержание выявляется в истории развития тригонометрии. Тригонометрические понятия у первых ученых, вводивших их в употребление, еще не составляли особого раздела науки, а входили в состав астрономии в качестве некоторых специализированных вспомогательных приемов.

¹⁷ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 29, стр. 478.

Развитие арифметики, как можно видеть из западноевропейских учебников и русских математических рукописей XVI—XVII вв., также в большой мере зависело от практических потребностей эпохи. О том, насколько мало интересовались тогда «общими» правилами, свидетельствует рост количества различных арифметических правил, применявшихся к конкретным торговым и производственным задачам. Только в начале XVIII в. начали замечать, что многие правила в сущности совершенно тождественны и обилие их зачастую не уясняет, а затрудняет решение задач. Но для того чтобы понять это, надо было научиться в какой-то степени мыслить абстрактными понятиями. Со временем появились производственные задачи, которые трудно было решить с помощью элементарной математики. Повысили свои требования к математике также астрономия, навигация, гидротехника, строительство. Поэтому появление новых идей у Декарта, Ньютона, Лейбница отнюдь нельзя объяснить их интересами к области «чистой науки» — все они обусловлены жизненными и конкретными требованиями практики.

Однако в связи с усложнением самих требований необходимо было увеличить долю абстрагирования в новых математических теориях. Возросшие возможности обобщения, необходимость дальнейшего развития теоретических изысканий, — все это старались использовать философы-идеалисты в математике. Раньше философский идеализм в математике если и чувствовался, то лишь спорадически. Вся история математики и математических знаний может служить свидетельством относительно позднего и подчиненного зарождения идеализма. Идеализм начал цепляться за математическую теорию, когда она достигла достаточно значительного (для своего времени) уровня развития.

Если внимательно проследить развитие математики в нашей стране, то становится вполне очевидным, что теория и практика прокладывали себе путь в органической взаимосвязи. В самом начале XVIII в. в России была создана Навигацкая школа, основным предметом в которой была математика. В 1703 г. вышла в свет «Арифметика» Магницкого — первый печатный учебник математики на русском языке. Петр I и его сподвижники обратили особое внимание именно на математику и ее роль в подготовке русских специалистов в разных областях промышленной и гражданской деятельности. Даже при основании Академии наук на членов ее были возложены, наряду с теоретическими, также практические задачи. Они обязаны были «все то, что уже в науках учинено — свидетельствовать, что к исправлению и размножению оных потребно — производить, что каждый в таком случае изобрел — сообщить и Секретарю вручить; о всех документах, которые свидетельствованию и апробации их поданы не будут, имеют они непристрастное суждение чинить: сиречь истинны ли оные, великой ли или малой пользы суть и известны ли были прежде сего или нет». Поэтому и для русской школы XVIII в. характерной является профессиональная направленность: России того времени нужны были не «вообще» образованные люди, а специалисты для различных отраслей хозяйства. Этим и объясняется то обстоятельство, что Россия одна из первых ввела у себя техническое образование. А так как технических наук как таковых еще не существо-

вовало, то особое внимание обращали на изучение математики, усматривая в ней науку именно практического, прикладного значения. Первыми более или менее распространенными русскими школами по подготовке специалистов были «цифирные» школы, в которых учили «нумерации, субстракции, мультипликации, дивизии, тройному, десятичным дробям, из геометрии — циркульным приемам, тригонометрии плоской, тангенсам». Даже в духовных школах синод решил ввести преподавание «как арифметики, так и нужнейшей части геометрии, дабы они (ученики) обоих вышеозначенных и церкви и гражданству потребных наук были искусны». В таких высших учебных заведениях, как Киевская академия и Харьковский коллегиум, с весьма схоластическим направлением общего образования, математику преподавали с практическим уклоном, что вылилось к концу столетия в курс «смешанной математики» в академии и в целый ряд технических предметов в коллегиуме.

Таким образом, в XVIII в. исходной основой в развитии математики и математических знаний в России служили практические потребности государства и теоретические исследования, необходимые для успешного удовлетворения этих потребностей. В XIX в. русская математика, на основе органического сочетания теории и практики, развивалась еще быстрее. Намеченная трудами М. В. Остроградского и созданная П. Л. Чебышевым петербургская математическая школа руководствовалась в своей деятельности требованиями жизни. М. В. Остроградский и в своем научном творчестве, и в педагогической деятельности отстаивал необходимость большей связи математики и ее преподавания с практикой. Он писал: «Для обучения молодежи используют те же приемы, которыми пользовались Сократ и Платон для преподавания высших истин морали людям, уже сформировавшимся, влюбленным в занятия логикой и философией и привыкшим пользоваться речью... Кто из нас не видел, что из 50 соучеников по крайней мере 40 были отвращены и обескуражены навсегда абстрактными идеями, которые нам вначале преподносили, прежде чем сделать их понятными с помощью примеров, взятых из практической жизни?»¹⁸.

Значительный вклад внесли русские математики и в развитие техники, в дело создания технических наук, технической культуры и технической школы. М. В. Остроградский сыграл большую роль в деле повышения культуры русской высшей технической и военной школы. Его с полным правом можно считать одним из создателей высшей школы вообще. Общеизвестны труды великого русского математика П. Л. Чебышева по теории механизмов и машин. Он заложил основы метрического и аналитического синтеза механизмов и, таким образом, ввел научные методы исследования в эту новую теорию. И. А. Вышнеградский усовершенствовал теорию регулирования хода машин и ввел в русских технических школах курсовое проектирование по подъемно-транспортным машинам, а также вложил большой труд в дело организации русского технического образования. В середине XIX в. резко встал вопрос

¹⁸ Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. Физматгиз, М., 1961, стр. 34—35.

об увеличении количества техников, и многие русские математики, в том числе И. А. Вышнеградский, профессор Киевского университета И. Н. Рахманинов, предложили организовать подготовку техников на физико-математических факультетах университетов.

Большую роль сыграли в развитии многих отраслей технических наук воспитанники физико-математического факультета Московского университета. Н. Д. Брашман и его ученик А. С. Ершов заложили основы русской школы науки о машинах. А. Е. Ершов был одним из организаторов и первым директором Высшего технического училища. Он организовал мастерские в училище и хорошо поставил практическую подготовку русских инженеров. В дальнейшем механику машин развивали в России Ф. Е. Орлов и Н. Е. Жуковский. Всем известна роль Н. Е. Жуковского как «отца русской авиации» и как одного из классиков гидроаэродинамики. Он не только дал науке о механике машин труды основополагающего значения, но и воспитал много учеников, ставших впоследствии профессорами русских технических высших школ. Можно сказать, что особая точность методов, свойственная русской, а впоследствии советской школе теории механизмов и машин, в значительной степени обусловлена тем, что у истоков ее стояли математики, воспитанники русских математических школ.

Приведенные примеры показывают тесную связь математики с жизнью, с производственной деятельностью общества. Это не значит, что русские ученые-математики занимались исключительно вопросами прикладного значения. Математика как наука именно в нашей стране получила наиболее полное развитие, в котором блестяще сочетаются ее теоретические и прикладные разделы. В процессе своего развития на протяжении веков, несмотря на крайне неблагоприятные условия во времена царизма, она сумела найти правильные творческие пути, основанные на тесной взаимосвязи теории и практики. Наши выдающиеся математики прошлых времен — Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, Г. Ф. Вороной, С. В. Ковалевская, В. А. Стеклов и другие — в тяжелых условиях царизма нашли в себе силы преодолеть препятствия, встречавшиеся на их пути, и прославили отечественную науку трудами первоклассного значения в области развития как математической теории, так и ее приложений, причем истоки их теоретических исследований восходят к проблемам практики, а результаты, полученные в процессе научных изысканий, поднимали решение практических задач на значительно более высокий уровень с выдвиганием новых проблем в жизненной практике. Диалектико-материалистическая особенность отечественной математики, отчетливо проявлявшаяся на всем протяжении ее развития, наиболее рельефно выражена в советский период, когда наука получила все возможности для всестороннего и полного расцвета. Всему миру известны эпохальные достижения советской науки и техники. Во всех этих выдающихся достижениях немалая заслуга принадлежит математикам. Их творчество, как и творчество всех ученых нашей страны, базируется на великом учении марксизма-ленинизма.

Большую роль сыграли советские математики в выполнении народнохозяйственных планов. Переход к строительству коммунистического общества еще больше повысил роль и значение советских ученых. В соответствующих главах III и IV томов настоящего издания достаточно подробно освещены вопросы развития математических исследований в нашей стране за годы Советской власти. В числе важнейших задач в области науки Программа КПСС указывает развитие теоретических исследований и на их основе важных приложений в народном хозяйстве. Дальнейшие перспективы прогресса науки и техники определяются в настоящий период прежде всего достижениями ведущих отраслей естествознания. Высокий уровень развития математики, механики, физики, химии, биологии — необходимое условие подъема и эффективности технических, медицинских, сельскохозяйственных и других наук. В числе тех теоретических исследований, которые должны получить самое широкое развитие, в Программе КПСС названы разработка теории и принципов создания новых автоматических и телемеханических систем, интенсивное развитие радиоэлектроники, разработка теоретических основ и техническое совершенствование вычислительных, управляющих и информационных машин. Роль математики в проведении этих исследований совершенно ясна.

Исследования советских ученых-математиков охватывают все направления научного творчества в области математики.

Большой вклад в решение ряда проблем в области оснований математики и математической логики внесли А. Н. Колмогоров, Н. Н. Лузин, А. И. Мальцев, П. С. Новиков, А. А. Ляпунов, А. А. Марков и др.

Теория чисел представлена в СССР работами И. М. Виноградова, Ю. В. Линника, А. О. Гельфонда, Б. Н. Делоне, К. К. Марджанишвили, А. Я. Хинчина, Н. Г. Чеботарева, И. Р. Шафаревича, Л. Г. Шнирельмана, Б. А. Венкова, И. П. Кубилюса, Н. Г. Чудакова и др. В этих работах отражены как аналитические, так и геометрические методы в теории чисел.

В области алгебры, в различных ее направлениях, важные результаты получены Д. А. Граве — основателем алгебраической школы, В. М. Глушковым, А. И. Мальцевым, П. С. Новиковым, Л. С. Понтрягиным, О. Ю. Шмидтом, И. М. Гельфандом, М. Ф. Кравчуком, Д. К. Фаддеевым, Н. Г. Чеботаревым, И. Р. Шафаревичем, А. И. Ширшовым, А. Г. Курошем, В. А. Андрунакиевичем, С. А. Чунихиным и другими учеными.

Значительные исследования выполнены в области геометрии. Это работы А. Д. Александрова, И. Н. Векуа, Д. Ф. Егорова — одного из основателей московской математической школы, А. В. Погорелова, В. Ф. Кагана — зачинателя Московской геометрической школы, Д. М. Синцова, Н. В. Ефимова, В. В. Вагнера, П. К. Рашевского, С. П. Финикова и др.

Больших успехов достигли советские математики в области топологии. Важными в этой области математики являются труды П. С. Александрова — основателя советской топологической школы, А. Н. Колмогорова, П. С. Новикова, Л. С. Понтрягина, П. С. Урысона, Г. С. Чо-

гошвили, В. Г. Болтянского, М. М. Постникова, Ю. М. Смирнова и др.

Большое значение в развитии исследований по теории функций действительного переменного имеют труды С. Н. Бернштейна, Н. Н. Лузина, одного из зачинателей московской математической школы, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева, Д. Ф. Егорова, Д. Е. Меньшова, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, В. А. Марченко, С. М. Никольского, Е. Я. Ремеза, В. Я. Козлова и др.

В развитии исследований по теории функций комплексного переменного и ее приложений в различных областях большую роль сыграли труды Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, И. Н. Векуа, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, Н. И. Muskhelishvili, В. И. Смирнова, А. В. Бицадзе, Н. П. Векуа, А. О. Гельфонда, М. М. Джрбашяна, С. Н. Мергеляна, Д. Е. Меньшова, А. Л. Шагиняна, Н. И. Ахиезера, В. В. Голубева, Г. М. Голузина, И. И. Данилюка, И. И. Ибрагимова, М. Г. Крейна, А. И. Маркушевича, И. И. Привалова и др.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений разработана в трудах А. А. Андропова, Н. Н. Боголюбова, М. В. Келдыша, А. Н. Колмогорова, Н. М. Крылова, И. Г. Петровского, Л. С. Понтрягина, А. Н. Тихонова, Н. П. Еругина, Н. Н. Красовского, И. А. Лаппо-Данилевского, М. Г. Крейна, Ю. А. Митропольского, В. В. Немыцкого, К. П. Персидского, Ю. Д. Соколова, В. В. Степанова, Н. Г. Четаева, И. З. Штокало, Е. А. Барбашина и др.

По теории дифференциальных уравнений в частных производных и их приложениям важный вклад в науку внесли своими исследованиями С. Н. Бернштейн, И. Н. Векуа, Н. М. Гюнтер, М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, И. Г. Петровский, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов, И. С. Аржаных, А. В. Бицадзе, В. Д. Купрадзе, Я. Б. Лопатинский, Л. А. Люстерник, Г. В. Пфейффер, З. И. Халилов и др.

По вопросам вариационного исчисления многочисленные результаты получены Н. Н. Боголюбовым, Н. М. Крыловым, М. А. Лаврентьевым, Л. С. Понтрягиным, С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником, Л. Г. Шнирельманом и др.

Проблемы функционального анализа во многих аспектах этой математической области развиты в трудах Н. Н. Боголюбова, М. В. Келдыша, А. Н. Колмогорова, Н. М. Крылова, Л. В. Канторовича, Л. С. Понтрягина, С. Л. Соболева, В. И. Смирнова, З. И. Халилова, Ю. М. Березанского, И. М. Гельфанда, Л. А. Люстерника, М. Г. Крейна, В. А. Марченко, М. А. Красносельского, В. В. Немыцкого и др.

В области теории вероятностей и математической статистики советская школа внесла свой вклад трудами С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, Ю. В. Линника, Б. В. Гнеденко, И. М. Гельфанда, Н. В. Смирнова, А. Я. Хинчина, И. И. Гихмана, Ю. В. Прохорова и др.

Отдельную математическую отрасль составляют интегральные уравнения, исследования по которым содержатся в работах И. Н. Векуа, М. В. Келдыша, Л. В. Канторовича, Н. И. Muskhelishvili, С. Л. Соболева, М. Г. Крейна, В. Д. Купрадзе и др.

В СССР широко развиты научные исследования по математической физике. Эта область математики представлена трудами Н. Н. Боголюбова, И. Н. Векуа, М. В. Келдыша, А. Н. Крылова, М. А. Лаврентьева, Н. И. Мусхелишвили, В. И. Смирнова, С. Л. Соболева, В. А. Стеклова, А. Н. Тихонова, Н. М. Гюнтера, Ю. А. Митропольского, О. С. Парасюка и др.

Большое значение, особенно для различных приложений, имеют приближенные методы вычислений, связанные со многими разделами математики. В этой области математики получены важные результаты Н. Н. Боголюбовым, А. А. Дородницыным, Л. В. Канторовичем, М. В. Келдышем, А. Н. Колмогоровым, А. Н. Крыловым, М. А. Лаврентьевым, С. Л. Соболевым, А. Н. Тихоновым, И. М. Гельфандом, В. И. Крыловым, Л. А. Люстерником, Ш. Е. Микеладзе, А. А. Самарским, П. Ф. Фильчаковым и др.

Новой отраслью математики является математическая кибернетика, получившая особенно широкое развитие в последние годы. Кибернетические методы проникли кроме самой математики в другие области, такие, как техника, биология, экономика, филология. Электронные вычислительные машины играют сейчас важную роль в новой технике, в различных отраслях промышленности, сельского хозяйства, в экономике. В создание и развитие этих методов внесли большой вклад А. И. Берг, В. М. Глушков, А. А. Дородницын, А. Н. Колмогоров, Л. В. Канторович, М. А. Лаврентьев, С. А. Лебедев, Л. А. Люстерник, А. А. Ляпунов, А. А. Марков и др.

Две такие смежные области, как математика и механика, имеют очень много общего, взаимно обогащающего. Математические методы способствовали развитию многих областей механики. В этом направлении большую роль сыграли исследования А. А. Андропова (автоколебания), И. И. Артоболевского (математические методы в теории машин и механизмов), Н. Н. Боголюбова (нелинейная механика), В. В. Голубева (аэродинамика), А. А. Дородницына (газовая динамика), Н. Е. Жуковского (аэродинамика), А. Ю. Ишлинского (теория упругости, теория гироскопов), А. Н. Крылова (механика корабля), Н. М. Крылова (нелинейная механика), М. В. Келдыша (аэродинамика), М. А. Лаврентьева (гидродинамика), Н. И. Мусхелишвили (теория упругости), Г. И. Петрова (газовая динамика), Б. Н. Петрова (теория автоматического регулирования), Л. И. Седова (гидро- и аэромеханика), Б. С. Стечкина (гидромеханика), В. А. Трапезникова (автоматика и телемеханика), С. А. Христиановича, С. А. Чаплыгина (аэродинамика), А. А. Ильюшина (теория упругости), А. И. Лурье (теоретическая и прикладная механика), Ю. А. Митропольского (нелинейная механика), Г. Н. Савина (теория упругости) и др.

За последние десятилетия важные результаты достигнуты в области теоретической физики, в которой математические методы играют большую роль. Широкое признание получили труды по теоретической физике Н. Н. Боголюбова и ряда других наших отечественных ученых.

Во всех республиканских академиях наук, университетах, научно-исследовательских институтах, технических и педагогических вузах ведутся большие научные исследования по математике, имеющие значение

как для развития теории, так и для приложений ее в различных областях науки и народного хозяйства. По многим проблемам математики в республиканских академиях наук важный вклад внесли:

в Академии наук Азербайджанской ССР — З. И. Халилов (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, функциональный анализ), А. И. Гусейнов (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения), М. А. Джавадов (геометрия), И. И. Ибрагимов (теория функций) и др.;

в Академии наук Армянской ССР — М. М. Джрбашян, С. Н. Мергелян, А. Л. Шагинян (теория функций комплексного переменного) и др.;

в Академии наук Белорусской ССР — Н. П. Еругин (обыкновенные дифференциальные уравнения), В. И. Крылов (вычислительная математика и техника), Д. А. Супруненко, С. А. Чунихин (алгебра) и др.;

в Академии наук Грузинской ССР — И. Н. Векуа (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, геометрия «в целом», интегральные уравнения), В. Д. Купрадзе (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения), Ш. Е. Микеладзе (приближенные методы, вычислительная математика), Н. И. Мухелишвили (теория функций комплексного переменного и ее приложения, математическая физика, интегральные уравнения, теория упругости), Г. С. Чогошвили (топология), Л. П. Гокиели (основания математики, математическая логика) и др.;

в Академии наук Казахской ССР — О. А. Жаутыков (дифференциальные уравнения), М. В. Пентковский (номография), К. П. Персидский (обыкновенные дифференциальные уравнения), А. Д. Тайманов (теория функций комплексного переменного, топология), Е. И. Ким (дифференциальные уравнения в частных производных) и др.;

в Академии наук Киргизской ССР — М. Я. Леонов (математические методы в механике, механика), Я. В. Быков (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, функциональный анализ) и др.;

в Академии наук Латвийской ССР — А. К. Малмейстер (математические методы в механике, механика), Э. А. Якубайтис (кибернетика), Я. Г. Пановко (математические методы в теории упругости);

в Академии наук Литовской ССР — И. П. Кубилюс (теория чисел), А. П. Юцис (математические методы в теоретической физике), В. В. Нешукайтис (математические методы в автоматике, автоматика) и др.;

в Академии наук Молдавской ССР — В. А. Андрунакиевич (алгебра), Г. В. Чалый (математические методы в автоматике, автоматика) и др.;

в Академии наук Таджикской ССР — О. В. Добровольский (математические методы в астрофизике, астрофизика) и др.;

в Академии наук Туркменской ССР — А. А. Бердыев (математические методы в физике, физика) и др.;

в Академии наук Узбекской ССР — Т. Н. Кары-Ниязов (история математики), Т. А. Сарымсаков (теория функций действительного переменного, теория вероятностей), И. С. Аржаных (дифференциальные

уравнения в частных производных, вариационное исчисление, приближенные методы), В. К. Кабулов (вычислительная математика), И. С. Куклес (обыкновенные дифференциальные уравнения), С. Х. Сираждинов (теория функций действительного переменного, теория вероятностей, математическая статистика) и др.;

в Академии наук Украинской ССР — С. Н. Бернштейн (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций действительного переменного, теория вероятностей), Н. Н. Боголюбов (обыкновенные дифференциальные уравнения, математическая физика, теоретическая физика, нелинейная механика), Д. А. Граве (алгебра), В. М. Глушков (алгебра, вычислительная математика и техника, кибернетика), Б. В. Гнеденко (теория вероятностей и математическая статистика), А. Ю. Ишлинский (теория упругости, теория гироскопов), М. Ф. Кравчук (алгебра, математическая физика), А. Д. Коваленко (теория упругости), М. А. Лаврентьев (теория функций, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения в частных производных, гидромеханика), Я. Б. Лопатинский (дифференциальные уравнения в частных производных), Ю. А. Митропольский (математическая физика, дифференциальные уравнения, нелинейная механика), О. С. Парасюк (математическая физика, математические методы в теоретической физике), Г. С. Писаренко (математические методы в теории прочности), Г. В. Пфейффер (дифференциальные уравнения), А. В. Погорелов (геометрия), Д. М. Синцов (геометрия, дифференциальные уравнения), Г. Н. Савин (теория упругости), О. Ю. Шмидт (алгебра), И. З. Штокало (дифференциальные уравнения), Н. И. Ахиезер (теория функций), Ю. М. Березанский (функциональный анализ), И. И. Гихман (теория вероятностей и математическая статистика), И. И. Данилюк (теория функций комплексного переменного), М. Г. Крейн (функциональный анализ, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения), Н. А. Кильчевский (теория упругости), В. А. Марченко (функциональный анализ, теория функций действительного переменного), Е. Я. Ремез (теория функций действительного переменного), Ю. Д. Соколов (дифференциальные уравнения, небесная механика), Г. Д. Суворов (теория функций комплексного переменного), П. Ф. Фильчаков (приложения теории функций комплексного переменного, приближенные методы вычислений);

в Академии наук Эстонской ССР — Н. А. Алумяэ (математические методы в механике, механика), Х. П. Керес, А. К. Хумал (математика), Г. Ф. Кангро (теория функций действительного переменного) и др.

Во всех братских республиках Советского Союза в области математики и ее приложений, как и во всех других областях науки, работает настолько большое число ученых, что в кратком перечне нет возможности назвать даже наиболее видных из них. Поэтому, называя отдельные математические направления исследований, мы указали имена ученых в основном на уровне академических званий. В III и IV томах освещены более подробно школы и направления по отдельным областям математики и рассмотрены исследования, а также наиболее важные результаты их представителей.

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко ценят труд советских ученых. За выдающиеся труды в области математики и ее различных приложений звание Героя Социалистического Труда удостоены А. И. Берг, А. А. Благонравов, И. М. Виноградов, М. В. Келдыш (дважды), А. Н. Колмогоров, А. Н. Крылов, С. А. Лебедев, Н. И. Мусхелишвили, Г. И. Петров, С. Л. Соболев, Б. С. Стечкин, А. Н. Тихонов, В. А. Трапезников и др. Присвоение этого высокого звания ученым является оценкой не только их личного научного творчества, но и успехов возглавляемых ими научных школ.

Многим советским математикам за выдающиеся работы в различных областях математики и ее приложений присуждены Государственные и Ленинские премии. Среди лауреатов Ленинской премии появляются новые и новые имена, что свидетельствует о неуклонном развитии самой передовой в мире советской математики, о большом росте научных школ, о постоянном пополнении научных кадров способной талантливой молодежью. Звания лауреата Государственной премии удостоены А. Д. Александров, П. С. Александров, С. Н. Бернштейн, Н. Н. Боголюбов, И. М. Виноградов, И. Н. Векуа, Б. Г. Галеркин, И. М. Гельфанд, Г. М. Голузин, А. А. Дородницын, Н. П. Еругин, А. А. Ильюшин, М. В. Келдыш (дважды), А. Н. Колмогоров, А. Н. Крылов, В. Ф. Каган, Л. В. Канторович, М. А. Лаврентьев (дважды), Ю. В. Линник, Л. Г. Лойцянский, Л. А. Люстерник, А. И. Мальцев, Д. Е. Меншов, С. Н. Мергелян, Н. И. Мусхелишвили (дважды), С. М. Никольский, П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. С. Понтрягин, И. Г. Петровский, А. В. Погорелов, С. Л. Соболев, В. И. Смирнов, Н. В. Смирнов, Л. И. Седов, А. Я. Хинчин, С. А. Христианович, Н. Г. Чеботарев и др. Звания лауреата Ленинской премии — В. И. Арнольд, Н. Н. Боголюбов, В. Г. Болтянский, И. Н. Векуа, В. М. Глушков, Р. В. Гамкрелидзе, Н. В. Ефимов, Ю. И. Журавлев, В. К. Иванов, А. Н. Колмогоров, Л. В. Канторович, Б. М. Левитан, О. Б. Лупанов, А. И. Мальцев, В. А. Марченко, Е. Ф. Мищенко, Ю. А. Митропольский, П. С. Новиков, Л. С. Понтрягин, А. В. Погорелов, М. М. Постников, А. Н. Тихонов, Н. Г. Четаев, И. Р. Шафаревич, С. В. Яблонский и др.

Присуждение Государственной и Ленинской премий является ярким свидетельством творческой мощи советской математики, ее значения в решении теоретических и прикладных вопросов, ее роли в создании материально-технической базы коммунизма и в строительстве коммунистического общества.

В Директивах XXIII съезда Коммунистической партии Советского Союза по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1966—1970 гг. предусмотрено развитие исследований в области теоретической и прикладной математики, обеспечивающих широкое применение математических методов в различных отраслях науки и техники. Решения XXIII съезда КПСС поднимают роль и значение науки, в том числе и математики, в коммунистическом строительстве в нашей стране на еще более высокий уровень, отвечающий возросшим требованиям развития теории и производственной практики.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МАТЕМАТИКА ДОПИСЬМЕННОГО ПЕРИОДА

1

Историческая характеристика дописьменного периода развития отечественной математики

Племена, населявшие с глубокой древности территорию нашей страны, играли существенную роль в развитии мировой культуры. Следы высокоразвитых древнейших культур найдены в настоящее время на территории Северного Причерноморья, Приднепровья, Приднестровья, Поволжья, Закавказья, Средней Азии. В древности на некоторых из этих земель возникли и достигли высокого, по тому времени, развития племенные объединения и государства. Зарождение математики и математических знаний у народов, населявших территорию СССР, как раз и относится к этим временам.

Возникновение письменности у того или иного народа в некоторой степени характеризует начало его активной деятельности на исторической арене и почти всегда совпадает с началом существенного накопления математических знаний. Однако письменной математике предшествует дописьменный период развития, всегда глубоко связанный с культурой данного народа и уходящий в древнейшую эпоху его истории. В этот период народы уже обладали некоторой суммой познаний, как оригинальных, так и заимствованных в результате связей с другими народами. Чем дальше мы проникаем в глубь истории человечества, тем меньше становится непосредственных свидетельств об уровне математических знаний людей и о степени их умения при счете абстрагироваться от конкретных предметов.

Рассматривая вопросы о первоначальных поселениях, можно доказательно утверждать, что первые следы человеческого обитания на территории СССР относятся к самой заре истории общества — ранней поре древнего каменного века (палеолита). Наиболее старые находки в настоящее время известны в Закавказье (в Армении), однако довольно рано человек проник и на территорию Восточной Европы. Об этом свидетельствуют находки раннепалеолитического времени (эпохи ашель) на Украине — в Надпорожье, в среднем течении Днепра. Следы заселения в эпоху среднего палеолита (мустье) известны по всей средней полосе Восточной Европы, а верхний (поздний) палеолит представлен сотнями стоянок. Некоторые из них изучены

довольно подробно, удалось установить характер поселения и домостроительства, особенности быта их обитателей и т. д.

Главным и по существу единственным видом производственной деятельности человека в эпоху палеолита было собирательство и коллективная охота на крупного зверя (мамонта, длинношерстного носорога, бизона и др.). Орудиями производства служили грубо обработанные камни, деревянные палки и дубины, мелкие изделия из кости. Главным техническим достижением того времени было овладение огнем, имевшее колоссальное значение для дальнейшего прогресса человечества. Лишь в самом конце палеолитического времени был изобретен лук. Стала возможной и целесообразной индивидуальная охота на мелкую дичь.

В период палеолита сложился родовой строй в своей наиболее классической форме матриархата. Род представлял собой единственную и универсальную форму общественной организации. В частности, он был главной производственной ячейкой: хозяйство всюду велось в масштабах рода. Счет родства велся по материнской линии.

К эпохе палеолита относится и формирование древнейших форм общественного сознания. В это время возникают первые формы религии (анимизм, тотемизм, магия), появляется искусство.

Эпоха нового, каменного века (неолита) была ознаменована целым рядом важных технических достижений. Изобретение топора дало возможность изготавливать челны, а это, в свою очередь, выдвинуло рыболовство в качестве важнейшей отрасли производства. В эту же эпоху появилось ткачество, а также начали изготавливать глиняную посуду, имевшую большое значение для дальнейшего развития материальной культуры.

К концу неолита относятся первые зачатки земледелия и скотоводства: общество переходило от присваивающих форм хозяйства (охоты, рыболовства, собирательства) к производящим формам, которые означали активное вмешательство человека в явления природы.

На территории юга нашей страны в это время сложилась чрезвычайно яркая культура, получившая название трипольской (от местечка Триполье близ Киева). Племена, создавшие эту культуру (IV—III тыс. до н. э.), были земледельцами и скотоводами. Они возделывали все основные культурные злаки (пшеницу, ячмень, просо), разводили все основные виды домашних животных (крупный и мелкий рогатый скот, свиней, лошадей). Поселения «трипольцев» представляли собой большие села, существовавшие на протяжении жизни многих поколений. Высокого уровня достигли различные производства: обработка камня и кости, ткачество и, особенно, гончарство. Великолепная расписная посуда трипольской культуры и сейчас восхищает нас своим художественным совершенством. Трипольские племена знали первый металл — медь, но она еще не играла существенной роли в производстве. Из нее изготавливались, главным образом, украшения и культовые предметы.

Широкое использование металла в хозяйстве относится к последующему периоду — эпохе бронзы. Медь слишком мягка, чтобы служить материалом для изготовления орудий, бронза — гораздо тверже. Но и она не могла полностью вытеснить из употребления камень. Поэтому на протяжении всего периода бронзы орудия изготавливались из металла и из камня. К этому времени относится активное развитие межплеменного обмена.

Важнейшим событием рассматриваемой эпохи было начало первого великого общественного разделения труда: скотоводство отделилось от земледелия. Появились скотоводческие и земледельческие племена, тесно связанные друг с другом интересами обмена. Быстрое развитие земледельческого и, особенно, скотоводческого хозяйства приводило к постепенному накоплению богатства. Племена, жившие в худших природных условиях, стремились завладеть лучшими землями и достоянием племен, живших в лучших условиях. Так возникли войны. Именно в данное время сложился тип пастуха-воина и впервые появилось боевое оружие. С другой стороны, возможность получения прибавочного продукта обусловила начало эксплуатации человека человеком в ее наиболее примитивной форме патриархального рабства.

В эпоху бронзы произошел переход от матриархата к патриархату. Этот переход был непосредственно связан с развитием земледелия и скотоводства и накоплением богатств, стремлением мужчины, выступившего главным собственником этих богатств, передать их в наследство своим детям. Необходимым условием передачи наследства являлся счет родства по отцовской линии.

Конец эпохи бронзы отмечен возникновением древнейшего государства Урарту (территория современной Армении). Это государство было тесно связано с древнейшими цивилизациями Ближнего Востока и в определенной степени восприняло их культуру, в том числе клинописное письмо.

Около VIII—VII вв. до н. э. началась новая эпоха в истории человечества — железный век, эпоха железного плуга, топора и меча. Железо — наиболее совершенный материал для изготовления орудий — сразу же вытеснило из употребления камень и бронзу. Возможность его использования открыла новые горизонты перед техническим прогрессом.

К эпохе раннего железа относятся первые сообщения письменных источников (главным образом, греческих) о населении Восточной Европы. Греки называли земли от устья Дуная, Нижнего Буга и Днепра до Азовского моря и Дона Скифией, а все племена, обитавшие здесь, — скифами, независимо от их этнической принадлежности. Современная наука считает, что в действительности под названием «скифы» скрывается множество племенных групп, различных по происхождению и этнической принадлежности. Очевидно, среди них были и предки восточных славян. В частности, принято считать славянами племена скифов-пахарей, обитавших в лесостепном Поднепровье, Побужье и Поднестровье, а также их северных соседей — неводов и будинов. Поскольку экономические и культурные связи ранних славянских племен со

скифами были весьма тесными¹, восточные славяне с полным основанием могут рассматривать культуру Скифского Причерноморья как часть своей культуры, тем более что в дальнейшем эти отношения все более и более усиливались в процессе смешения и ассимиляции скифских племен со славянскими.

Племена Скифии достигли довольно высокого уровня исторического развития. Те из них, что обитали в лесостепи, были по преимуществу земледельцами. Они знали уже пашенное земледелие, развивавшееся в рамках индивидуального производства. Земля формально еще являлась общинной собственностью, но для обработки распределялась между отдельными домохозяйствами, при этом соблюдались ежегодные переделы. Продукт, полученный в результате эксплуатации конкретного земельного участка, составлял уже частную собственность той семьи, которой принадлежал этот участок. Так, еще в недрах первобытнообщинного строя возникали предпосылки для имущественного расслоения населения.

Степная Скифия была кочевой. Здесь главным видом хозяйственной деятельности являлось скотоводство. Историческое развитие этой части Скифии отличалось более быстрыми темпами. Уже около IV в. до н. э. здесь возникло Скифское царство, экономической основой которого было рабовладение. В III—II вв. до н. э. столицей этого царства был Неаполис (ныне Симферополь).

Для развития Скифии большое значение имели тесные связи ее с греческими рабовладельческими полисами (городами-государствами) Северного Причерноморья. Процесс возникновения этих городов был, начиная от VI в. до н. э., частью общего процесса греческой колонизации. В VI в. возникли Тирас (в устье Днестра), Ольвия (в устье Южного Буга и Днепра), Боспорское царство (в восточном Крыму и на Тамани), в V в. — Херсонес (на месте нынешнего Севастополя). Греки установили с местным населением тесные связи как экономические, так и культурные. Благодаря этому достижения античной цивилизации в той или иной степени проникали в местную общественную среду.

В начале нашей эры Северное Причерноморье подверглось римской оккупации. Источники этого времени сообщают о славянах как об особой группе восточноевропейского населения, называя их венедами. В источниках IV—VI вв. н. э. называются две большие группы славянских племен — анты и склавины (исследователи считают это первым указанием относительно разделения славян на восточных и западных).

В первой половине и середине I тысячелетия н. э. славяне переживают новый этап в своем развитии: они делают решительный шаг от первобытнообщинного строя к классовому обществу. В основе этого процесса лежало развитие основной отрасли хозяйства — земледелия. В начале I тысячелетия н. э. в лесостепной полосе Восточной Европы получило широкое распространение пашенное орудие с железным наконечником, а в IV—VI вв. — плуг с железным лемехом, которым можно

¹ П. Н. Третьяков. Восточнославянские племена. Изд. 2-е. Изд-во АН СССР, М., 1953, стр. 67.

не только разрыхлять, но и переворачивать почву. Это обусловило резкое повышение производительности земледельческого труда. Параллельно развивалось и ремесло — железоделательное, кузнечное, гончарное, ювелирное, — которое уже начало отделяться от сельского хозяйства: начали появляться специалисты-ремесленники, работавшие на обмен. Это — второе общественное разделение труда, обусловившее появление товарного производства, постоянной внутренней торговли и денег.

Главной формой общественной организации в это время была территориальная сельская община, которая быстро разлагалась. Происходил процесс формирования классов. В источниках VI в. византийские историки сообщают о развитии у антов и склавинов рабовладения. Однако рабский труд уже не оправдывал себя в условиях всеобщего кризиса античной рабовладельческой системы. Поэтому он активно вытеснялся трудом зависимых крестьян, которые имели свое хозяйство, но были связаны с владельцем земли определенными повинностями. Так складывались феодальные отношения.

Процесс возникновения классовых отношений требовал такой силы, которая могла бы обеспечить господство одного класса над другим, т. е. государства. В середине I тысячелетия н. э. у славян были сильные политические объединения государственного типа. Эти объединения распались на рубеже VI и VII вв. вследствие войн с аварами, но причины, вызвавшие их к жизни, конечно, не могли исчезнуть под влиянием внешних факторов. Поэтому в VI—IX вв. на развалинах антского объединения возникло новое, более обширное и мощное государство — Русь.

Таким образом, праславянские племена — общие предки трех братских народов, русского, украинского и белорусского — были коренными хозяевами огромных равнин Восточной Европы. Здесь они развивали свое хозяйство, соответственно природным условиям этих земель, здесь создавали свою самобытную культуру, здесь строили свои внутренние общественно-политические отношения, здесь на протяжении веков мужественно отражали нападения своих общих врагов, стремившихся поработить их.

2

Возникновение математических понятий

Для составления полной картины математической культуры народа, от первых накоплений математических знаний до современных вершин науки, следует изучить все этапы ее развития, начиная с дописьменного периода. Для этого необходимо широко использовать материалы археологии, сравнительного языкознания и в некоторой степени этнографии. В сущности говоря, совокупность этих исследований является единственным путем выяснения объема познаний наших древних предков в области арифметики и геометрии. Некоторые сведения о дописьменной математике может дать также так называемая народная математика, стоящая на стыке с этнографией

и фольклором. Однако этими сведениями следует пользоваться осторожно, так как в них есть наслоения различных периодов, включая и более позднее время, когда уже существовала письменность и даже школьная учебная литература.

Период первоначального накопления математических знаний в настоящее время еще недостаточно изучен и требует дальнейшего тщательного научного исследования. Рассмотрим некоторые материалы народной математики.

Земледелие и скотоводство, древнейшие занятия населения Восточной Европы, стимулировали возникновение и расширение первоначальных математических познаний. Эволюция приемов счета и измерений у всех народов приблизительно одинакова, но процесс становления и степень развития их зависели от особенностей социально-экономических и производственных условий. Характерно, что в эпоху, предшествовавшую ранним государственным образованиям, у различных племен, населявших территорию нашей страны, вырабатывались совершенно аналогичные вычислительные приемы и метрологические правила, основанные на антропометрическом принципе. Параллельно с развитием счета и меры возникали и первые геометрические представления.

Уже на первых ступенях развития человечества в результате практической деятельности людей появилась необходимость уметь считать. Для подсчета количества добычи, полученной во время охоты, для учета скота у древних скотоводческих племен и, наконец, для различных потребностей примитивного тогда сельского хозяйства необходимы были некоторые общие правила и приемы, которые и выработали люди в своей совместной жизненной деятельности. Первым приемом счета была конкретизация его на пальцах, а первые попытки измерения длины и расстояния осуществлялись при помощи размеров и движений частей человеческого тела (пядь, локоть, шаг и т. п.).

Развитие понятия числа представляет собой весьма длительный процесс, потребовавший от первобытного человека большого напряжения мысли. Первоначально люди довольствовались так называемым малым счетом, а именно тремя числами: «один», «два», «много». Иными словами, человек ограничивался счетом до двух, остальные количества он воспринимал как «много». Этот этап счета положил начало древнейшей из всех систем счисления — двоичной системе. Она, как наиболее простая, по-видимому, существовала у всех народов. Впоследствии были выработаны другие системы счисления — пятеричная, двадцатеричная, а также десятичная. Остатки двадцатеричной системы обнаружены, например, у чукчей. Следы употребления в прошлом двадцатеричной системы можно видеть в выражении «В каждом стаде оленей двадцать по двадцать, еще раз и еще раз двадцать по двадцать — тысяча двести голов — вот сколько оленей».

Прошло немало времени, прежде чем человек начал считать до пяти и шести, а затем до десяти. Следы того, что некогда число 7 служило у наших предков для выражения неопределенной множественности, сохранились в русском языке в виде пословиц и поговорок: «Семеро

одного не ждут», «Семь раз отмерь, а раз отрежь», «У семи няnek дитя без глазу», «За семью печатями», «За одного грамотного семь неграмотных дают» и др.² Надо полагать, что во всех указанных случаях слово «семь» употреблялось в смысле «много». В дальнейшем число 12 стало символом полноты, а следующее за ним число 13 оказалось, таким образом, лишним, а значит, и «нечестивым», «несчастливым».

В тюркских легендах синонимом неопределенного множества является число «сорок» (по-тюркски — «кырк») или выражение «сорок сороков». Последнее нередко употреблялось также и у восточных славянских племен. По-видимому, такого рода понятия образовались под влиянием туранских словообразований. Например, у некоторых восточнославянских племен выражение «пять сороков соболей» означало размер податей.

Своеобразными следами древних приемов счета являются слова, характеризующие счет группами, — парами, тройками, четверками, пятками, десятками, а позже — дюжинами. Позже появились также слова, относящиеся к дробному счету, — половина, четверть и др.

Изучая историю возникновения счета и числовых понятий у древних народов, мы встречаем три стадии формирования понятия числа: умение считать, умение называть числа и умение фиксировать результаты счета. Первым начал развиваться словесный счет, как непосредственно вытекающий из потребностей жизненной практики. В течение весьма долгого времени он развивался под влиянием счета на пальцах. Возникновение приемов пальцевого счета уходит в глубь веков, так как было вызвано практической потребностью жизненной деятельности людей, причем этому счету придавалась необходимая тогда наглядность. Таким образом, простые арифметические действия с помощью пальцев осуществлялись как бы на своего рода счетной машине.

Приведем пример умножения до 5. Пусть надо умножить 7 на 9. Загибаем на одной руке столько пальцев, на сколько 7 больше 5, а на другой руке — на сколько 9 больше 5. Итак, на одной руке загнуты 2 пальца, не загнуты 3, на второй руке загнуты 4 и не загнут 1 палец. Сложим число загнутых пальцев ($2 + 4 = 6$), что даст число десятков, и перемножим числа незагнутых пальцев ($3 \times 1 = 3$), что даст число единиц. В результате получим 63.

Умножение на пальцах можно было выполнять до 15 на 15. Поясним на примере. Пусть требуется найти произведение 12×14 . Загибаем на руках количество пальцев, равное избытку каждого из множителей над числом 10, т. е. на одной руке — 2 пальца и на другой — 4. Далее находим их сумму ($2 + 4 = 6$), что даст число десятков. К последнему прибавляем произведение тех же чисел ($2 \times 4 = 8$). Ко всему результату прибавляем 100. Получим $12 \times 14 = 100 + (2 + 4) \times 10 + 2 \times 4 = 168$. Последующая разработка пальцевого счета привела к довольно остроумным и интересным построениям, с которыми можно

² И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич. Происхождение системы счисления. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики. Т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 18.

ознакомиться по специальной литературе, где описаны довольно оригинальные методы пальцевого счета до миллиона.

Первоначальный счет был конкретным, визуальным, с обязательным откладыванием или перекладыванием предметов. Позже счет проводился при помощи пальцев рук и ног, а также палочек, черепашек, камешков и т. д. Для этой ступени характерно некоторое абстрагирование от предметов, подлежащих счету, хотя он и оставался предметным.

Однако такое изображение чисел было неудобно, особенно в тех случаях, когда нужно было результат сберечь на длительное время или сообщить его людям, находящимся на значительном расстоянии. Это привело к созданию новых форм фиксации результатов счета: 1) изображения чисел завязыванием узлов на веревочке, называемого квипусом; 2) нанизывания на шнурок или палочку косточек, раковин или кусочков дерева, называемого четником; 3) фиксации чисел путем нанесения на палочки или кости зарубок (позже палочки получили название «бирка»).

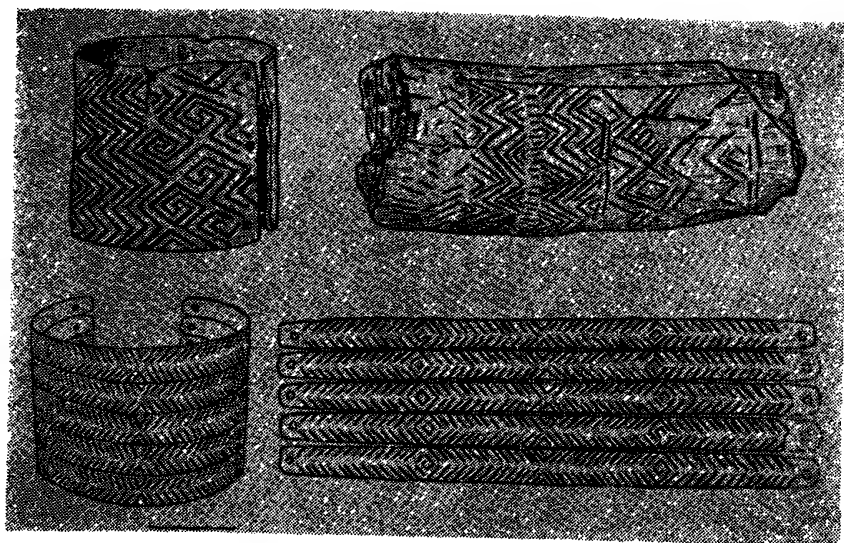
В квипусе один простой узел на веревочке означал 10, два простых узла — 20, узел, завязанный дважды, — 100, трижды — 1000 и т. д. Для нанизывания на шнурок употреблялись косточки, раковины, кусочки дерева разных цветов. Значение каждой раковины или косточки зависело от цвета и порядка нанизывания на шнур. Бирки были широко распространены на Руси, у народов Сибири, Прибалтики, а также в других странах, где они назывались по-разному. В русских летописях сохранились следы старинных наименований зарубок — «черты», «меты». Употребление бирок представляет собой одну из первых ступеней в попытках человека изображать числа при помощи условных знаков. Дальнейшие поиски человека в направлении фиксации результатов счета привели к созданию цифрового изображения чисел, что было осуществлено на стадии появления у народов письменности.

3

Зарождение математических представлений в каменном и бронзовом веках

Первичное возникновение математических понятий или, правильнее, понятий, которые впоследствии могли быть использованы математикой, непосредственно связано с возникновением абстрактной мысли вообще. Очевидно, такие понятия, как «один», «два», «много», «больше», «меньше», как понятия, связанные с мерой и измерением, относятся к числу первых абстракций, которые человек выработал в процессе своей трудовой деятельности.

Материал, которым располагает наука, показывает, что абстрактное мышление существовало уже в самом начале человеческой истории, т. е. в палеолите. Следовательно, в палеолитической эпохе приходится искать и возникновение интересующих нас представлений. Естественно, у нас нет и не может быть непосредственных источников, отразив-



Браслеты из бивня мамонта и заготовки для них. Мезинская стоянка.

ших первые шаги абстрактной мысли. Однако некоторые косвенные данные позволяют сделать весьма любопытные наблюдения. Речь идет о древнейших произведениях искусства, найденных на территории нашей страны, в частности об орнаменте на костяных изделиях. Возле Новгорода-Северского на Черниговщине, на месте известной палеолитической стоянки в Мезине, возраст которой — около 30—25 тыс. лет, найдены разнообразные выделки из кости, покрытые графическим или живописным орнаментом, имеющим весьма регулярные правильные геометрические формы. Вниманию привлекают, в частности, костяные пластинчатые браслеты. Один из них состоит из пяти узких пластинок, орнаментированных прямыми наклонными штрихами, расположенными двумя рядами (в виде елочки). Ритм составных элементов орнамента, их размеры и расположение на всех пяти пластинках совершенно одинаковы. Сама возможность появления такого орнамента предполагает наличие в сознании его создателя идей (пусть даже до конца не сформулированных), представляющих для нас интерес. Это:

1) идея количества и счета. Число черточек, повторяющееся на каждой из пяти пластинок, заставляет думать, что они были подсчитаны, а поскольку число это сравнительно велико (4 зоны по 12—14 черточек в каждой), то можно полагать, что жители Мезинской стоянки знали счет, по крайней мере до 20 (число пальцев на руках и ногах);

2) идея ритма, выраженная в правильном построении орнамента (в частности, здесь отчетливо выступает понятие симметрии);

3) идея меры и измерения. Расстояния между соседними черточками одинаковы, как и длина самих черточек, как ширина и длина пластинок, составляющих браслет. Следовательно, их каким-то образом измеряли (хотя бы на глаз);

4) идея угла и наклона (угол наклона черточек на всех пяти пластинках совершенно одинаков);

5) первые представления о геометрической форме (отрезок прямой, точка, квадрат, треугольник и т. д.).

В связи со сказанным представляет интерес небольшая пластинка с нанесенными на ней наклонными черточками, расположенными елочкой в два ряда, подобно описанному выше орнаменту. Количество штрихов здесь также совпадает, но не всегда совпадают их концы. Это убеждает в том, что черточки действительно были подсчитаны и их числовое совпадение достигалось отнюдь не графическими приемами.

Другой браслет из этой коллекции покрыт еще более сложным, меандровым орнаментом, причем довольно правильным. Этот орнамент отражает еще более сложные геометрические представления. Можно назвать также знаменитые мезинские «птички» — костяные фигурки, покрытые также геометрическим (в том числе меандровым) орнаментом.

При раскопках этой же стоянки найдена лопатка мамонта, на поверхности которой красной краской изображены строго параллельные линии — прямые и ломаные (в форме правильного зигзага). Здесь, в дополнение к сказанному относительно таких геометрических понятий, как линия, угол, длина и т. д., мы видим непосредственное отражение представления о параллельности линий. Учитывая возраст этих находок, следует признать их исключительно важным документом, отражающим развитие абстрактной мысли и зарождение первых математических представлений у первобытного человека на самой заре истории.

В последующие эпохи эти представления получили дальнейшее развитие. В частности, материалы неолитической эпохи, особенно трипольской культуры, дают большое количество данных на этот счет. Речь может идти опять-таки об орнаменте (в частности, на глиняных сосудах), отличающемся, с одной стороны, значительной сложностью построения, а с другой, — геометрической точностью его структурных элементов. Этот орнамент показывает высокую степень развития идеи ритма и симметрии, предполагающую наличие у мастера соответственно высокой техники измерения.

Как правило, орнаментальная композиция разбивается на целый ряд зон по сложной системе показателей, каждый из которых имеет свою точно измеренную величину (размеры отрезков линий, из которых состоит орнаментальная композиция, расстояния между ними, величины углов



Трипольский сосуд из Усатова.

и т. п.). Это показывает, что развитие основных понятий по сравнению с палеолитической эпохой ушло далеко вперед. Для орнамента трипольской культуры свойственно расширение арсенала элементов, имеющих геометрическое содержание.

В частности, весьма распространены мотивы окружности и круга (в большинстве случаев изображенных довольно точно), а также спираль. В конце концов, сама по себе геометрическая правильная форма сосудов, изготовлявшихся в эпоху триполья без помощи гончарного круга, отражает определенный уровень развития геометрических представлений, в данном случае связанных уже не только с плоскостными, но и с пространственными явлениями.

Внимательное изучение трипольского орнамента, его семантики, связанной с древнейшими земледельческими культами, заставляет думать, что число уже приобретало известное сакральное, мистическое значение. Например, по мнению Б. А. Рыбакова³, дождь символизировался непременно *четырьмя* потоками, изливающимися из тучи (изображаемой в виде полукруга). Семантический смысл этого символа: туча — в образе коровьего вымени с четырьмя сосками. Культурный смысл имеют изображения *двух* небесных женщин — хозяйек *двенадцати* полумесяцев (12 лун); *четыре* антропоморфные детали на поверхности сосуда, символизирующие изображение божества, и т. д. Особое значение имело, по-видимому, число три: в этом смысле интересны изображения, отступающие от реалий, где действительные, существующие в природе количества заменены количеством трех (например, нередко встречаются изображения человека с тремя пальцами на руках вместо пяти).

Некоторые элементы трипольского орнамента позволяют предполагать, что его авторы знали, по крайней мере, простейшие дроби и, во всяком случае, деление. Речь идет, в частности, о делении пополам некоторых семантически определенных изображений. Например, овал неба делится пополам извилистой линией, символизирующей Млечный путь, соединяющий две половины неба (принципиально важным здесь выступает понятие половины неба). В некоторых случаях выступают «трехъярусные» изображения людей — с двумя грудными клетками и двумя парами рук каждое. Здесь в сознании художника единая величина (человек) делится на две половины и к ним добавляется еще одна, третья. Несомненное значение имеют и изображения половинок геометрических фигур (в частности, полукруга).

Материалы трипольской культуры позволяют утверждать, что ее носители в повседневной жизни так или иначе применяли какие-то более или менее выработанные измерительные системы. Строительное дело не могло развиваться без измерений (хотя бы самых примитивных, например с помощью простой палки). Жилища, хорошо известные по раскопкам многочисленных поселений, имеют довольно правильный прямоугольный план. Очевидно, те, кто их строил, не только умели

³ Б. А. Рыбаков. Космогония и мифология земледельцев неолита. — Советская археология, 1965, № 2, стр. 15.

измерять отрезки прямых, но и знали способы построения прямых углов.

Хронологически существование трипольской культуры совпадает с периодом возникновения и развития древнейших цивилизаций в Средиземноморье — Египта, Двуречья, Крито-Микенской Греции и др. Эти цивилизации характеризовались, между прочим, сравнительно высоким развитием математических знаний, которые известны нам довольно хорошо. Население Восточной Европы имело некоторые связи с названными странами. Можно предполагать и определенное влияние древних цивилизаций на возникновение и развитие математических знаний у древнейших племен нашей страны. Однако не следует преувеличивать роли этого влияния, так как оно уменьшалось по мере удаления в глубь обитаемых территорий. Поэтому основная часть первоначальных математических познаний общества нашей страны дописьменного периода несомненно является прежде всего достижением ее коренного населения.

Вероятно, несколько большее значение имело культурное взаимовлияние в эпоху бронзового века, когда межплеменной обмен, в связи с развитием металлургии, достиг довольно значительных масштабов. У праславянских племен Восточной Европы были оживленные связи с их северо-восточными, восточными и южными соседями. На левобережье Днепра найдены бронзовые изделия, изготовленные уральскими, кавказскими и трансильванскими литейщиками и кузнецами. В III тысячелетии до н. э. племена Восточной Европы уже были знакомы с изготовлением изделий из бронзы, в последующее время бронзовая металлургия играла существенную роль в системе общественного производства. Это дает нам право предполагать наличие понятия пропорции и пропорционального деления, так как, чтобы изготавливать бронзовые изделия хорошего «стандартного» качества, древние металлурги должны были следить за необходимым соотношением составных частей сплава. В связи с этим в высшей степени интересным был бы сравнительный анализ процентного состава бронз того времени, который до сих пор, к сожалению, еще не произведен.

Современная наука считает, что эпоха бронзы была периодом начального распада общеиндоевропейского праязыка. Поэтому особый интерес представляют лингвистические данные. Совершенно очевидно, что в языках индоевропейской группы элементы общеиндоевропейского характера возникли, во всяком случае, не позже рассматриваемой эпохи.

Лингвистические данные свидетельствуют о том, что уже в III тысячелетии до н. э. население Восточной Европы знало счет до тысячи, а может быть, и выше (единство происхождения чисел, обозначающих первый десяток, сто и тысячу). Ему были известны действия сложения (слова, обозначающие числа второго, третьего и т. д. десятков), умножения (слова, обозначающие 20, 30, 40, ..., 90), деления, по крайней мере, на два, три, четыре (наличие слов для обозначения половины, трети и четверти). Почти одинаковое звучание этих слов во всех индоевропейских языках доказывает, что они относятся к наиболее древнему словар-

ному запасу, образовавшемуся еще в период до начала разделения праиндоевропейского языка на языки индоевропейской семьи, и тем самым свидетельствуют о существовании в глубокой древности действий устной математики.

4

Об элементах математических знаний у скифо-сарматских племен

Скифо-сарматские племена, населявшие Крым и Северное Причерноморье в эпоху от VI в. до н. э. до II—III в. н. э., находились в тесном соприкосновении с восточнославянскими племенами, испытывая в то же время влияние эллинистической экономики и культуры, распространявшееся из Херсонеса, Боспора, Ольвии и других греческих городищ и поселений. Советскими археологами собраны обширные материалы, на основании которых можно составить определенное мнение об экономике, быте, культуре, в том числе и об уровне математических знаний, у поздних скифов и сарматов.

По остаткам памятников, обнаруженным при археологических раскопках на территории Неаполиса, столицы Скифского государства, можно судить о геометрических познаниях скифов. Раскопано огромное для того времени зернохранилище, вырубленное в материковой скале и имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, размерами в длину 11,75, в ширину 5,47 и в высоту 0,9 м. Измерения остатков городской стены и жилых помещений Неаполиса, а также реставрированного плана вскрытой части города показывают, что улицы выдерживались прямолинейными, стены домов возводились с достаточной точностью параллельности и перпендикулярности (среднее отклонение углов от прямого составляет около 2°), а сами дома строились параллельно городской стене и стенам соседних домов. Все это свидетельствует о том, что скифы в этом районе пользовались оригинальными средствами и инструментами для проведения параллельных прямых, сохранения строгой вертикальности стен и почти точного построения прямых углов, невзирая на то, что строительный материал был грубым — рваный камень, в значительной степени затруднявший измерения. В другом скифском городище — Красном на Днепре в результате археологических раскопок обнаружены изломанность и искривленность улиц, нарушение параллельности стен построек и использование параллельности в плане строительства как случайного элемента. Таким образом, мы устанавливаем в хозяйственной деятельности поздних скифов I—III вв. н. э. неодинаковое проявление геометрических представлений.

Скифам была хорошо известна окружность, о чем свидетельствуют контуры выходных отверстий, обнаруженных ям (зернохранилищ) на территории Неаполиса. Эти контуры, вероятно, вычерчивались с помощью колышка и шнура заданной длины. Известно, что таким приемом пользовались херсонесцы при возведении башни Зенона. О знании скифами окружности свидетельствуют также найденные при раскоп-



Скифский орнамент — пилястры в склепе № 9 некрополя Неаполиса.

ках скифских курганов кольца, бронзовые зеркала, правильной круглой формы подвески и др. В более поздний период (I в. до н. э. — I в. н. э.) скифы использовали свои геометрические знания для усовершенствования некоторых строительных приемов. Например, обнаруженная в скифском городище Красном гончарная печь свидетельствует об использовании свойств окружности в строительном деле. Вероятно, этот прогресс происходил под греческим влиянием. В рассматриваемый период становятся известными многие свойства окружности, в частности методы построения концентрических окружностей, о чем свидетельствуют различные знаки на плитах. В орнаментах некоторых бронзовых зеркал встречаются элементы с окружностью, разделенной на 3, 4, 6 и 8 равных частей, а также окружности с вписанными многоугольниками с таким же числом сторон. Позднее скифы, несомненно, были знакомы со свойствами треугольников (равносторонних, равнобедренных и разносторонних).

Весьма распространенной была идея симметрии. Например, ниша (высота ее около 68 см) одного из склепов некрополя Неаполиса, предназначенная для захоронения трупа в сидячем положении, имеет строгую симметрию относительно вертикальной плоскости. Симметричные формы имеют орнаменты зеркал, найденных в Крыму и в Прикубанье, знаки на плитах, в частности так называемый знак Савромата II, многие сооружения, а также некоторые предметы домашнего обихода. Речь идет как об осевой, так и о центральной симметрии. Сравнивая зарисовки на плитах, найденных в окрестностях Керчи и на Таманском полуострове, можно прийти к заключению, что у поздних скифов выработалось представление о подобии геометрических фигур. Единицей

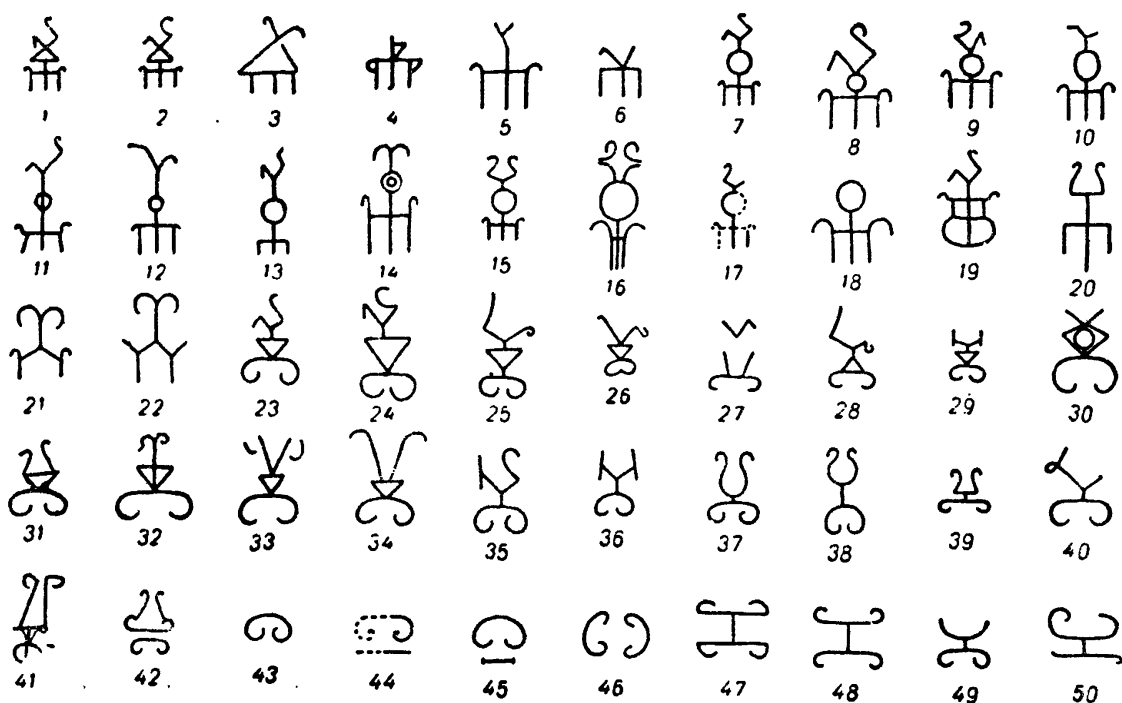


Таблица сарматских знаков (по Э. И. Соломонюк).

измерения у скифов, по-видимому, был принят «локоть». Это можно установить на основании выполненного большого числа измерений длины и толщины стен, диаметров зерновых ям, периметров полуподвалов и т. д. и выделения из результатов измерений единицы, которой были кратны полученные числовые данные.

Определить степень арифметических знаний у скифов и сарматов еще труднее, чем уровень их знаний в области геометрии. Если исходить из уровня развития строительных приемов, точно выраженных пропорций сооружений, значительных длин в планах городов, состояния сбора податей с населения, торговли с соседями и т. п., то можно с большой степенью вероятности предположить, что скифы III—II вв. до н. э. владели счетом выше тысячи (и всеми четырьмя арифметическими действиями). Поздние скифы знали простейшие дроби. Например, многие измерения различных предметов, произведенные с помощью локтя, позволяют считать достоверным знание скифскими строительными мастерами половины единицы измерения, а несколько позднее, когда у скифов появилась пятеричная система счисления (счет «пятками»), знание дробей со знаменателем 5, а также сложения таких дробей. При раскопках Неаполиса найдены обработанные кости животных с большим числом засечек на них. Оказалось, что число этих засечек в подавляющем большинстве случаев кратно 5.

Продолжительное общение скифов и сарматов с ольвийскими, херсонесскими и боспорскими греками привело к заимствованию у последних вместе с письменностью некоторых математических знаний.

Некоторые выводы об уровне арифметических знаний у скифо-сарматов в указанный период можно сделать на основе изучения надписей на плитах того времени. Для изображения числа на многих плитах использована ионийская нумерация. Например, на одной из плит высечена надпись: «Попечением Герака, сына Понтика, главного аланского переводчика в 505 году» (боспорской эры). Число 505 изображено в ионийской нумерации. Поскольку 505 год боспорской эры соответствует 208 г. н. э., то надпись следует отнести ко времени правления боспорского царя сарматской династии Савромата II. Следовательно, в начале III в. н. э. скифам и сарматам была известна ионийская нумерация. Вместе с ионийской нумерацией они, несомненно, восприняли и приемы вычислений, известные боспорским грекам. Возможно, была также заимствована и десятичная система счисления. Однако греческой письменностью и нумерацией пользовалась скифская знать, имевшая возможность получать греческое образование, широкие же слои населения, в частности земледельцы и ремесленники, скорее всего были носителями местных скифских знаний, мало осложненных греческим влиянием. Поэтому особое значение для оценки уровня математических знаний, отражавших состояние производительных сил и производственных отношений скифов, имеет изучение скифского археологического материала.

5

Математические знания у древних восточных славян

В письменных источниках древние славяне как самостоятельная историческая сила фигурируют с начала нашей эры. Но сведения об их быте и общественном строе до эпохи Киевской Руси чрезвычайно скудны и схематичны. Нет никаких прямых сведений о развитии различных знаний у них, в частности в области математики. Но сравнительно высокий уровень общего развития славянского общества в I тысячелетии н. э. позволяет считать, что в это время и в области развития математических знаний был сделан шаг вперед.

Не может быть сомнений, что все наследие предыдущих эпох было усвоено древними славянами, но столь же бесспорно, что в начале нашей эры появились и некоторые новые моменты, непосредственно относящиеся к сфере наших интересов. Например, начиная с I—II вв. н. э. в славянском обществе возникает денежное обращение (с использованием римской серебряной монеты). Оно было возможно лишь при условии наличия достаточно полных арифметических знаний, свободного владения техникой счета и арифметическими действиями. Многие клады римских монет насчитывают тысячи экземпляров монет. Само собой разумеется, что эти монеты были сосчитаны. Более того, обращение металлической монеты предполагает и наличие высокой техники весовых измерений. В. Л. Янин⁴ установил, что вес самой древней из древне-

⁴ В. Л. Янин. Древневесовые системы домонгольской Руси. М., 1954, стр. 15—16.

русских гривен кратен весу римского динария (4,3 г), при соотношении 1 : 20 или 1 : 40 (здесь видно проявление очень древней системы счета на сорок). Б. А. Рыбаков отметил совпадение основных римских и древнерусских мер сыпучих тел: древнерусский четверик точно равен римскому квадранталу (26,26 л), а древнерусская полосмина — римскому медимну (52,52 л)⁵.

Все это свидетельствует о том, что именно в первые века нашей эры сложилась основная метрическая система Древней Руси.

К первым векам нашей эры относятся древнейшие известные нам данные о попытках письменной фиксации математических понятий (что, безусловно, было связано с зарождением древнеславянской письменности). Исключительный интерес представляет уникальная находка — древнеславянский календарь, датируемый IV—V вв. (из Среднего Поросья — с. Ромашки на Киевщине)⁶. Календарь нанесен в виде орнамента на стенки большого прекрасно сделанного кувшина. В нем отражено своеобразное расписание сельскохозяйственного цикла, охватившего отрезок времени от 1 апреля до 6 августа. Основными фиксированными в календаре датами являются: 4 июня (Ярилин день), 24 июня (праздник Купала), 20 июля (день бога-громовержца, которому в христианском календаре соответствует Ильин день). Хронологические интервалы между этими датами фиксированы символическими изображениями дней в виде маленьких квадратиков. Число этих квадратиков во всех случаях очень точно соответствует числу дней, отделяющих один языческий праздник от другого. Ромашковский календарь является исключительно важным источником, проливающим яркий свет на различные представления восточных славян до эпохи образования Киевской Руси. Он свидетельствует не только о высокоразвитой технике счета, но и об определенном уровне астрономических знаний, предполагающем, в свою очередь, соответствующий уровень развития математических знаний.

Большое значение для оценки древних математических представлений наших предков имеет изучение этнографических материалов. В частности, народные меры и способы измерения, сохранившиеся у восточных славян почти до наших дней, чрезвычайно древнего происхождения. Выше уже упоминалось, что первоначальные единицы измерения длины были позаимствованы человеком из размеров частей тела, а также из движений человека (шаг, размах рук). Изучение образования мер длины, площадей, объемов и веса играет определенную роль в исследовании экономического и культурного развития народа. Знакомство с народными мерами и приемами измерений дает возможность заглянуть в интересный мир пространственных представлений народа, помогает изучить его геометрические познания, творческие успехи в области исчисления и, таким образом, глубокую народную

⁵ Б. А. Рыбаков. Ранняя культура восточных славян. — Исторический журнал, 1943, № 11—12, стр. 15; Ремесло Древней Руси. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 43.

⁶ Б. А. Рыбаков. Календарь IV в. из Земли полян. — Советская археология, 1962, № 4.

мудрость. Изучая меры, следует различать результаты собственного творчества народа в их создании, которые передавались из поколения в поколение, и наслоения, которые были принесены, так сказать, извне, вследствие исторических влияний других народов. Внимательное рассмотрение и сравнение мер убеждает нас в том, что в прошлом существовало одновременно много сходных, близких, но не тождественных мер. Здесь мы сталкиваемся с причиной общего сходства мер, так как в основе их лежит так называемый антропометрический принцип. Едва уловимые различия в одноименных мерах отражают лишь детали, внесенные за счет применявшихся различных способов измерения либо за счет антропометрических особенностей.



Керамический сосуд. Стоянка Незвисько.

У древних восточных славян мерами длины были локоть и сажень. Слово «локоть» производилось «лакътъ». От него на севере — глагол «локчать» или «лехчить», что означает считать, измерять. Локоть как расстояние от конца среднего вытянутого пальца до локтя, в среднем равный 46 см, впервые упоминается в «Русской Правде». В качестве меньшей единицы длины применялись палец, стопа, пядь. Слово «пядь» произошло от слова «пять», что означает пнуть, натягивать, растягивать.

Сажень упоминается в одном из первых письменных памятников Древней Руси. Существовало несколько вариантов сажени. Небольшие расстояния измерялись шагами, большие — двойным шагом или тростью (жердиной).

Древними являются единицы измерения больших площадей, связанные с сельским хозяйством и указывавшие размер вспашки в течение одного дня парой волов, — «день» или «плуг». Прочное место в измерении больших площадей земли заняла русская десятина. Широкое распространение на севере России получила единица измерения «выть», размеры которой колебались от 6 до 10 десятин. В центральных местах Приднепровья поля измеряли в древности также «полосами» или «отрезками» (3 десятины), а в некоторых местах «планками» или «ваканами» (6 десятин).

Древнейшие единицы измерения сыпучих тел, в первую очередь зерна, также связаны с сельским хозяйством. Отмеченные выше совпадения древнерусских мер сыпучих тел с римскими объясняются широкой торговлей хлебом, которую древнее население Приднепровья вело с Римом. Выше уже отмечалось, что основная русская мера сыпучих тел — четверик соответствовала квадранталу. Четверик содержал в себе 9 мерок или 8 четвертей, четверть — 8 гарнцев, вошедших в употреб-

ление намного позже. Однако существовали и различные местные меры сыпучих тел. Широкое распространение получил «пуд», в некоторых местах называвшийся еще «меркой», в Поволжье мерой зерновых продуктов был «маленок» ⁷.

Практический характер носит и происхождение познаний в области геометрии. В народном искусстве восточных славян с начала нашей эры геометрические изображения используются в качестве мотивов орнамента: точка, прямые линии, углы, параллельные и перпендикулярные прямые, прямоугольники, треугольники, окружности и др. В этом отношении можно сослаться на сохранившиеся с древних времен орнаменты, зарисовки, украшения, на формы многих предметов хозяйственной принадлежности, посуды, вышивок, мережек, покроя одежды, построек и т. п. Даже сведениями о свойстве диагоналей прямоугольника, приобретенными практикой строительства, пользовались в давние времена восточные славяне при возведении изб. В процессе трудовой деятельности человека выработаны различные способы измерения высоты недоступных предметов, расстояния до них и другие приемы измерений и вычислений.

Способы измерения больших площадей ведут свое начало от древних времен и связаны с развитием сельскохозяйственных работ. В глубокой древности были известны приемы определения площади прямоугольных участков земли, участков в виде трапеций (прямоугольных или близких к ним) и треугольников (прямоугольных или близких к ним). По некоторым источникам можно судить, что площадь трапеции вычислялась путем нахождения произведения полусуммы оснований на меньшую боковую сторону, а площадь треугольника — как половина произведения сторон, образующих наибольший угол. Если поле было произвольного вида, то его разбивали на отдельные участки такой формы, площади которых умели определять.

В глубокую древность уходят знания окружности, ее элементов и свойств круга. Существовали различные приемы определения соотношения между длиной и диаметром окружности. Такого рода знания нужны были, например, в бондарном деле при изготовлении колес, спиц к ним, дна бочек и других предметов сельскохозяйственного обихода, гончарного производства и т. д. Например, чтобы изготовить дно для бочки, ее обмеряли веревкой у основания, затем складывали веревку втрое и, таким образом, определяли ширину доски, из которой следовало вырезать дно с наименьшим количеством обрезков. Гончар также имел свои приемы измерений, однако он больше всего, по-видимому, полагался на чутье своих умелых трудовых рук, создававших на гончарном круге разного вида посуду (телà вращения).

Интересно, что многие славянские городища, относимые к I тысячелетию до н. э., имели округлую форму. Эта же округлая форма свойственна и сосудам, изготовленным вручную без помощи гончарного круга. Очевидно, преимущества круглой формы были освоены нашими предками весьма давно. В дальнейшем прогрессирует разнообразие форм

⁷ И. А. Износков. О памятниках народной математики. Казань, 1884, стр. 2.

тел вращения, к которым могут быть сведены формы посуды. Эту посуду можно разделить по группам приблизительно равной вместимости. Отсюда следует, что уже в то время зародилось понятие об измерении емкости.

Около II в. н. э. на землях Среднего Приднепровья появился гончарный круг. Изготавливавшаяся посуда постепенно стандартизировалась как в отношении формы, так и по требовавшимся размерам. Затем на посуде появился геометрический орнамент, зачастую весьма богатый и разнообразный, что указывает на развитие геометрических представлений. Предметы цилиндрической формы были в обиходе в сельском хозяйстве (каток для поля) и в быту (качалки для теста и белья).

Со временем совершенствуются способы определения объемов предметов цилиндрической формы и тел, имеющих форму куба, прямоугольного параллелепипеда. Возникает понятие конической поверхности (конические шалаши — курени).

Особенно поражают нас древние постройки, в которые народные умельцы вкладывали свои удивительные архитектурные практические познания, связанные с навыком применять в этой творческой работе геометрические построения и их свойства. Народные зодчие, пользуясь антропометрическим принципом, создавали оригинальные архитектурные приемы, отыскивая практически необходимые пропорции в создаваемых ими строительных объектах.

ГЛАВА ВТОРАЯ

МАТЕМАТИКА КИЕВСКОЙ РУСИ

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Киевской Руси

В эпоху образования Киевской Руси восточные славяне распадалась на ряд племен, которые образовали в VIII в. несколько крупных политических объединений с элементами государственности. Арабские писатели упоминают о трех политических центрах: Куябе (Куяве), Славии и Артании. Куяба представляла собой объединение южных славянских племен во главе с киевскими полянами, Славия — объединение северных групп славян во главе с новгородскими словенами и Артания, по-видимому, — объединение юго-восточной группы славянских племен. Объединение этих политических центров в IX в. под главенством Киева и положило начало могущественному древнерусскому государству — Киевской Руси. Племена восточных славян постепенно слились в единую древнерусскую народность, из которой впоследствии выделились братские восточнославянские народы — русский, украинский и белорусский.

Государственная власть в Киевской Руси была сосредоточена в руках великого князя, опиравшегося на дружину. На местах представители княжеской власти осуществляли судопроизводство, сбор пошлин и других обложений. В середине X в. была установлена система административных центров и регламентирован на этих землях сбор дани.

К IX—XI вв. относится упрочение и дальнейшее развитие феодальных отношений в Киевской Руси. Князья и бояре захватывали земли свободных крестьян-общинников (смердов). Внутри общины углублялось имущественное расслоение, и смерды-бедняки, лишившись возможности вести самостоятельное хозяйство, впадали в зависимость от землевладельцев.

В условиях феодализации общественных отношений господствующий класс стремился приспособить старые обычаи родового строя к своим классовым интересам, а также создавал новые правовые отношения, соответствовавшие новым условиям. Об этом ярко свидетельствует предпринятая в первой половине XI в. при князе Ярославе Мудром кодификация норм сложившегося к тому времени раннефеодального права («Русская Правда»).

В 988 г. в Киевской Руси было введено христианство, способствовавшее укреплению господства феодалов, упрочению государственной

власти князей и бояр. Вместе с тем крещение Руси способствовало ликвидации остатков племенной обособленности, укреплению политических связей между отдельными древнерусскими землями, дальнейшему развитию феодальных производственных отношений. Введение христианства способствовало и развитию культуры, усилению политических и культурных связей Руси с Византией, Дунайской Болгарией, западноевропейскими странами и Кавказом.

Развитие Киевской Руси в IX—XI вв. происходило в сложной международной обстановке. Ей пришлось выдержать тяжелую борьбу с кочевыми народами Востока, особенно с печенегами, осуществлявшими опустошительные набеги. В XI—XII вв. история древнерусского государства характеризуется дальнейшим развитием феодализма. Интенсивно растет крупное землевладение. Все большая масса крестьян вовлекается различными путями в сферу феодальной эксплуатации. Основными формами феодальной эксплуатации были отработочная рента (барщина) и рента продуктами (оброк).

В Киевской Руси происходил процесс развития и укрепления древнерусских городов. Киев и Новгород становились крупнейшими торгово-ремесленными центрами. Развивавшееся ремесленное производство в значительной степени определяло развитие городов — крупных центров внутренней и внешней торговли. В больших городах существовали разнообразнейшие виды ремесла: кузнечно-слесарное и оружейное дело, обработка меди, серебра и золота, литейное дело,ковка и чеканка, гончарное дело, производство стекла и ювелирных изделий и т. п. Русские мастера имели в изобилии железную руду (болотную, озерную, дерновую). В ряде отраслей производства русские ремесленники опередили западноевропейских мастеров.

В древнерусском государстве сложилась своя денежная система. С конца X в. в денежный обиход вошло серебро (гривны). Именно тогда в Древней Руси начали чеканить монету.

С развитием феодализма обострялась классовая борьба. Превращение свободных общинников в зависимых крестьян вызывало протест народных масс. Господствующий класс феодалов и государственная власть жестоко подавляли народные восстания. Одновременно укреплялась система феодального права, защищавшего собственность и власть господствующего класса.

Развитие феодальных отношений в Киевской Руси привело к образованию местных политических центров. С середины XI в. единое древнерусское государство начало дробиться. Отдельные земли постепенно обособлялись от Киева, и на территории Древней Руси возникали новые феодальные княжества, подвергавшиеся, в свою очередь, также процессу дробления. Наиболее крупными феодальными княжествами в XII—XIII вв. были Владимиро-Суздальское, Галицко-Волынское и Новгородское.

Феодальная раздробленность была обусловлена закономерным социально-экономическим процессом: расширением и укреплением феодальной собственности на землю, усилением местной землевладельческой знати, экономическим и политическим укреплением отдельных

феодалов. Поэтому раздробление древнерусского государства сопровождалось ожесточенной междоусобной борьбой князей за владение землями, селами и городами. Однако, несмотря на феодальную раздробленность, между отдельными княжествами сохранились экономические, политические и культурные связи, сохранилась у народных масс и идея единства всей Русской земли.

В противовес феодальной раздробленности, отвечавшей интересам местной феодальной знати, уже в XII—XIII вв. зарождается прогрессивная тенденция к политической централизации и объединению земель. Выразителем этой тенденции были народные массы, главным образом широкие круги ремесленно-торгового населения, которые находились в тяжелом положении из-за частых разорительных феодальных войн.

В XIII в. древнерусские княжества оказались в исключительно трудном положении. В 1237—1242 гг. они были опустошены и разграблены монголами, а также шведскими и немецкими феодалами. Древняя Русь вела упорную борьбу против поработителей. Освободительная борьба переплеталась с антифеодальной. Поэтому более дальновидные русские князья, опиравшиеся на поддержку мелких и средних служилых феодалов-дружинников и торгово-ремесленной верхушки городов, начали проявлять стремление к объединению русских земель в единое государство. Наиболее заметно эта тенденция проявилась в северо-восточной Руси, где в результате интенсивного экономического развития и роста городского населения начало укрепляться и приобретать все большее политическое значение Московское княжество. С конца XIII в. Москва превращается в крупнейший экономический центр. Со временем она становится центром складывавшейся русской народности и возглавляет борьбу русского народа с внешними врагами. Все это обусловило объединение русских земель вокруг Москвы, успешно начавшееся в XIV в.

В Киевской Руси сложилась и развивалась высокая для того времени материальная и духовная культура. Многочисленные памятники, археологические находки и письменные источники свидетельствуют о богатстве и самобытности этой культуры. О высоком уровне культуры Киевской Руси можно судить по памятникам зодчества XI—XIII вв., сохранившимся в Киеве, Новгороде, Владимире-Суздальском, Чернигове, Смоленске и других древнерусских городах. Искусные произведения древнерусского ремесла, особенно работы ювелиров (перегородчатая эмаль, чернь на серебре, скань, зернь), высокий уровень техники ремесленного производства свидетельствуют о выдающихся успехах Древней Руси в развитии материальной культуры.

Глубокие изменения в развитии древнерусской культуры связаны с введением единой письменности. По историческим сведениям, восточные славяне издавна пользовались различными системами записей. Например, существовала система записей «чертами» и «резами». С принятием христианства на Русь из Болгарии была перенесена единая система алфавита. Первоначально в X в. на Руси было два алфавита: глаголица и кириллица. Впоследствии закрепилась лишь кириллица.

Появились книги на церковно-славянском (в основном, на староболгарском) языке, близком к восточнославянскому языку, на котором были написаны древнейшие оригинальные произведения.

Во время раскопок в Новгороде археологи нашли многочисленные берестяные грамоты XI—XIII вв. Содержание этих грамот носит в большинстве случаев светский характер: отражает бытовые события, завещания, торговые сделки и т. п. Это свидетельствует о распространении письменности не только среди духовенства и в верхах общества, а и среди ремесленных, торговых и других слоев городского населения.

В конце X в. на Руси появились первые школы. В XI в. появились школы в Киевском, Полоцком и Турово-Пинском княжествах, в Новгороде и других местах. На основании летописей, относящихся к 988—1037 гг., можно предполагать о существовании в этот период школ двух типов: «высших» — для детей знати и «низших» — для подготовки рядового церковного клира. Вполне возможно, что уже тогда могли появляться и учебные пособия (они известны лишь по спискам XV в.). Это так называемые азбуковники — своеобразные энциклопедические словари средневековья, в которых кроме алфавита и молитв помещались толкования слов, а также различные мелкие статьи о правилах морали и поведения, календарь, начала арифметики и т. п.

Определенную роль в развитии просвещения сыграли монастыри, где переписывались и собирались книги. Крупнейшим из них был Киево-Печерский монастырь. Переписка книг была тогда единственным средством их распространения. Искусство писания книг было очень высоким уже в XI в. Древнейший из сохранившихся памятников древнерусской письменности — «Остромирово евангелие» (1056—1057 гг.) — является выдающимся образцом письменной культуры того времени.

В Древней Руси появились зачатки естественнонаучных представлений. В вековом опыте земледельцев и скотоводов, рыболовов, дровосеков и строителей накапливались и передавались из поколения в поколение первоначальные сведения о свойствах веществ, элементарные знания в области ботаники и зоологии, астрономии и метеорологии. Сведения по всем областям знаний преподносились читателю в религиозной оболочке. Таков же был характер средневековой науки и литературы в Византии и в Западной Европе.

Немаловажную роль в распространении исторических, этнографических знаний сыграли сочинения Мефодия Патарского и Козьмы Индикоплова. Географические сведения черпались также из хроник, летописей и из непосредственных впечатлений русских путешественников, бывавших в Византии и других странах. Как уже указывалось выше, в Древней Руси были распространены различные сведения из области естественных наук — зоологии, ботаники, минералогии, медицины. Источниками их были такие сборники, как «Шестоднев», «Палеи», вероятно, азбуковники и др. Важным источником знаний была также переводная литература (с греческого языка), появившаяся в конце IX в. в Болгарии, а несколько позже на Руси.

Одним из основных источников богословских и философских знаний в Древней Руси были сочинения византийского церковного писателя VIII в. Иоанна Дамаскина, переведенные на древнеболгарский язык уже в X в., а затем получившие распространение на Руси. В XI—XIII вв. философские познания черпались русскими людьми из многочисленных сборников, известных под названием «Пчела». Кроме всякого рода избранных кратких слов и поучений церковного характера в них помещались зачастую и отдельные изречения античных писателей и философов.

В древнерусской общественной мысли выдвигается и находит социологическое обоснование идея объединения восточного славянства в едином государстве, идея самостоятельности и независимости народа. Крупным памятником общественной мысли и литературы Киевской Руси является «Повесть временных лет». Это летописный свод, составленный в начале XII в. на основании более ранних, не дошедших до нас летописей и представляющий собой энциклопедию древнерусской жизни IX—XI вв. «Повесть временных лет» проникнута идеей единства славян, прославления могущества и силы древнерусского государства. Наиболее выдающимся произведением древнерусского поэтического творчества второй половины XII в. и всего европейского эпоса является «Слово о полку Игореве». Эти памятники впитали в себя творческую народную мудрость, любовь к своему народу, к родным местам, к родной природе и, хотя и косвенным образом, свидетельствуют об уровне различных знаний того времени.

Сложная и богатая древнерусская культура наибольшего расцвета достигла накануне татаро-монгольского нашествия. Не утратила она своего единства и в период феодальной раздробленности государства.

Древняя Русь заложила прочный фундамент для дальнейшего развития восточнославянской культуры. На основе культуры древнерусской народности развивалась культура трех братских народов — русского, украинского и белорусского.

2

Основные источники математических знаний

Основными источниками, по которым можно установить уровень математических знаний в Киевской Руси, являются некоторые письменные произведения непосредственно математического содержания и такие, в которых имеются только некоторые математические сведения, а также различные материальные памятники древнерусского зодчества, ремесла и народного творчества.

Наиболее древним литературным источником математических знаний Киевской Руси является математическое сочинение монаха Кирика «Учение им же ведати человеку числа всех лет», написанное в 1134 г. Об авторе известно немного. Он родился в 1110 г., был близок ко двору

новгородского епископа Нифонта, участвовал в написании «Первой Новгородской летописи».

Из общих письменных источников, содержащих сведения о математических знаниях, выделяется по своему значению памятник древнерусского права «Русская Правда». Отдельные сведения о математических познаниях в Киевской Руси можно почерпнуть из древнерусских памятников духовного содержания: «Книги святых тайн Еноха», «Христианской топографии», «Шестоднезов», «Толковой палеи». Славянская «Книга святых тайн Еноха» была известна на Руси по крайней мере с XIII в. Тексты «Книги Еноха» в разных редакциях изданы в книге М. И. Соколова¹. «Христианская топография» Козьмы Индикоплова написана около 547—549 гг. Точная дата славянского перевода неизвестна. Можно считать, что в Киевской Руси она появилась в период между X и XIII вв., став одним из источников компилятивной «Толковой палеи»². «Шестоднев» Иоанна-экзарха представляет собой компиляцию, составленную в X в. в Болгарии из отрывков трудов Василия Великого, Севериана Гавальского и других представителей церкви, а также частично трудов Аристотеля. «Шестоднев» был известен на Руси по крайней мере с XIII в. Установлено, что «Толковая палея» появилась на Руси в XI—XII вв., во всяком случае не позже XIII в.

Некоторые сведения об уровне математических знаний в Киевской Руси можно получить, изучая ее архитектуру и ремесло, а также народное искусство. С рассматриваемой темой тесно связаны вопросы, относящиеся к древнерусской метрологии и славянской нумерации.

3

Сочинение Кирика „Учение им же ведати человеку числа всех лет“.

Сочинение Кирика посвящено арифметико-хронологическим расчетам. Оно состоит из 27 разделов. В первых пяти разделах автор определяет число лет, месяцев, недель, дней и дневных часов, прошедших от «сотворения мира». Шестой раздел содержит «учение об индикте»³. Для определения, каким годом индикта является данный год, необходимо число лет, прошедших от «сотворения мира» до данного года включительно, разделить на 15. Остаток покажет год индикта. В седьмом разделе речь идет о «солнечном круге»⁴. Номер какого-либо года в соответствующем солнечном круге определяется по правилу

¹ М. И. Соколов. Славянская книга Еноха праведного. Тексты, латинский перевод и исследование, 1910.

² Е. К. Редиг. Христианская топография Козьмы Индикоплова по греческим и русским спискам. Ч. 1. М., 1916.

³ Счет по индиктам (пятнадцатилетиям) ведет начало от римских переписей населения, производившихся один раз в пятнадцать лет (прим. В. П. Зубова).

⁴ «Солнечный круг» — период в 28 лет, после которого новый год в юлианском календаре приходится на тот же день недели (прим. В. П. Зубова).

предыдущего раздела. Деление производится на 28. Восьмой раздел посвящен «лунному кругу»⁵. Правило для определения года аналогично правилам шестого и седьмого разделов. Деление производится на 19.

По правилам церковной хронологии требовалось знать три нумерации года от «сотворения мира»: с марта, с сентября и с января. По мартовским годам определялся високосный год, по сентябрьским — индикт, а по январским — отсчитывались месяцы и дни юлианского календаря. В своих вычислениях Кирик пользовался мартовскими, сентябрьскими и январскими годами.

В девятом разделе «Учения» автор рассказывает о «веках мира», под которыми подразумеваются тысячелетия. В разделах 10—13 определяются числа «поновлений» от начала мира — неба, земли, моря и воды. Первое из этих «поновлений» совершается, по словам Кирика, «за 30 лет», второе — «за 40 лет», третье — «за 60 лет» и четвертое — «за 70 лет». В 14-м разделе автор определяет число високосных годов от начала мира до года написания «Учения». Их было, по его утверждению, 1661. Последний — год написания сочинения. В 15-м разделе рассматривается вопрос о «великом круге» — периоде в 532 года. От начала мира до года написания сочинения прошло 12 великих кругов и 260 лет 13-го круга. По истечении великого круга лунные фазы приходятся не только на те же дни (числа месяца) юлианского календаря, но и на те же дни недели. Число 532 получается путем умножения 28 (число лет солнечного круга) на 19 (число лет лунного круга). По истечении 532 лет день пасхи (праздновавшийся в первое воскресенье после весеннего полнолуния) приходится, следовательно, на те же числа месяца, и дальнейшее передвижение его по числам календаря совершается в том же порядке, что и в предыдущем великом круге. В разделах 16—20 сообщается, сколько содержится месяцев обыкновенных, или, как их называет Кирик, «книжных» и лунных, в году, сколько недель, дней и часов в году, сколько часов в одном дне.

Все эти вычисления необходимы были Кирику для календарных расчетов, практической целью которых являлось определение дня пасхи. Однако он не доводит до конца решение задачи и предлагает сделать это «числолюбцам».

Разделы 21—27 сочинения Кирика посвящены дробным делениям часа. Автор пишет, что час делится на пять «первых дробных часа», которые в свою очередь делятся каждый на пять «вторых дробных» и т. д., вплоть до «седьмых дробных», каковых в часе 78 125. Кирик считает, что дальнейшее дробление часа невозможно. Исследователи толковали это дробное деление часа как плод отвлеченного «числолюбия», поскольку в литературе об измерении времени нет указаний о таком делении часа на части, как у Кирика. Т. И. Райнов, анализируя сочинение Кирика, пишет о том, что математические вычисления возникли на почве практи-

⁵ «Лунный круг» — период в 19 лет, после которого лунные фазы приходятся на те же дни (числа месяца) юлианского календаря (прим. В. П. Зубова).

ческого интереса к числу и мере и были в значительной степени занятием единичных «числолюбцев». В. П. Зубов предложил иное объяснение⁶. Он считает, что такое деление часа необходимо было при вычислениях, основанных на метоном цикле⁷: $19C-253L$, где C — солнечный год, и L — лунный месяц. По этому циклу можно определить солнечный год. Так, видимо, поступал Кирик, когда в 235 лунных месяцах насчитывал 6940 полных суток. При делении 6940 на 19 получалось 365 дней (суток) и в остатке 5. Этот остаток он обращал в «первые дробные» ($6 \times 5 = 30$), делил на 19 и получал одну «первую дробную» и в остатке 11. Действуя таким же путем, Кирик доходил до «шестых дробных», где получал в остатке 4. Обратив этот остаток в «седьмые дробные» (4×5) и разделив его на 19, он получил в остатке 1 и стал в тупик. Умножение на 5 не позволило продолжать операцию деления на 19. На тех же «седьмых дробных» приходилось ему останавливаться и при других операциях. Это дало повод Кирику сделать вывод «боле же не рождается от седьмых дробных».

Подобного счета ($1/5$, $1/25$ и т. д.) нет ни в западноевропейских трактатах о вычислении календаря, ни в восточных текстах. При исследовании более поздних рукописей обнаружено, что это деление часа было распространено на Руси и в последующие века. «Первые», ..., «шестые» и «седьмые дробные» упоминаются в рукописях XVII в., посвященных календарно-хронологическим вычислениям. Спустя три с половиной века после Кирика вычисление таблиц — «лунников», по которым можно было узнать пасхальные дни (пасхалии), превратилось в большую церковно-государственную проблему, так как во всей Руси не нашлось человека, способного произвести такие расчеты. Эти расчеты были необходимы, ибо в 1492 г. кончались пасхальные таблицы, унаследованные от византийской церкви⁸. Действительно, для определения лунного месяца при расчете по метоному ($6940 \frac{1}{4}$ дня), лунному ($6940 \frac{3}{4}$ дня) и девятнадцатилетнему ($6939 \frac{3}{4}$ дня) циклам необходимо было как можно точнее разделить число дней соответствующего цикла на число месяцев (235). При этом нельзя было обойтись без мелких делений часа. Иногда пользовались также заимствованными у средневековых компутистов⁹ и принятыми в Западной Европе долями часа. Русские книжки, пишет В. П. Зубов, знали не только древнее, восходящее к XII в. (если не ранее) русское деление часа на 78 125 частей. Им было известно также деление часа на 1080 частей (первому знакомству с ним, видимо, способствовали новгородско-московские еретики

⁶ В. П. Зубов. Кирик Новгородец и древнерусское деление часа. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.

⁷ Метон — промежуток времени в 6940 суток, служащий для согласования лунного месяца с солнечным годом в лунно-солнечном календаре. Предложен в 433 г. до н. э. греком Метоном.

⁸ Л. В. Черепнин. Русская метрология. Трансжелдориздат, М., 1944.

⁹ Компут — расчет празднования пасхи (пасхалия) в римской католической церкви.

XIV—XV вв.). Они знали и своеобразную систему минут ($1/60$ часа) и секунд ($1/47$ минуты), представлявшую известную аналогию (но не более) системе латинских компутов на Западе. Наконец, им была известна и наша современная система деления часа, которая тогда еще не укоренилась повсеместно ¹⁰.

Таким образом, основываясь на анализах сочинения Кирика, можно считать, что уровень его математических познаний соответствовал уровню математических знаний византийских и лучших западноевропейских вычислителей. Он владел всеми четырьмя действиями арифметики с простыми и именованными числами, знал действия с дробными числами и имел понятие о геометрической прогрессии. Интересно, что предложенное им (возможно, заимствованное у более древних русских книжников) деление часа на дробные доли, которое приводит к геометрической прогрессии со знаменателем 5, значительно удобнее деления часа, принятого западноевропейскими компутистами в более позднее время.

4

Математика в памятниках духовного содержания

Некоторые естественнонаучные, астрономические и математические сведения содержатся в «Книге святых тайн Еноха», «Христианской топографии» Козьмы Индикоплова, «Шестоднев» Иоанна-экзарха и «Толковой палее».

В «Книге святых тайн Еноха» даны своеобразная космологическая схема построения мира (описание «четвертого неба») и некоторые астрономические сведения. Т. И. Райнов излагает сущность этого описания: «Небо предполагается пространством неопределенной формы и размера, в котором движутся Солнце и Луна. Пространство это имеет «ворота», через которые солнце «проходит» и заходит. Каждые «ворота» по $61\frac{1}{4}$ стадий ¹¹. Движение Солнца представляется как езда на колеснице «по кругу» с проходом через «ворота». Упоминается, что Солнце движется по кругу не только днем, но и ночью, но о движении Солнца ночью никаких подробностей не указывается. Большое внимание обращено на годовое движение Солнца и Луны и приводится, сколько дней в году Солнце въезжает через каждые «ворота», соблюдая определенные часы дня и ночи. В книге говорится, что год делится на $365\frac{1}{4}$ дня. В то же время Солнце, восходя, пользуется 6-ю воротами. Через первые ворота оно выходит в течение 42 дней, через вторые, третьи, четвертые и пятые — на протяжении 35 дней, через шестые — 42 дней. Подсчет суммы

¹⁰ В. П. Зубов. Кирик Новгородец и древнерусское деление часа, стр. 212.

¹¹ Стадия — греческая мера длины, равная 9600 дюймам (прибл. $\frac{1}{4}$ км).

этих дней дает 364 дня продолжительности солнечного года. О недостающих $1\frac{1}{4}$ дня ничего не упоминается. Здесь возможна описка. Тут же приводится и лунный год, получаемый движением Луны через 12 «восточных врат» с востока на запад. Продолжительность лунных месяцев в днях следующая: 31, 35, 30, 30, 31, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 32. Итого в лунном году получается 373 дня, но, вероятно, и это — результат ошибок переписки, потому что в тексте указана другая, верная цифра — 354 дня. Не распространяясь о причинах расхождения продолжительности солнечного и лунного года, текст отмечает его только как факт¹².

В книге Козьмы Индикоплова «Христианская топография» также дана схема построения материального мира. Светила у него движутся по небесным кругам. Ему известно о 12 знаках зодиака («домове животни»). Он знает и о том, что в каждом из них Солнце пребывает месяц. Солнечный год у него равен $365\frac{1}{4}$ дня, а лунный — 354 дням. Далее он объясняет, что такое високосный год. Его не интересуют астрономические причины неравенства солнечных и лунных годов. Для него это только определенные календарные правила, а не количественные познания явлений природы. Такую же видимость астрономических познаний представляют взгляды Козьмы на положение Земли в пространстве. Он дает Земле опору в виде воли и могущества бога, цитируя в подтверждение этого тексты библии. Земля — нечто вроде параллелепипеда с неровной поверхностью.

В «Шестодневе» заслуживает внимания описание размеров Земли, Солнца и Луны. Длина окружности Земли — 250 000 стадий, диаметр Земли — 80 000 стадий, длина окружности Луны — около 120 000 стадий и диаметр Солнца — 50 000 стадий приведены по данным греческого ученого Эратосфена (III в. до н. э.).

Астрономические и физико-математические сведения «Толковой палеи» ограничиваются определением размеров светил. Диаметр Солнца равен 3 000 000 стадий. Размеры других небесных светил заимствованы из «Шестоднева». Составителям «Палеи» было известно также изложенное в «Христианской топографии» и в «Книге святых тайн Еноха» различие солнечного и лунного годов.

В Киевской Руси уже были сочинения, в которых достаточно приемлемо оценивалось соотношение между длиной окружности и ее диаметром (число π). Это соотношение, вычисленное из значений диаметра Земли и длины ее окружности, указанных Иоанном-экзархом, равно 3,125.

¹² Т. И. Райнов. Наука в России XI—XVII веков. Изд-во АН СССР М.—, 1940, стр. 37—38.

Математика в „Русской Правде“ (краткой и пространной редакций)

Рассматривая «Русскую Правду» с точки зрения ее значения для истории развития математических знаний на Руси, обычно изучают лишь статьи сельскохозяйственного содержания, посвященные различным вычислениям.

Из 43 статей списка «Русской Правды», изданного АН СССР в 1947 г. под редакцией Б. Д. Грекова¹³, 36 содержат сведения о денежной системе, а в 7 статьях нет никаких данных по математике. Из 121 статьи списка «Пространной Правды» 68 содержат данные о денежной системе, а в 50 статьях нет сведений, относящихся к математике. Статьи же 51—53 посвящены процентам на взятые деньги. Проценты, получаемые от денег, отданных взаймы на несколько дней, назывались месячными резами. Под такие проценты разрешалось давать не более трех гривен и на срок не более месяца (ст. 52). Проценты от денег, отдаваемых взаймы на два, три или четыре месяца, назывались третными (ст. 51), а на год или более — летными (ст. 53). В остальных статьях этого списка рассматривается межевание земель. Список, изданный АН СССР в 1940 г., содержит статьи 1—121 «Пространной Правды» в измененной редакции, а также 17 статей сельскохозяйственного содержания. Время их составления совпадает со временем составления самой «Русской Правды», т. е. конец XII или начало XIII в.

Сельскохозяйственные статьи 1* — 4* и 8* по содержанию весьма сходны с задачей Фибоначчи «о кроликах», приводящей к так называемым числам Фибоначчи. Как установлено некоторыми исследователями, денежный счет «Русской Правды» в ее древнейшей краткой редакции представляет следующую систему:

1 гривна = 20 ногатам = 25 кунам = 50 резанам.

1 ногата = 1,25 куны = 2,5 резаны.

Математические выкладки статей 4*, 6* и 17* построены на основе этого денежного счета.

Приведенные в статьях 1* — 4* вычисления представляют собой, в сущности, геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Эта же прогрессия встречается в статье о пчелах. Остальные статьи можно разделить на две группы. К первой относятся статьи 10* — 13*, в которых рассматривается определение приплода или прибытков; ко второй — статьи 5* — 7*, 9*, 14* — 17*, не содержащие необходимых данных о величине ежегодного прироста или же изложенные недостаточно ясно.

Составители сельскохозяйственных статей «Русской Правды» владели четырьмя арифметическими действиями и умели пользоваться именнованными числами. Статьи «Русской Правды» свидетельствуют о значи-

¹³ «Правда Русская». Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1947.

тельных успехах их авторов в вычислениях. Обращение с десятками и сотнями тысяч, представлявшее большие затруднения для современников Кирика, было вполне доступным для авторов статей «Русской Правды».

6

Математические знания древнерусских зодчих и ремесленников

Одним из важнейших косвенных источников, по которым можно определить уровень математических знаний в Киевской Руси, являются памятники зодчества. Зодчие Киевской Руси владели знаниями, приобретенными путем долголетнего ученичества и самостоятельного опыта, а также при помощи «книжного учения». Очевидно, что наряду со знанием свойств строительных материалов и умением соединять их в строительные конструкции зодчие обладали некоторой суммой знаний в области математики (арифметики и геометрии), необходимых для построения архитектурной формы здания и для производства строительных работ. К сожалению, никаких документов и сообщений о строительных работах в Киевской Руси не сохранилось. Единственным источником для определения уровня математических знаний древних зодчих могут служить лишь величественные здания или их фрагменты, сохранившиеся до нашего времени.

Зодчие Киевской Руси для создания архитектурной формы широко использовали геометрические построения. Наряду с соотношениями, определяемыми при помощи геометрических построений, весьма важное значение имели простейшие отношения, например: $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$, $4 : 5$, $5 : 6$ и т. д., а также золотое сечение. К. Н. Афанасьев¹⁴ использовал эти соотношения при геометрическом анализе храма св. Софии в Константинополе. Он установил, что если пренебречь построением второстепенных деталей (таких, как проемы дверей и окон), то с помощью простейших геометрических построений можно, исходя из размеров главного купола, последовательно определить все размеры храма в плане. Эти геометрические построения можно воспроизвести и на выровненной площадке, при разбивке сооружения в натуре. Высота всех помещений храма сопоставляется непосредственно, без всяких промежуточных геометрических построений, с размерностями плана.

Аддитивный ряд золотого сечения представляет собой ряд чисел, в котором каждое последующее число равно сумме двух предыдущих:

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; ...

Отношения между каждыми последующими двумя числами этого ряда составляют также некоторый ряд:

¹⁴ К. Н. Афанасьев. Пропорции в древнерусской архитектуре. М., 1943; Геометрический анализ храма св. Софии в Константинополе. — Византийский временник, 1952, т. 5.

0; 1; 0,5; 0,6667; 0,6; 0,625; 0,6154; 0,619; 0,6176; 0,6182.

n -й член которого при $n \rightarrow \infty$ стремится к величине $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618$.

С помощью числа $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ можно получить новый числовой ряд:

1; 0,618; 0,382; 0,236; 0,146; 0,090; 0,056; ...,

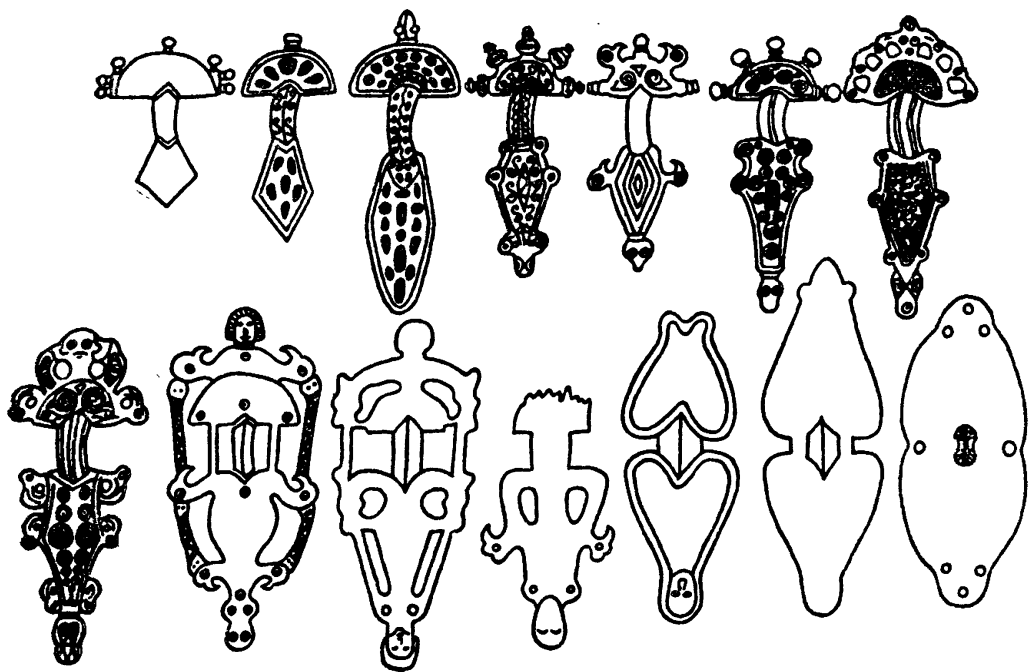
обладающий следующими свойствами: сумма каждого двух последующих членов ряда равна предыдущему члену и каждый член ряда является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.

Если квадрат со стороной, равной единице, разделить на два прямоугольника со сторонами, соответственно равными 0,382 и 0,618, то площадь второго прямоугольника будет средним геометрическим между площадью первого прямоугольника и площадью всего квадрата. Отсюда следует, что отношение площади квадрата со стороной, равной 0,382, к площади квадрата со стороной, равной 0,618, равно 0,382. Объем куба со стороной, равной 0,618, есть среднее геометрическое между объемом куба со стороной, равной единице, и объемом куба со стороной, равной 0,382. Таким образом, числа 0,618; 0,382 и 0,236 представляют собой второй, третий и четвертый члены ряда.

Эти отношения были в определенной степени известны зодчим Киевской Руси и воплощены в ряде строительных сооружений. Ими пользовались при графическом определении основных размеров здания с помощью пропорционального циркуля. В некоторых случаях эти отношения слегка варьировались. Так, при постройке церкви Покрова на Нерли под Новгородом (1165 — 1167 гг.) в качестве основного отношения было принято $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, исследование формы древнерусских сооружений выявляет значительную осведомленность их зодчих в области прикладной математики.

Анализируя размеры всех рассмотренных древнерусских памятников, К. Н. Афанасьев пришел к заключению, что, как правило, в качестве исходных размеров зодчие не задавались общими размерами храма (его длиной и шириной), а получали их в зависимости от размеров центрального «пятна» плана и приемов построения формы, используемых в каждом конкретном случае. Иначе обстоит дело с их соразмерностями. Множество примеров доказывает, что простые соотношения ширины и длины храма являлись обязательными качествами сооружения. Точно выдерживая исходный «модульный» размер построения, зодчий добивался определенных соотношений между длиной и шириной храма. Более того, в ряде случаев он добивался целочисленности и округленности данных измерения храма, что было не обязательным, а лишь желательным, так как упрощало необходимые расчеты.

Интересные данные можно получить также, исследуя строительные материалы, применявшиеся для сооружения зданий. Условия прочности, технология производства работ, сама архитектурная форма заставляли соблюдать определенные пропорции при изготовлении кирпича. Кирпич изготовлялся разных размеров. В XII в. обычными разме-



Эволюция лучевых (пальчатых) фибул.

рами были $30,8 \times 22 \times 4,4$ см. Для сооружения зданий кроме кирпича применялся также бутовый камень (например, Золотые Ворота и стены Софийского собора в Киеве, старинные черниговские церкви). Для перекрытия таких бесформенных камней более подходил тонкий кирпич большого размера (плинфа), типичный для зданий X—XI вв. Его средние размеры $40 \times 30 \times 3,5$ см.

Изменение характера конструкций повлекло за собой и изменение формы кирпича. Кирпич конца XII—XIII вв. становится все более толстым и приближается по форме к современному. Средние размеры его $30 \times 20 \times 5,5$ см. При этом ни форма зданий, ни способы производства работ не были копированием византийских образцов.

Следует полагать, что основой архитектурного творчества древнерусских зодчих была математика, в частности геометрия. Знания, которыми владели древнерусские зодчие, как и средневековые зодчие других стран, были результатом накопленного обширного опыта, не подвергавшегося анализу и теоретическому обобщению. Фиксировался этот опыт в памяти зодчих, передавался из поколения в поколение на языке геометрических построений и простейших арифметических отношений.

Таким образом, создание архитектурной формы сооружений в Киевской Руси основывалось на приемах «геометрии построения» с использованием циркуля и линейки.

Некоторыми знаниями по математике владели также древнерусские мастера различных видов ремесла. Еще в эпоху, предшествовавшую образованию Киевской Руси, гончарное производство вытеснило домаш-

нее изготовление глиняной посуды. Формы сосудов были очень разнообразны: кувшины с одной ручкой, широкие котлы с тремя ручками, широкие мисы, кубки, жбаны и др. Такой же формы глиняная посуда встречается в Киевской Руси. Техника изготовления выемчатых эмалей до IX в. свидетельствует о том, что многие формы переживали определенную эволюцию. Например, по фибулам¹⁵ и лунницам Киевщины можно проследить постепенные изменения геометрических форм. Первая фибула состоит из двух щитков (одного полукруглого, другого — ромбического), соединенных изогнутой дужкой, во второй фибуле полукруг делится на пять равных частей, в третьей — на восемь, в четвертой, пятой и шестой — на пять, в седьмой — на шесть частей. В фибулах от третьей до седьмой ромб превращается в другие прямолинейные фигуры разной формы. Остальные представляют собой сочетание различных криволинейных фигур.

Внешний вид очень многих литых предметов и инструментов, найденных в древнерусских курганах X—XIII вв., указывает на знакомство мастеров с простейшими свойствами геометрических фигур. В XII—XIII вв. широко была распространена орнаментовка различных украшений (браслеты, височные кольца) с помощью металлического зубчатого колесика. Для нанесения орнамента на браслет использовали зубчатое колесо с нарезанными 24 зубцами, а для того, чтобы изготовить такое колесо, надо было уметь разделить окружность на 24 равные части. Ручной гончарный круг X—XI вв. и гончарные клейма, которые ставили ремесленники на днищах горшков, имели определенную геометрическую форму. В подавляющем большинстве случаев это концентрические и соприкасающиеся окружности, квадрат, вписанный в квадрат. Встречается деление окружности на четыре, шесть, восемь равных частей. Редко клейма не имели определенной геометрической формы: цветков, ключ от замка и т. п.

Более простые геометрические формы имели знаки и рисунки на пряслицах, относящихся к XI—XIII вв. Древнейшие веретяные пряслицы различной формы изготавливались из глины. Часто это была усеченно-коническая форма, иногда приближалась к шару. Постепенно выработывалась наиболее рациональная форма — усеченных конусов, соединенных основаниями. Упрощенным вариантом этой формы является бочковидная. Пряслицы из красного шифера повторяют наиболее позднюю форму глиняных пряслиц — биконическую, но встречается много различных вариантов этой основной формы. Внешний диаметр шиферных пряслиц — от 10 до 25 мм, а диаметр отверстия для веретена — от 6 до 10 мм. Высота их также различна — от 4 до 12 мм. Средний вес — 16 кг.

Весьма разнообразные геометрические формы встречались в кузнечно-слесарном, оружейном и литейном деле. Примером может служить широко распространенный в то время замок и ключ к нему с загнутым концом. Части рукояток ключей имели форму цилиндра, при-

¹⁵ Фибула (лат. fibula) — металлическая застежка для одежды. Фибулы отличаются большим разнообразием и богатством форм.

мы и др. Различной, причем сложной, формы были и русские племени. Мастера-литейщики по восковой модели изготавливали арки. Восковые модели в сочетании с плоскими глиняными формами широко применялись для изготовления паникадил. Большое паникадило монтировалось из отдельных частей различной формы. Знание геометрических форм требовалось и при изготовлении различных браслетов. Основные формы геометрических тел — цилиндр, призма с различными основаниями (квадратом, треугольником и др.) были широко известны мастерам чеканки. О разнообразии форм геометрических тел, известных древнерусским мастерам золотых дел, свидетельствуют изготовленные ими изделия. Для примера можно назвать новгородские серебряные сосуды, относящиеся к XII в., образцы черни XI—XIII вв. Многие геометрические фигуры известны также мастерам других специальностей. Так, в кожевенной мастерской XII в., обнаруженной в Новгороде, найден чан формы прямоугольного параллелепипеда. Конструкция жернова Вжицкого городища, относящегося к XII—XIII вв., сходна с современными.

Таким образом, мастера Киевской Руси знали плоские фигуры — квадрат, прямоугольник, параллелограм, ромб, круг, а также геометрические тела — куб, параллелепипед, пирамиду, конус, шар и др. Они пользовались делением окружности на 6 и 24 равные части.

7

Славянская нумерация

Из непозиционных систем нумерации наиболее совершенными являются алфавитные системы. Такими были ионийская, славянская, еврейская, арабская и грузинская системы нумерации. В древних греческой и латинской нумерациях для обозначения чисел использовались буквы. Для славян неудобство пользования ими заключалось в том, что в греческих и латинских алфавитах не хватало многих знаков для обозначения славянских звуков. Греческая алфавитная система нумерации содержит 27 символов: 24 буквы греческого алфавита и 3 вышедшие из употребления старые буквы: ζ (дигамма) для числа 6, ς (коппа) для 90, σ (сампи) для 900. Тысячи обозначались теми же буквами, что и единицы, но с добавлением знака в виде запятой, который ставился слева от цифр, выражающих количество тысяч. Например: $1000 = ,\alpha$; $5000 = ,\epsilon$. Черта над буквами означала, что данные буквы являются числами. Иногда тысячи изображались без вспомогательных символов, например: $2531 = \beta\epsilon\gamma\alpha$. Десять тысяч (мириада) — М. Числовой коэффициент мог быть либо слева, либо справа, либо сверху М, иногда также в виде показателя. Например: $30000 = \nu M = M\nu = \overset{\nu}{M} = \overset{\nu}{M}$.

Система вспомогательных символов в греческой нумерации была малоразвита и для изображения больших чисел неудобна.

а	1	і	10	р	100
в	2	к	20	с	200
г	3	л	30	т	300
д	4	м	40	Ѹ	400
е	5	н	50	Ѳ	500
ѕ	6	ѣ	60	х	600
з	7	о	70	ѵ	700
н	8	п	80	ѡ	800
Ѧ	9	Ѣ	90	Ѧ	900

Обозначение единиц, десятков и сотен в славянской нумерации.

Славянская кирилловская нумерация состояла из 27 основных символов для обозначения единиц, десятков и сотен. Числа от 1 до 9, десятки и сотни обозначались по порядку славянскими буквами с некоторыми исключениями. Для обозначения 2 употреблялась буква «веди», а не «буки», так как в греческом языке нет отдельных букв «б» и «в». «Фита», стоящая в конце славянского алфавита, как и греческая «тета», означала «также». Для обозначения числа 90 была взята «червь», вместо архаического знака «коппа». Числа 6, 90 и 900 в древнерусских памятниках обозначались разными символами, тысячи — теми же буквами, что и единицы, но с добавлением значка, который ставился слева от цифр, выражающих количество тысяч. Записывали числа подряд знаками в таком порядке: тысячи, сотни, десятки и единицы.

Исключение составляли двузначные числа, так как буквы, указывающие количество второго десятка, писались после единиц. Для отличия символов, выражающих числа, от букв над ними ставили кроме черты такие знаки — титла: —, —, —, —, —. Иногда с этой же целью

буквы помещались между точками, например: · Ѧ · или :: Ѧ ::.

Если число обозначалось сложным символом, то с обеих его сторон ставили точки. Чаще точки ставили после каждого символа, но единицы и десятки не разделяли. Примеры записи чисел: 150 = ѰѢѢ ; 12 = ѢѢ ; 7002 = ѢѢѢѢ .

В записи составных чисел в древнерусских памятниках встречаются различные отклонения от общего правила.

Описанная система счисления называлась «малым числом» и не распространялась на числа больше тысяч миллионов (10^9). Существовала также система, называвшаяся обычно «великим числом» (иногда — «великим словенским»), в которую входили числа до 10^{48} ; 10^{49} . После этого говорили: «и более сего несть человеческому уму разумети».

Кроме основных алфавитных символов славянская нумерация имела весьма оригинальную систему вспомогательных символов для обозначения единиц высших разрядов. Эта система вырабатывалась постепен-

но. Ее развитие относится к сравнительно поздним эпохам. Следует считать, что символы высших разрядов были введены в конце XV в., так как в рукописях, относящихся к периоду 1494 г., они не встречались. Для обозначения разрядов тысяч употреблялись знаки $\times$, $\circ$, $\odot$, $\oplus$.

Единица 49-го разряда, или ворон, не всегда была последней единицей высшего разряда, употреблявшейся нашими предками. Например, в рукописной грамматике XVII в. Румянцевского музея, в собрании рукописей Ундольского под № 953 указывается единица 50-го разряда, т. е. десять воронов. Названия, употреблявшиеся в «малом числе», переносились на «великий» счет, но с другим смыслом.

Славянской нумерацией пользовались в течение продолжительного периода. Источники XI в. подтверждают знание также индийской нумерации. В математических рукописях XVI и XVII вв. предпочтение отдается индийской нумерации. Однако славянские цифры встречаются до конца XVII в. Так, одна половина «Юрнала об осаде Петербурга», изданного в Москве в 1702 г., была напечатана с «цифровыми числами», а другая — с «русскими».

8

Метрология

Меры возникли в процессе трудовой деятельности человека. Необходимость в мерах и измерениях у всех народов вызывалась одинаковыми причинами. Поэтому меры различных периодов и эпох часто сходны, а иногда и тождественны. Древнейшие меры очень просты. В основе общности мер длины, как нами уже указывалось, лежат движения рук или части тела человека.

Меры длины. Три основные древнерусские меры носят названия частей тела или движения рук: пядь, локоть и сажень¹⁶. Сажень равнялась трем локтям или шести пядям. На Руси употреблялись два вида пядей: малая пядь (от большого до указательного пальца), равная 19 см, и большая пядь (от большого пальца до мизинца), равная 22—23 см и называемая также четвертью. Распространенной была также «пядь с куверком». К малой пяди добавлялась еще длина двух или трех суставов указательного пальца. В первом случае получалось 27, а во втором — 31 см. Мера в 27 см — наиболее распространенный формат кирпичей XII в., книг, икон и архитектурных деталей¹⁷. Локтем называлось расстояние от конца вытянутого среднего пальца руки до локтевого сгиба, которое обычно равнялось приблизительно 46 см. В источниках XVII в. встречаются такие значения локтя: $10\frac{2}{7}$ вершка (45,72 см), $10\frac{1}{2}$ вершка (46,67 см) и $10\frac{2}{3}$ вершка (47,01 см). Такой ло-

¹⁶ Слово «сажень» по смыслу связано с движением — «досеять». С этим словом связано и другое движение — «шаг» («сяжок»).

¹⁷ В частности, ширина икон «пядниц» составляла 19 или 23 см, высота — 27—28 см. Ширина кирпичей конца XII в. 19 и длина — 27 см.

коть соответствует двум большим пядям по 23 см. Существовали также другие локти: локоть в 38 см, равный двум малым пядям, локоть в 54 см, измеряемый от плеча до большого пальца руки, и локоть в 62 см.

Первое упоминание о сажени встречается в «Слове о зачале Киево-Печерского монастыря», в котором рассказывается об Илларионе, «ископавшем себе пещерку малу — «двусаженной», т. е. выкопал себе небольшую пещеру — в две сажени. Размеры сажени столь же различны, как и локтей, из которых состоит сажень. Каждой сажени соответствует свой локоть, равный $\frac{1}{3}$ ее. До XVII в. на Руси употреблялись

следующие сажени: косая, прямая, простая, городовая, трубная, большая, дворовая, лавочная, маховая, казенная, печатная, орленая, писцовая и мерная. Однако в Киевской Руси употреблялись лишь немногие варианты сажени. Л. В. Черепнин и Б. А. Рыбаков обнаружили указание на существование в Киевской Руси также сажени в 216 см. Сходство этой русской сажени с греческой оргией объясняется элементарной простотой воспроизведения ее величины: это — расстояние от земли до концов пальцев вытянутой вверх руки человека при росте 170—172 см. Сопоставляя данные измерения ширины Керченского пролива, произведенного топографами Глеба Святославовича в 1068 г., и более древнего измерения, записанного Константином Богрянородным в 952 г., можно убедиться в том, что в Киевской Руси употреблялась также сажень в 151 см.

Более крупными мерами длины в Киевской Руси были верста и поприще. Летописцы очень часто пользовались верстой и поприщем, как равнозначными понятиями. Верста равнялась 500 саженим. В летописях для обозначения расстояний встречаются также и описательные выражения: «вержение камня», «перестрел», «день пути».

Меры площадей и емкостей. Источники, по которым можно изучить меры площадей, употреблявшиеся в Киевской Руси, отличаются большой неопределенностью показаний. В статье 9 «Пространной Правды» говорится о плуге как земельной мере, но размеры его не указываются. Далее говорится о том, что на два плуга высевалось 16 кадей ростовских и урожай, ожидаемый от этого посева, равнялся 100 копнам ржи. Отличалась ли ростовская кадь от кадей других городов, сказать трудно. В источниках XVI в. указывается, что кадь вмещает 7—10 пудов. Полагают, что древняя кадь вмещала около 14 пудов ржи. В «Русской Правде» упоминается также половник, как мера сыпучих тел. Наиболее мелкими мерами сыпучих тел были уборок и лукно, но их размеры не известны. Предполагают, что лукно вмещало около 60 фунтов, т. е. 24—25 кг. Как мера жидкости упоминается ведро (ст. 7). Считают, что древнее ведро вмещало 9—10 л воды. Единицей измерения жидкостей была также кочарга, но ее вместимость не установлена.

Меры веса. Наибольшего развития древнерусская метрология достигла в области весовых единиц. Происхождение русской гривны и ее веса убедительно раскрывается в работах И. И. Кауфмана. Он считает, что в Древней Руси были гривны весом либо в 96, либо в 48 золотников, т. е. вес их составлял или 409 (512), или 204 (256) г. Если при-

нять это мнение, то окажется, что древнерусская гривна вполне соответствует фунту (96 золотников). В других источниках этого периода (например, в договорах Олега и Игоря с Византией) упоминается также золотник, однако не совсем ясно, что имеется в виду — обозначение веса или название золотой монеты. Упоминания о пуде и берковце столь же неотчетливы, как и сведения о золотнике. Их весовое содержание в настоящее время учету не поддается. Под «пудом» даже не всегда подразумевалась определенная единица веса, иногда имелся в виду прибор для взвешивания (см., например, договор Александра Невского и новгородцев с немцами в 1257—1258 гг.).

Древнерусская денежная система. По вопросу о денежной системе в Киевской Руси существуют различные точки зрения. Рассмотрим данные, свидетельствующие об обращении металлических денег, как это представляется на основании изучения первоисточников. Основная денежная единица — гривна (сохранилась в складах XI—XIII вв.) была одновременно и весовой и денежной единицей. Возможно, что помимо весовой гривны (слиток серебра) существовала и счетная (соответствовавшая по счету определенному количеству денежных единиц). Денежными единицами (частями гривны) являлись ногата, веверица, куна, резана и векша.

В материалах, относящихся к IX в., в большом количестве встречается восточная кубическая серебряная монета.

В X в. были в обращении также различные серебряные монеты некоторых восточных и западноевропейских стран. Все это свидетельствует о значительных торговых связях Киевской Руси с другими государствами.

В конце X — начале XI в., в силу экономических условий и политических влияний, в Древней Руси появляются монеты собственной чеканки. Известны золотые и серебряные монеты киевского князя Владимира Святославовича, а также сребреники Святослава Владимировича, Ярослава Владимировича, Олега Святославовича. Образцом для монет древнерусской чеканки служили византийские и восточные арабские деньги. Чеканка собственных русских монет в X—XI вв. была временным явлением. Она продолжалась недолго и возобновилась лишь в XIV в.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАТЕМАТИКА ПЕРИОДА СОЗДАНИЯ РУССКОГО ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ГОСУДАРСТВА (XIV—XVI вв.)

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Руси в XIV—XVI вв.

Татаро-монгольское нашествие нанесло значительный ущерб производительным силам Руси и тяжело отразилось на ее экономическом развитии. Во второй половине XIV — первой половине XV в. сложились все необходимые экономические факторы, определившие процесс объединения русских земель в единое централизованное государство.

Со второй половины XIV в. начался подъем хозяйства страны. Особенно быстро развивалось земледелие, основной системой которого становилось трехполье. Развивались также животноводство и различные промыслы: рыболовство, бортничество, солеварение и др. Возрождались и интенсивно росли ремесленное производство и торговля. Был создан двигатель — водяное колесо. С конца XIV в. началось изготовление огнестрельного оружия. Крупными центрами ремесленного производства и торговли были Москва, Новгород, Тверь, Нижний Новгород. Крепли торговые связи со странами Запада и Востока.

XIV—XV века знаменовали собой дальнейший этап в развитии феодализма. Развивалось крупное феодальное землевладение, как вотчинно-боярское, так и церковно-монастырское. Возникла новая помещичья форма землевладения — за службу раздавались земельные участки «детям боярским», «слугам» и «дворянам», представлявшим собой средние и низшие слои класса феодалов.

Расширение феодального землевладения происходило, прежде всего, за счет захвата крестьянских земель, санкционируемого княжеской властью. Захват крестьянских земель и усиление эксплуатации встречали сопротивление крестьянства, выражавшееся в восстаниях, побеггах и т. п. Усиливалась и классовая борьба горожан.

В 60—70-х годах XIV в. инициативу объединения сил для борьбы с татарами взяла на себя Москва. В 1380 г. на Куликовом поле русское войско во главе с князем Дмитрием Донским нанесло поражение завоевателям. Куликовская битва укрепила силы, стремившиеся к установлению единства Руси. Ф. Энгельс, рассматривая процесс ликви-

дации феодальной раздробленности Руси, отмечал, что «в России покорение удельных князей шло рука об руку с освобождением от татарского ига»¹.

В борьбе за объединение русских земель и за обеспечение их безопасности от внешних вторжений великий московский князь опирался на поддержку средних и мелких феодалов, получавших за свою службу поместья. Объединительную политику московских князей поддерживало также городское население, видевшее в великокняжеской власти защитника от внешних врагов и внутренних междоусобиц, а также силу, которая способствовала развитию торговых связей между отдельными русскими землями. Великокняжеская власть имела поддержку и со стороны служилого боярства и церкви.

Уже к середине XV в. Московское княжество представляло собой, по выражению К. Маркса, «могущественный массив». В 1478 г. к нему были присоединены земли Великого Новгорода, затем — Твери (1485 г.), Пскова (1510 г.), Рязани (1520 г.). Во второй половине XV — начале XVI в. в основном завершилось политическое объединение русских земель вокруг Москвы и образовалось могущественное централизованное феодальное государство. Объединение русских земель укрепило международное положение Руси и усилило ее военную боеспособность. В 1480 г. было окончательно ликвидировано татарское иго, давившее Русь почти 240 лет.

В конце XV в. началась борьба за возвращение захваченных литовскими феодалами западных русских земель, завершившаяся присоединением к Руси Северщины и Смоленщины. Русское государство превратилось в крупнейшее государство Европы. На протяжении ряда столетий европейские государства, казалось, забыли о самом существовании Руси, принявшей на себя удар монгольского нашествия и тем самым защитившей европейскую культуру, и в XV в. как бы впервые увидели огромную империю, появившуюся на восточных границах Европы.

Русское централизованное государство складывалось в процессе ликвидации феодальной раздробленности как многонациональное государство. В его состав вошли многие народы, издавна связанные с русским народом общностью исторического развития (народы Севера, Поволжья и др.). Сплочение нерусских народностей вокруг Русского государства сыграло для них прогрессивную роль, так как предоставляло большие возможности для их экономического и культурного развития.

На общей основе древнерусской народности постепенно сформировались и развились три восточнославянские народности, образовавшие впоследствии три братские нации: русскую, украинскую и белорусскую. В XIV—XV вв. отчетливо определились особенности русского языка, сложилась общность территории русского народа, основой которой было междуречье Оки и Волги. В XVI в. процесс формирования русской (великорусской), украинской и белорусской народностей как отдельных этнических единиц в основном завершился.

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 21, стр. 416.

Основным занятием населения России в XVI в. оставалось земледелие, в котором прочно утвердилась паровая зерновая система с улучшенным севооборотом. Интенсивно развивались промыслы и ремесла. Складывались местные областные рынки, центром которых становились крупные города.

Крупное княжеско-боярское вотчинное землевладение дробилось, одновременно расширялось и укреплялось поместное дворянское землевладение. К середине XVI в. монастыри сосредоточили в своих руках около трети частновладельческого земельного фонда. Расширение поместного и монастырского землевладения сопровождалось резким усилением крепостничества и феодальной эксплуатации. Крестьяне фактически попадали в полную зависимость от феодала.

Развитие производительных сил в России тормозилось уже с начала XVI в. пережитками феодальной раздробленности. Говоря о России того времени, В. И. Ленин писал: «...государство распадалось на отдельные «земли», частью даже княжества, сохранявшие живые следы прежней автономии, особенности в управлении, иногда свои особые войска (местные бояре ходили на войну со своими полками), особые таможенные границы и т. д.»²

В целях сохранения своих привилегий княжеско-боярская аристократия оказывала сопротивление централизации государственной власти. Произвол боярских наместников на местах, частые заговоры и выступления боярских группировок привели к обострению классовой борьбы (восстание в Москве в 1547 г.). В такой обстановке начал свое правление царь Иван Грозный. Внутренняя и внешняя политика его была направлена, главным образом, на упрочение положения служилого дворянства и защиту его классовых интересов. С целью укрепления государства были проведены некоторые реформы: раздача дворянам новых земель, создание дворянского военного ополчения и стрелецкого войска, введение выборного земского самоуправления и др. К 1550 г. относится составление нового Судебника, направленного на дальнейшую централизацию государственного управления. С середины XVI в. правящие власти начали созывать земские соборы, развивалась система приказов.

Дальнейшая централизация Русского государства создала возможность для решения важнейших вопросов внешней политики. В результате военных действий в 1552 г. пало Казанское ханство и Среднее Поволжье вошло в состав Русского государства. В 1556 г. к нему было присоединено Астраханское ханство, вскоре добровольно присоединилась Кабарда, а в 80-х годах XVI в. в состав Русского государства вошла Западная Сибирь.

Важнейшей задачей в области внешней политики Русского государства было обеспечение безопасности западных границ и получение выхода к Балтийскому морю. Однако в Ливонской войне (1558—1583 гг.), которая велась Русским государством против ливонских и литовских завоевателей, эта цель не была достигнута.

² В. И. Л е н и н. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 153.

Внутренняя политика Ивана Грозного была направлена на подрыв экономических основ княжеско-боярской аристократии. Результатом ее и явилось проведение в 1565—1572 гг. чрезвычайных мероприятий, получивших название «опричнина». В этих условиях завершился процесс окончательного закрепощения крестьянства.

Татаро-монгольское нашествие нанесло тяжелый удар развитию не только русской экономики, но и русской культуры. Возрождение ее началось во второй половине XIV в. Характерной чертой культурного подъема этого периода было особое внимание к вопросам борьбы за независимость страны и национальное объединение под властью Москвы. Идеи этой борьбы нашли яркое отражение в летописании и литературных произведениях («Задонщина», «Сказание о Мамаевом побоище», «Житие Дмитрия Донского», «Русский хронограф» и др.).

Рост политического могущества Руси выразился и в архитектуре Москвы. В конце XV в. началось грандиозное строительство московского Кремля, Успенского, Благовещенского и Архангельского соборов, сооружались высокие каменные стены с многочисленными кремлевскими башнями, каменные и подъемные мосты. Архитектурный комплекс завершился строительством великокняжеского дворца в Кремле с его Грановитой и Золотой палатами, Красным крыльцом.

Образование Русского централизованного государства способствовало дальнейшему подъему русской культуры. Литература приобрела явно выраженный публицистический характер. Русская публицистика того времени в характерной для средневековья форме выражала идеи политического укрепления Русского государства, обосновывала руководящую роль Москвы.

Известную антифеодалную направленность имела литература русских ересей. Она состояла преимущественно из переводов восточных и европейских произведений. Некоторые из них, например «Метафизика», «Космография» и «Шестокрыл», содержали сведения по математике.

Государство стремилось поддержать создание больших литературных произведений, которые бы отражали достижения русской культуры. Первый шаг в этом направлении был сделан кружком митрополита Макария, развернувшим активную литературную деятельность. Появились и обширные летописные своды. Во второй половине XVI в. был составлен самый большой летописный свод под названием Лицевого. Он начинался со всемирной и заканчивался русской историей.

Крупнейшим событием в культурной и политической жизни страны было возникновение книгопечатания. Начало книгопечатания в России связано с именами русского первопечатника Ивана Федорова и его сподвижника Петра Мстиславца. В 1564 г. в Москве, в Печатном дворе, они выпустили в свет первую в России печатную книгу «Апостол». Однако деятельность первопечатников в Москве вскоре на некоторое время прервалась. Известно, что Федоров и Мстиславец печатали книги в Заблудове (в Белоруссии), затем Федоров поселился во Львове, а Мстиславец — в Вильно. В 1568 г. печатники Никифор Тарасиев и Андроник Тимофеев Невежа возобновили книгопечатание в Москве. Их начинания были продолжены сыновьями Тимофеева, а также другими

печатниками. Всего во второй половине XVI в. было издано около 20 печатных книг.

Несмотря на возникновение книгопечатания, в России еще продолжалось книгописание. В Новгороде было широко развито «письменное дело». Переписывали книги не только духовные, но и светские люди. Профессия «книжников» была широко распространена среди новгородских ремесленников. Профессиональную подготовку они получали, в основном, дома. Обучали их родители — профессиональные писцы. Очень редко в такую семью брали для обучения за плату посторонних людей. Переписанные книги распространялись не только в городах, но и в селах. До нас дошли рукописи «азбуковников», словарей энциклопедического типа, составленных в Новгороде в XV в. Один из них содержит толкование 350 «неудобопознаваемых» слов греческого, болгарского и иного происхождения.

В XV—XVI вв. развивалась и русская техника. Известны имена инженеров Федора Колычева (митрополита Филиппа) и Ивана Выродкова, литейщика и пушечного мастера Андрея Чохова, градостроителей Федора Конь, Бармы и Посника. Выдающимися памятниками русской архитектуры XVI в. является церковь Вознесения в с. Коломенском под Москвой, собор Василия Блаженного в Москве и др. Постройки крепостных сооружений и грандиозных храмов требовали сложных расчетов и значительных сведений по механике и математике. К этому времени относится создание пособий по геометрии и арифметике, носивших, в основном, прикладной характер.

В развитии просвещения значительную роль играли крупнейшие монастыри: Троице-Сергиевский, Кирилло-Белозерский, Волоколамский, Соловецкий и др. При монастырях были и школы. Во второй половине XVI в. в России существовало, по крайней мере, два типа школ: в одних обучали только грамоте, часослову и псалтырю, в других — грамматике, арифметике и, возможно, другим предметам. Первую русскую арифметику относят ко второй половине XVI в. Примерно к этому же времени относят и сочинение «О земном же верстании, как земля верстать», содержащее сведения по геометрии.

Однако школы того времени не давали учащимся специальных знаний, необходимых для нужд государства. Развитие же дипломатических связей требовало образованных людей, знающих иностранные языки. Поэтому молодых людей начали посылать на учебу за границу, что явилось также дополнительным стимулом к приобретению специальных знаний.

2

Математика в литературе XVI в.

С точки зрения оценки уровня математических знаний в России XVI в. представляют интерес научно-просветительские книги: «Метафизика», «Космография» и «Шестокрыл».

«Метафизика» арабского ученого ал-Газали (1059—1111 гг.) известна во многих списках. Рассмотрим некоторые ее отрывки, придер-

живаясь работы В. П. Зубова³. В первой группе отрывков дано определение тела, поверхности, линии и точки, прямого и тупого углов. Рассматривается отличие дискретного количества от непрерывного, приводятся соображения, можно ли рассматривать линию, поверхность и тело как движение точки. «Количество бывает двоякое: непрерывное и дискретное. Первое имеет четыре вида: линия, поверхность, тело, время. Линия есть длина, простирается в одну сторону; поверхность — в две стороны, тело — в три стороны». Разница между дискретным и непрерывным количеством состоит в том, «что между частями дискретного количества отсутствует нечто общее, позволяющее соединить часть с частью». Точка истолковывается как граница линии или ее сечение. Она не имеет измерений. Линия рассматривается как сечение тела или его граница. Линия, поверхность и тело получаются путем движения точки.

Вторая группа отрывков посвящена вопросу «о составе тела». Ал-Газали намечает три возможных решения вопроса: а) тело состоит из неделимых; б) тело является некоторым неделимым единством; в) тело состоит из материи и формы («телествия» и «душествия»). Оно едино по своей сущности или форме, части же существуют в нем потенциально. Ал-Газали придерживается третьей точки зрения, совпадающей с мнением Аристотеля. Против первой он выдвигает такой аргумент, как несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, а также взятое из «Физики» Аристотеля утверждение о том, что точки не могут соприкасаться своими частями, так как не имеют их, а должны сливаться полностью, т. е. суммирование точек не может создать протяженность. Ал-Газали придерживается мнения Аристотеля о возможности вечности Вселенной. Он возражает против возможности существования бесконечных тел.

Приведенные отрывки свидетельствуют о том, что в русской научно-математической литературе XV—XVI вв. употреблялись философско-математические понятия и определения. За непривычными построениями видна живая мысль, проникающая в тонкие рассуждения аристотелевой философии и античных философско-математических споров. Наличие многих списков «Метафизики» ал-Газали является доказательством того, что перевод ее не был случайным явлением.

«Космография» известна пока только в одном экземпляре, содержащемся в западнорусском сборнике XVI в. Частично она опубликована А. И. Соболевским⁴. В «Космографии», в связи с описанием строения Вселенной, приведены некоторые геометрические понятия и определения. Например, со ссылкой на первую книгу «Начал» Евклида дано определение окружности, являющееся компиляцией из нескольких искаженных переписчиками определений. Это свидетельствует о том, что составитель «Космографии» использовал сочинение Евклида

³ В. П. З у б о в. Вопросы о «неделимых» и бесконечном в древнерусском литературном памятнике XV в. — Историко-математические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950.

⁴ А. И. С о б о л е в с к и й. Переводная литература Московской Руси XIV—XVII ст. М., 1891.

в изложении других авторов. Даны также определения диаметра, центра окружности и круга. Упоминаются тупые и острые углы, деление окружности на 30 частей, каждой из них на 60 частей и каждой из 60 частей — на 60 частей.

«Шестокрыл» известен также по западнорусскому сборнику XVI в. Это астрономические таблицы с краткими указаниями об их применении. Составленные на основании теории затмений, изложенной в «Космографии», они служили для определения солнечных и лунных затмений. До нас дошла небольшая часть этих таблиц.

3

Русские математические рукописи XVI в.

Из несохранившихся до наших дней математических рукописей XIV—XV вв., о существовании которых известно по различным источникам, представляет интерес «Арифметика» из собрания Ф. Г. Баузе. Полное название ее — «Сия книга рекома по-гречески арифметика, а по-немецки алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость». В каталоге В. Каразина по поводу этой книги говорится: «Арифметика писана, сколько по всему догадываться можно, в XVI веке, и есть без сомнения старейшая из всех математических рукописей, которые находятся или найтись могут на русском языке».

В X томе «Истории государства Российского» Н. М. Карамзин упоминает о следующих рукописях этого периода:

«Книга, именуемая геометрия, или землемерие радикасом и циркулем». Написана во второй половине XVI в. По словам русского историка XVIII в. В. Н. Татищева, содержит правила измерения площадей земельных участков.

«Книга, рекома по-гречески арифметика, а по-немецки алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость». Относится к 1556 г.

«Писцовый (Иоаннов) наказ с приложением землемерных начертаний, которое видимо некто знающий геометрию с вычетами плоскостей сочинил». Написана, по утверждению Татищева, в 1556 г.

Т. И. Райнов сообщает о двух арифметических рукописях, относящихся к XVI в.:

«Счет греческих купцов, учат младых деток считать, имущих десять грань». Это таблица умножения, входившая в состав псалтыри XVI в. Издана в 1870 г.

«Сия книга глаголема по-гречески арифметика, а по-русски цифирная счетная мудрость». Рукопись бывшей Московской Духовной Академии. Относится к концу XVI в. Описана А. И. Соболевским. Известно содержание первой и второй статей; первая посвящена нумерации, вторая — сложению целых чисел.

Единственной рукописью второй половины XVI в., сохранившейся до нашего времени, является статья «О земном же верстании, как земля верстать».

В связи с отсутствием текстов арифметических рукописей XIV—XVI вв. приходится судить об уровне арифметических знаний по другим источникам. Представляет интерес «Торговая книга», составленная в 1575 или 1610 г. Полное ее заглавие таково: «Книжка описательная, како молодым людям торг вести и знати всему цену, и от части в ней описаны всяких земель товары различные, их же привозят на Русь немцы и иных земель люди торговые».

Книга состоит из трех частей. В первой части описаны единицы веса, мер и денежного счета, во второй — все иностранные товары, привозившиеся на Русь, с указанием их стоимости, в третьей — в форме «советов» рассказывается, как продавать русские товары в Западной Европе. С точки зрения арифметических сведений эта часть представляет наибольший интерес. Из «совета» № 171 следует, что составители «Торговой книги» решали задачи типа: «10 пудов стоит 20 ефимков, сколько стоит 1 пуд?» и обратные: «1 фунт стоит 5 стювертий, сколько стоит 1 пуд?». «Совет» № 175 предлагает произвести расчеты, необходимые для продажи 100 берковцев готовых канатов, если один пуд их стоит 14 алтын и 2 деньги или 23 алтына и 2 деньги, или 20 алтын при стоимости льна 4 или 2,5, или 5 рублей за берковец, чтобы не иметь при этом убытка. Интересны также «советы» № 176, 178. Предлагается по себестоимости кожи — 4 деньги и ее цене на рынке — 1 алтын и 2 деньги определить возможную стоимость провоза, чтобы не иметь убытка и накладных расходов при продаже 10 кож. Из «советов» № 191, 196, 211 следует, что составители «Торговой книги» решали задачи и такого содержания: вычислить доход при продаже 3000 кож, если себестоимость каждой из них составляет 2 алтына, а цена на рынке 3 алтына; кожи двух сортов продавали по 10 и 20 алтын. Сколько стоит 40 или 5 таких кож; по стоимости провоза и цене товара определить прибыль или убыток.

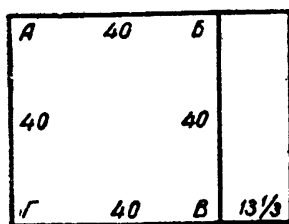
Как видно из «советов», для торгового дела необходимы были некоторые познания по арифметике, по крайней мере, владение четырьмя действиями с целыми и именованными числами, а также умение решать простейшие арифметические задачи.

Несомненно, что между арифметикой Руси XIV—XVI вв. и арифметикой XVII в. существует определенная преемственность, хотя первая качественно отлична от второй (первая была связана со счетом на линиях, а вторая была цифровой). Это подтверждается хотя бы тем, что счетом на линиях пользовались с XIII до конца XVII в. все западно-европейские народы.

4

Математика сошного письма

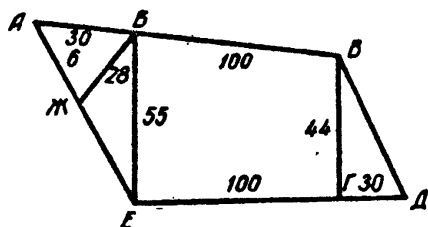
Сошным письмом называлась система поземельного податного обложения, сложившаяся, по-видимому, еще в XV в. Эта система была построена на определенном соотношении между мерами площади и чисто условными и непостоянными единицами обложения, главной из которых была «соха».



Вычисление площади прямоугольника.

Писцы, которым поручалось выяснение налогообеспособности населения, прежде всего измеряли земельные площади отдельных владений. Площадь земельных участков выражалась в четвертях, десятинах и их частях. Полученный результат превращали в сохи или части сохи. Размеры сохи не были постоянными, а зависели от качества земли. Одна соха равнялась 800 четвертям хорошей, 1000 четвертям средней или 1200 четвертям плохой земли. Наряду с сохой в качестве окладной единицы применялась выть. Выть составляла 12 четвертей хорошей, 14 четвертей средней или 16 четвертей плохой земли. Для измерения земли важное значение имел принцип «одабривания»: определенное количество четвертей средней и плохой земли приравнивалось к соответствующему количеству хорошей земли.

Сохи, четверти, трети и выти делились на части, кратные двум и трем. Соответствующие дроби обозначались словами «пол» ($\frac{1}{2}$),

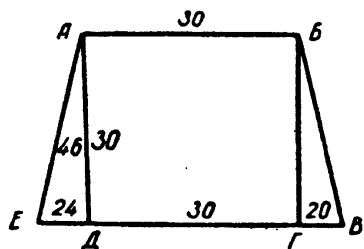


Вычисление площади четырехугольника.

«треть» ($\frac{1}{3}$), «четверть» ($\frac{1}{4}$), «полчетверти» ($\frac{1}{8}$), «полтрети» ($\frac{1}{6}$), «пол-полчетверти» ($\frac{1}{16}$) и т. д., а арифметические действия над ними приводились к соответствующим действиям над целыми числами.

Сошное письмо XVI в. излагается в рукописи «О земном же верстании, как земля верстать», которая посвящена, главным образом, правилам вычисления площадей простых земельных участков, представляющим собой семь задач на вычисление площадей геометрических фигур.

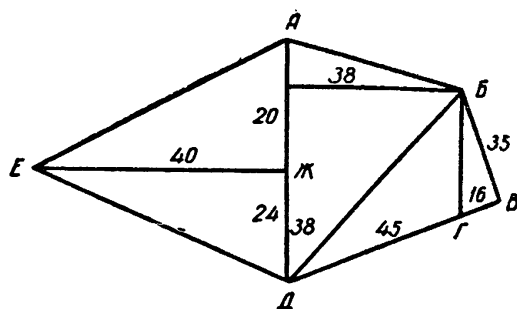
Первая задача — вычисление площади прямоугольного поля: «А коли тебе приведется сичево поле мерити. И ты мери первую сиче: с аза ж на глаголь и тут 40 сажень, мери ж с ведей на буки и також 40 сажень; и тут стало четверть севу; вымери ж сколько сажень осталось от четверти поперег, и тут стало 13 сажень с третью сажени, а вдоль 40 сажень, и тут станет три⁵ четверти, всего поля станет четверть с третью четверти севу». Таким образом, при вычислении площади прямоугольного поля его разбивали на квадраты, со стороны, равной меньшей стороне прямоугольника, и находили сумму площадей этих квадратов и площади прямоугольника — остатка, которую выражали как часть площади квадрата.



Вычисление площади трапеции.

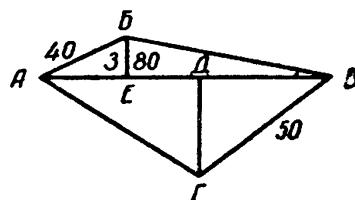
⁵ Следует читать «треть». См. рукопись Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, шифр F IX-47, л. 30.

Во второй задаче вычисляется площадь поля, имеющего форму трапеции. Из текста решения задачи следует, что площадь равнобедренной трапеции определяется как произведение полусуммы оснований на боковую сторону (так называемый хобот). В рукописи допущена ошибка: в окончательном результате вместо 2700 квадратных сажен должно быть 2025 квадратных сажен, что подтверждается другими списками рукописи.



Вычисление площади пятиугольника.

Третья задача — вычисление площади четырехугольного поля. Для вычисления площади четырехугольника его разбивали на три треугольника и четырехугольник, который рассматривали как равнобедренную трапецию. Площадь последней вычисляли так же, как и во второй задаче. Площадь треугольника определяли путем умножения половины одной стороны (основания) на другую сторону (меньшую). Надо полагать, что этот способ применялся для вычисления площади прямоугольного треугольника или близких к нему.



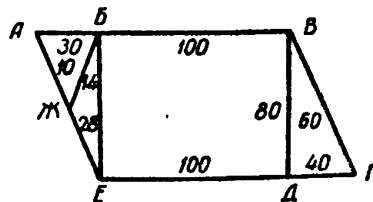
Вариант вычисления площади четырехугольника.

В четвертой задаче вычисляется площадь также четырехугольного поля. Условие и решение задачи не соответствует помещенному при ней рисунку. По рисунку же к этой задаче из рукописи F IX-47 XVII в. видно, что для вычисления площади четырехугольника его разбивали на четыре треугольника.

В пятой задаче вычисляется площадь пятиугольного поля. Как и в предыдущей задаче, рисунок не соответствует условию и решению задачи. По рисунку указанной выше рукописи можно определить, что для вычисления площади пятиугольника его разбивали на шесть треугольников. Площади треугольников вычисляли так же, как и в третьей задаче.

Шестая задача — вычисление площади трапеции. Трапецию разбивали на два треугольника и прямоугольник.

В седьмой задаче вычисляется площадь четырехугольника, сходного с четырехугольником, площадь которого была вычислена в третьей задаче. В этом случае четырехугольник разбивали на три треугольника и четырехугольник с равными противоположными сторонами. Площади этих составляющих фигур вычислялись так же, как и в предыдущих задачах. Решение седьмой задачи интересно тем, что содержит вычисления с целыми и именованными числами, отличающимися от современного вида только формой записи.



Вариант вычисления площади четырехугольника.

Таким образом, при вычислении площадей треугольника и четырехугольника измеряли длины всех их сторон.

Изучив статью «О земном же верстании...», В. В. Бобынин утверждает, что составители землемерной геометрии не имели представления о точных формулах Евклида для вычисления площадей многоугольников. Этому же мнению придерживается и Т. Райнов. Они одинаково объясняют неточность вычисления площади равносторонней трапеции путем построения равновеликого ей прямоугольника. Можно предположить, что употреблявшиеся в XVI в. на Руси приемы вычисления площадей некоторых геометрических фигур и составления различных геометрических соотношений сложились в процессе длительной хозяйственной практики.

5

Метрология

Меры длины. В XIV—XVI вв. употреблялись, в основном, те же меры длины, что и в Киевской Руси (пядь, локоть, сажень). Но наряду с ними возникали и новые. Основной мерой длины считалась сажень. Существовали различные виды сажени: великая сажень (249,46 см), сажень без чети (197,21 см), мерная (в среднем 176,4 см), косая (216,04 см), прямая (152,76 см), трубная (187,08 см) и морская (184 см) сажени. Известны даже мнемонические способы получения размеров каждой из них. Эти приемы в некоторой мере служили также для определения длины локтя (обыкновенного и так называемого смоленского).

Верста, согласно писцовому наказу 1554 г., равнялась 500 сажням, употреблялись также версты, равные 600, 650, 750 и 1000 сажням. Местные единицы мер длины отличались большим разнообразием.

В источниках этого периода встречается еще одна единица измерения длины — аршин. Как единица длины аршин известен с XVI в. Его делили сначала на пяди (4) и четверти (16), затем на четверти и вершки. В XVII в. появились «печатные», или государственные, аршины. Грамотами 1656 и 1681 гг. предписывалось иметь железные аршины «за печатью» и хранить их в торговом дворе для проезжих торговых людей.

Меры площадей. Наиболее ценным источником для изучения мер площадей является сочинение «О земном же верстании, как земля верстать». Для измерения площадей пользовались сохой, вытью, четвертью и десятиной. Как уже указывалось выше, все эти единицы делились на части, кратные двум и трем. Согласно писцовому наказу 1554 г., десятина составляла в длину и ширину по 50 сажен, а по уставной грамоте 1688 г. — в длину 80 и ширину — 40 сажен. Обычная десятина имела вид прямоугольника со сторонами 80 и 30 сажен.

Вопрос о единицах измерения земли не был делом одних землемеров (писцов). Русский публицист XVI в. Ермолай-Еразм в записке

«Благохотящим царем правительница и земледелие» писал, что неправильное измерение земли приводило к большим налогам. Он считал, что для правильного обложения необходимо землю измерять «поприщами», а не четвертями, так как «поприще» — мера квадратная и ею легче измерять площадь⁶.

Меры сыпучих тел. В качестве основной меры сыпучих тел в XIV—XVI вв. оставалась старая, употреблявшаяся в Киевской Руси единица — кадь, которую иногда называли бочкой или оковом. Она содержала в среднем 14 пудов и делилась на 2 половника, 4 четверти и 8 осьмин. Существовали также различные местные единицы измерения объема. Из них представляют интерес прежде всего меры, фигурирующие в новгородских писцовых книгах. Это короб, корец и ласт. Последний вмещал 120 пудов зерна. В Двинской земле был в обиходе пуз — бочка, вмещавшая около 10 пудов зерна или соли, в Пскове — зобница (делилась на 2 позобенья или 4 четверки), в Белоозере с XV в. овес и соль измеряли мехами. В источниках XIV—XVI вв. встречается много названий мер чисто бытовых: горсть или пригоршня, блюдо, горнец, воз, вьюки и др. В берестяных грамотах, найденных при раскопках в 1954 г., упоминаются «улки» и «дежи», которыми меряли зерно.

Меры жидкостей. В источниках XIV—XVI вв. упоминаются такие меры жидкостей: бочка, насадка, ведро и корец. По новгородским писцовым книгам, одна бочка равнялась 10 ведрам или 4 насадкам. По памятнику XV в. «Псковская Судная Грамота», бочка делилась на ведра и корцы, но об этом более точных сведений нет.

Меры веса. Основными мерами веса являлись большая и малая гривенки, соответствующие древнерусским гривнам Киевской Руси (96 и 48 золотников). В рукописях XIV—XVI вв. упоминаются и другие единицы веса (берковец, контарь, пуд, золотник, почка, пирог).

Денежная система. В берестяной грамоте № 1, относящейся к первой четверти XV в., указывается, что феодальные повинности выплачивались в белках и натурой. Счет на белки в те времена был довольно распространенным. Современный русский денежный счет, построенный на основе деления рубля на сто копеек, восходит к XV в. Он сложился из сочетания московской и новгородской денежных систем:

московская		новгородская	
1 рубль	= 200 деньгам	1 рубль	= 216 деньгам
1 полтина	= 100 деньгам	1 полтина	= 108 деньгам
1 гривна	= 20 деньгам	1 гривна	= 14 деньгам
1 алтын	= 6 деньгам		

Из указанных денежных единиц до XVIII в. только деньга была серебряной чеканной монетой, рубль, полтина и гривна были лишь счетными единицами.

Возникновение московской и новгородской денежных систем относится к концу XIV— началу XV в. Только при Иване III удельные князья лишались права выпуска собственных чеканных денег.

⁶ Поприще — квадрат со стороной, равной 1000 саженим.

Чеканка монеты стала привилегией московского великого князя. Он санкционировал и распространил на все государство обращение монет обоих типов — «московок» и «новгородок». Для первых была определена норма выпуска 260 единиц из малой гривеньки, для вторых — 520. Было также установлено прочное соотношение между московским и новгородским денежным счетом. Московская деньга равнялась половине новгородской.

□

Итак, развитие математики на Руси в XIV—XVI вв. шло по линии теоретических изысканий и накопления практических сведений. Рассмотрение теоретических вопросов было связано с попыткой вникать в строение Вселенной, с составлением календаря, с абстрагированием геометрических свойств и форм различных фигур и тел, с необходимостью обоснования некоторых математических действий, с трактовкой отдельных философских проблем, например понятия бесконечности, и т. п. Такого рода вопросы освещались в древнерусских памятниках духовного содержания периода Киевской Руси, а также в научно-математической литературе XIV—XVI вв., например в переводе «Метафизики» ал-Газали и др. На Руси были известны Аристотель, Евклид и некоторые другие древнегреческие ученые. В литературе излагались не только отдельные математические понятия и результаты, но и некоторые вопросы методологии математики.

Практические приемы в математике появлялись в связи с запросами производства. Учет земель и обложение их налогами привело к созданию пособий по сошному письму, содержащих некоторые сведения по геометрии. Сущность этих сведений заключается, главным образом, в вычислении площадей простых плоских геометрических фигур — треугольников, прямоугольников и трапеций. При вычислении площадей произвольных многоугольников их разбивали на более простые фигуры, способы определения площадей которых были известны. Развитие внутренней и внешней торговли требовало создания пособий по арифметике для ведения торгового дела, а также общегосударственной метрологии.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МАТЕМАТИКА НА УКРАИНЕ, В БЕЛОРУССИИ И ЛИТВЕ В XIV — XVII ВВ.

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Украины и Белоруссии в XIV — XVII вв.

Татаро-монгольское нашествие на северо-восточные и южные русские земли облегчило литовским князьям захват западных областей Белоруссии. В начале XIV в. Белоруссия оказалась в составе Литовского княжества. В 1345—1377 гг. литовские феодалы захватили также значительную часть украинских земель — Киевщину, Чернигово-Северщину, Волинь и Подолию. В 1377 г. польские феодалы захватили часть Западной Волини, в 1387 г. — Галицию, а в 30-х годах XV в. — Западную Подолию. Продолжало оставаться под властью венгерских королей Закарпатье, в состав Молдавского княжества была включена Буковина.

На захваченных иноземцами землях усилилась эксплуатация и грабеж народных масс — крестьян и городской бедноты — со стороны своих и чужих феодалов, ускорился процесс закрепощения крестьянства, составлявшего основную часть украинского и белорусского населения. Трудовой народ подвергался не только социальному, но и национальному и религиозному гнету. Стремясь укрепить свое владычество на Украине и в Белоруссии и приостановить все усиливавшееся тяготение украинского и белорусского населения к Московскому княжеству, литовские феодалы заключили с польскими панам в 1385 г. Кревскую унию.

Иноземное господство задерживало экономическое развитие Украины и Белоруссии, но не могло его остановить. Производительные силы в этот период на Украине и в Белоруссии развивались в условиях феодального строя, в основе которого лежало натуральное хозяйство. Во второй половине XIV, в XV и в первой половине XVI в. усилился процесс отделения ремесла от сельского хозяйства. Ремесленники составляли уже значительную часть городского населения Украины и Белоруссии. Для защиты своих интересов они объединялись в цехи.

Растущие города предъявляли все больший спрос на сельскохозяйственные продукты. В XV—XVI вв., наряду с городскими рынками, существовали сельские торжки, на которых товары скупались посредниками-купцами из ближайших городов. В XVI в. увеличился вывоз из

Украины на Запад сельскохозяйственных продуктов и ввоз западноевропейских товаров. Большое значение для развития торговли Белоруссии с Западом имело ослабление, а затем и подчинение Польше Тевтонского ордена, долгое время изолировавшего Польское и Литовское государства от Балтийского моря.

На Украине и в Белоруссии в XIV—XVI вв. применялись все три формы феодальной ренты: барщина, оброк сельскохозяйственными продуктами и денежная рента. Денежная рента, хотя и получила значительное развитие в ряде мест, при сохранившемся господстве феодального натурального хозяйства не была господствующей формой эксплуатации крестьян.

Усиление феодальной эксплуатации вызывало обострение классовой борьбы. Борьба крестьян против феодально-крепостнического гнета принимала разнообразные формы: они отказывались выполнять феодальные повинности, уходили в менее заселенные места, убивали феодалов и поднимали крупные восстания, охватывавшие большую территорию. Часто, спасаясь от иноземных захватчиков, украинские и белорусские крестьяне уходили на территорию Русского государства. Белорусские крестьяне убегали и на Украину, где в XV—XVI вв. из беглых украинских и белорусских крестьян начало складываться казачество.

Огромное влияние на исторические судьбы украинского и белорусского народов оказало Русское государство, с конца XV в. крупнейшее и наиболее экономически развитое государство Восточной Европы. Московский князь считал себя «государем всея Руси», в том числе Украины и Белоруссии, и ставил своей задачей воссоединение их с Русским государством, что отвечало жизненным интересам и стремлениям самых широких кругов населения Украины и Белоруссии. К Русскому государству тяготела и часть православных феодалов Украины и Белоруссии, недовольных усилением литовской феодальной знати. В 1500 г. на сторону Москвы перешли чернигово-северские князья, владевшие Черниговом, Стародубом, Гомелем, Любичем, Новгородом-Северским и Рылском «со многими волостями». Эти земли вошли в состав Русского государства в результате событий 1500—1503 гг. В 1514 г. русские освободили Смоленск, имевший большое экономическое и стратегическое значение, а в 50-х годах XVI в. предприняли несколько походов в Крым, в которых принимали участие украинские казаки.

К середине XVI в. для Русского государства назрела необходимость в выходе к берегам Балтийского моря. Во время Ливонской войны русские войска овладели древнейшим русским городом Полоцком (1563 г.), очистили от захватчиков значительную часть белорусских земель и приблизились к Минску. Русским войскам оказывали содействие народные массы Белоруссии. Польские магнаты стремились использовать военные поражения литовских феодалов в борьбе с Русским государством для усиления своего политического влияния в Литовском государстве. В 1569 г. на совместном сейме польских и литовских феодалов в Люблине было заключено новое соглашение об унии, по которому Литва соединялась с Польшей в одно государство — Речь Посполитую, сохраняя в рамках этого государства формальную авто-

номию. Белоруссия оставалась в составе Литовского княжества, а Украина и так называемое Подляшье (белорусские земли по Бугу) вошли в состав Польши. Ливонская война закончилась перемирием между Россией и Речью Посполитой (на 10 лет). В составе Речи Посполитой осталась часть белорусских земель.

Господство феодалов Речи Посполитой на Украине и Белоруссии характеризуется расширением крупного феодального землевладения, сопровождавшегося усилением эксплуатации крестьянства. Основная масса городского населения находилась под двойным гнетом — феодалов Речи Посполитой и богатой городской знати.

Нарастание антикрепостнической национально-освободительной борьбы вызвало новые действия польских магнатов и шляхты, направленные на идеологическое и политическое укрепление их власти над народными массами Украины и Белоруссии. Они рассчитывали на помощь католической церкви. Народные массы стойко боролись против насаждения католицизма, усиления социального и национального гнета. Поэтому польские феодалы совместно с Ватиканом выдвинули проект унии православной и католической церквей, по которому православная церковь подчинялась римскому папе при сохранении православных обрядов и старославянского языка в богослужении. Уния была заключена в 1596 г.

Процесс принятия унии и католичества затянулся почти на два столетия. Городское население вело с униатами открытую борьбу. Крестьяне, чувствуя, что путем унии им хотят навязать католическую веру и этим еще сильнее закрепостить их и ослабить братские связи с русским народом, ответили грозными восстаниями.

Наибольшего размаха и остроты борьба украинского народа против гнета панской Польши достигла в годы освободительной войны (1648—1654 гг.) под руководством Богдана Хмельницкого. Главной и решающей силой освободительной войны являлось крестьянство, боровшееся прежде всего за уничтожение феодально-крепостнического гнета как польских, так и украинских феодалов. Вместе с крестьянством на борьбу поднялись широкие массы казачества и городских жителей, а также казачья старшина и часть украинской, особенно мелкой, шляхты.

В освободительной войне украинского народа тесно переплеталась борьба народных масс против феодализма вообще с борьбой за освобождение от ига панской Польши и за воссоединение с братским русским народом в едином Русском государстве. В 1654 г. в г. Переяславе было провозглашено воссоединение Украины с Россией, сыгравшее большую прогрессивную роль в дальнейшем политическом, экономическом и культурном развитии украинского и русского народов, в дальнейшем укреплении их братских связей. Воссоединение Украины с Россией имело и большое международное значение, так как разрушило агрессивные планы султанской Турции и шляхетской Польши, стремившихся поработить Украину.

В Белоруссии посланцы Богдана Хмельницкого призывали народ к совместной борьбе против польских магнатов и шляхты. Летом 1648 г. во многих местах ее начались крестьянские волнения. Вскоре восстание

охватило почти всю территорию Белоруссии. Однако освободительная борьба белорусского народа, которую он вел в тесном союзе с братским украинским народом, в силу ряда обстоятельств, не привела тогда к освобождению его от крепостнического и национального гнета западных завоевателей. В состав Российского государства Белоруссия вошла лишь в последней трети XVIII в.

Несмотря на гнет со стороны иноземных завоевателей, культура украинского и белорусского народов продолжала развиваться. Органически связанная с русской культурой, она имела и свои специфические черты.

К XV и XVI вв. относится зарождение оригинальной украинской и белорусской литературы («Киево-Печерский патерик», «Хождение Даниила»). Летописи «Краткая Киевская», «Баркулабовская», а также так называемые литовские, или западнорусские, продолжали традиции феодального летописания Древней Руси. Особенно развивалось летописное дело в период подъема освободительной борьбы украинского народа в XVI—XVII вв.

Ярким свидетельством культурного развития Украины в рассматриваемый период может служить ужгородский «Полуустав» XVI в., хранящийся в библиотеке Ужгородского университета. Он содержит не только духовные проповеди, но и некоторые календарные вычисления. Впервые этот памятник украинской культуры исследовал украинский этнограф Филарет Колесса в 1925 г. Как выяснено, «Полуустав» написан в Киеве, а его ужгородская рукопись переписана в Закарпатье из Киевского или близкого к нему первоисточника.

В связи с борьбой против Брестской унии на Украине и в Белоруссии важное значение приобрела полемическая литература. Заслуживает внимания сочинение «Апокрипис албо отповедь», изданное под псевдонимом Христофора Филалета в 1597 г. Это был ответ на выступление ярого защитника унии иезуита Петра Скарги. Прогрессивную роль в полемической литературе сыграли послания украинского монаха Ивана из Вишни, деятельность которого описал Иван Франко («Иван Вишенский»).

Много было сделано также в этот период для развития живописи. Сохраняя в значительной мере церковный характер ее, живописцы Украины и Белоруссии проявляли все больший интерес к изображению в своих произведениях народного быта, к зарисовке портретов. В книжной миниатюре появились жанровые мотивы. Прежний плетеный орнамент смешивался с орнаментом, изображающим животных и птиц. Благоприятно отразилось на развитии украинской и белорусской живописи влияние московского и новгородского живописного дела.

Особенно важное значение для развития культуры, просвещения, образования на Украине и в Белоруссии имело книгопечатное дело. Первые книги на славянском языке были изданы в 1491 г. в Кракове горным инженером-механиком Швейпольтом Фиолем (1460—1525). Первая славянорусская типография была основана в г. Вильно в 20-х годах XVI в. Георгием Лукичом Скориной (1485—1550). Скорина родился в Полоцке в купеческой семье. Свою издательскую деятельность он

начал в 1517 г. в Праге, где издал «Псалтырь» (как школьный учебник) и библию в переводе на белорусский язык. Известно, что Скорина был доктором Падуанского университета, с 1530 г. работал врачом в Кенигсберге, а затем вернулся в Прагу, где основал большой по тому времени ботанический сад.

Выдающуюся роль в развитии книгопечатания сыграли Иван Федоров и его ближайший сподвижник Петр Мстиславец. Они начали книгопечатное дело в Москве в 1556 г. Выше отмечалось, что в 1564 г. Федоров и Мстиславец издали книгу «Апостол», являющуюся образцом полиграфической техники того времени. Как известно, им пришлось уехать из Москвы в связи с обвинением их в ереси. В Заблудове (Белоруссия) на средства магната Г. А. Ходкевича они также создали типографию, где напечатали «Книгу, зовомую Евангелие учительное». Затем П. Мстиславец уехал в Вильно, где организовал новую типографию. Осенью 1572 г. И. Федоров перебазировал свою типографию из Заблудова во Львов. Интересно, что уже в 1574 г. он напечатал «Апостол» и «Букварь», или «Грамматикию». «Апостол» был первой печатной книгой на Украине, «Букварь» — первым учебником для школ на родном языке и вообще первым учебным руководством на славянорусском языке¹. Позже «Букварь» Федорова перепечатывался в Вильно (в 1618 и 1621 гг.). В 1575 г. И. Федоров перешел на службу к князю Острожскому и организовал типографию в Остроге, где в 1580—1581 гг. напечатал библию на церковнославянском языке.

В 1616 г. начинают издаваться книги в Киево-Печерском монастыре. Киевская типография печатала книги не только духовного, но и светского содержания. Так, в 1627 г. был издан в Киеве «Лексикон славенороссийский и имен толкований» Памвы Берынды — энциклопедическое для своего времени произведение. Эта книга долгое время служила в школах в качестве учебного пособия. Типографии в XVII в. были основаны также в Новгороде-Северском и Чернигове.

2

Математика в произведениях архитектуры и ремесла

Как и в Киевской Руси, на Украине и в Белоруссии XIV—XVII вв. математические знания распространялись не только школьным, но и, пожалуй, в большей степени, иными путями. Действительно, деятельность ремесленников, мануфактурные производства, памятники архитектуры, — все это в большей или меньшей степени предполагает знакомство с арифметикой и геометрией.

В течение XIV—XVII вв. на Украине, несмотря на тяжелые условия, в которые было поставлено ее население (социальный гнет чуже-

¹ Единственный известный в настоящее время экземпляр находится в библиотеке Гарвардского университета (США).

земных захватчиков, постоянная угроза татарского нашествия), техника и архитектура непрерывно развивались.

Начало возрождения украинской архитектуры, пришедшей в упадок после татарского нашествия XIII в., относится к концу XIV в. В это время в Киеве восстанавливаются старейшие памятники церковной архитектуры — Софийский собор, Михайловский, Златоверхий, Киево-Печерский и Выдубецкий монастыри. На западных украинских землях, менее пострадавших от татарского нашествия, особенно в Галиции, а также в Белоруссии возобновляется строительство новых сооружений, большей частью укреплений. В качестве строительного материала выступает дерево и, значительно реже, камень. Строились эти оборонительные сооружения местными мастерами, поэтому приемы планировки и архитектурно-конструктивные принципы совершенно не похожи на применявшиеся в соседних странах — Польше, Германии, Венгрии. Очень характерным является строгая геометричность образа: правильный цилиндр крепостной башни — Белая вежа в Каменце Белорусском (конец XIII в.), прямоугольные объемы надвратной башни Луцкого замка (XIII—XVI вв.), сочетания прямых и кривых линий в объемах Хотинского замка (XIII—XVI вв.), кладка которого к тому же украшена геометрическим орнаментом, напоминающим традиционный украинский орнамент.

Подобное явление наблюдается и в культовой архитектуре, в которой также проявилась тенденция к максимальному упрощению форм. Как традиционные четырех- и шестистолпные храмы, повторяющие в основных чертах архитектуру периода феодальной раздробленности, так и круглые храмы, типы которых заимствованы на Западе, имеют очень простые и точные геометрические формы. Построение последних немыслимо без глубоких геометрических познаний: построения прямоугольных фигур, деления угла и окружности на равные части, применения пропорционального деления, знакомства с элементами стереометрии. Кроме того, отдельные здания достигали крупных размеров, и их купольные перекрытия могли быть выполнены при глубоком знании геометрических соотношений.

Приблизительно с середины XVI в. ощущается все большее влияние западноевропейской архитектуры. Мастера украинского и белорусского происхождения, работавшие по заказам городских общин и феодалов, обучались зачастую в Италии. С другой стороны, в архитектурном и строительном деле на Украине некоторое участие принимали иностранные мастера (архитекторы, строители) — итальянцы, немцы, поляки, чехи. Однако и в том, и в другом случаях национальная культура была настолько сильной, что в архитектурных сооружениях отчетливо выделялись черты, присущие местному строительству. Увеличивалась декоративность зданий, и вместе с тем уточнялся геометрический расчет украшений. То же самое можно сказать и об усложнении плана комплексов архитектурных сооружений. Характерным примером может служить замок князей Острожских в Старом селе под Львовом (1584—1589 гг.), фигурный аттик башен которого является усложненным и очень точно выполненным геометрическим орнаментом. Церковь Успе-

ния Львовского Ставропигийского братства (1598—1630 гг.), построенная на Русской улице, состоит из трех частей: собственно церкви, часовни трех святителей (1578 г.) и колокольни Корнякта (1578 г.). Она представляет собой едва ли не энциклопедию геометрических познаний украинского народа. Ее простые геометрические формы и сейчас производят неизгладимое впечатление. В строительстве этого комплекса зданий значительную материальную помощь оказали Москва и Молдавия.

На восточных украинских землях также строились различные культовые здания, например Ильинская церковь (1653 г.) в Субботове, построенная Богданом Хмельницким как его личная усыпальница. Эта церковь является одним из первых произведений украинского барокко. Она отличается своими фасадами с высокими фронтонами сложного и точного членения. Усложненные формы Николаевского военного собора в Киеве (1690—1696 гг.), построенного русским мастером Старовым, использовавшим элементы украинского барокко, свидетельствуют о весьма высоких геометрических познаниях строителей (интересно, что именно в Киеве в 1707 г. был прочтен Феофаном Прокоповичем первый в России серьезный курс геометрии).

Анализ произведений староукраинского ремесла показывает, что ремесленники того времени также обладали определенными математическими знаниями. Очень старым является литье колокольной бронзы, требующее, как известно, весьма точного сохранения пропорций ее основных составных частей — меди и олова — для предупреждения явления ликвации. Так, колокол Львовского собора св. Юра был отлит в 1341 г. Местными мастерами были отлиты также колокола киевских и черниговских соборов и Киево-Печерского монастыря.

К XVI в. относится начало на украинских землях литья пушек и производства пороха. Широко было распространено ювелирное дело, также требующее знания основ пропорционального деления. Как указывает И. П. Крипьякевич, во времена Богдана Хмельницкого на Украине производилась значительная часть оружия и пороха. Все казачьи полки имели войсковые мастерские, в которых пушкарки и сабельники изготовляли и ремонтировали оружие. Самые большие мастерские были в запорожском войске². Впрочем, значительную помощь оружием, особенно после 1654 г., оказывала Украине Россия.

В XVI в. на Украине и в Белоруссии строятся ветряные и водяные мельницы для помола зерна, а также для бумагоделательных, камнерезальных, дереворезальных и других работ. Мельницами в то время нередко называли любые мануфактуры, имевшие водяной или ветряной двигатель. Техника мельничного дела и изобретение различных устройств и механизмов требовали соответствующих знаний в области механики и математики. Поскольку мельничное производство было довольно широко распространено, то этими знаниями обладали не одиночки, а значительное число крестьян. Например, в переписных книгах 1666 г. сообщается,

² И. П. Крипьякевич. Богдан Хмельницкий. Вид-во АН УРСР, К., 1954, стор. 217.

что на Украине в каждом из уездов: Батурином, Березнянском, Борзнянском, Конотопском, Кропивенском, Менском, Нежинском, Новомилинском, Печанском, Сиволозском, Сосницком — насчитывалось много мельниц, в некоторых из них до 12, 17 и 21, а в Сосницком уезде — даже 27 мельниц.

Некоторое значение в распространении ремесла, особенно в городах Украины и Белоруссии, в XV и XVI вв. имело производственно-ремесленное обучение. Срок обучения был довольно значительным — от 3 до 7 лет при постоянной эксплуатации учеников. Обучали ремеслу путем индивидуального ученичества, причем в указанный срок мастер должен был передать ученику все тайны ремесла, в том числе и элементарные математические расчеты. Таким образом, при производственно-ремесленном обучении ученики получали некоторые знания по арифметике и практической геометрии, в зависимости от рода ремесла.

Итак, на основании различных косвенных сведений о развитии математических знаний на Украине и в Белоруссии в XIV—XVII вв. можно сделать вывод, что уровень их определялся требованиями производственной практики. Архитектурные памятники, развитие ремесла, строительство мельниц с различными механизмами, производство бронзы, стекла, литейное дело, развитие торговых сношений, печатные источники — все это красноречиво говорит о значительном запасе математических знаний у украинского и белорусского народов в рассматриваемый период.

3

Обучение математике в школах

В конце XIII — начале XIV в. роль основных центров культуры продолжали играть монастыри и церкви. При них сохранялись книги (при Киевском Софийском соборе, Киево-Печерском монастыре и других крупных церквях и монастырях существовали целые библиотеки), при них же были и школы, в которых дети получали элементарные познания в чтении, письме и счете.

Письменных источников о преподавании математики в школах того времени у нас очень мало. Однако на основании анализа косвенных документов можно установить, что учащиеся школ получали первоначальные сведения о нумерации, сложении и вычитании именованных чисел и, возможно, о некоторых простых дробях. Подобное положение было и в иных европейских школах, в частности в польских. В некоторых монастырских школах, очевидно, сообщались также начатки практической геометрии (землемерие, в полном смысле этого слова) и некоторые сведения о пасхалии. В постановлениях московского Стоглавого собора об открытии школ во всех городах отмечалось: «Прежде всего в Российском царстве на Москве и в Великом Новгороде и по иным городам многия училища бывали, грамоте и писати и пети и чести учили и потому тогда грамоте и писати и пети в чести гораздых было много, но певцы

и чтецы и добры писцы славны были по всей земли и до днесь»³. Очевидно, что это замечание отцов Стоглавого собора относится именно к последним временам существования Киевской Руси и наследовавших ее княжеств XIII—XIV вв. В списке обязательных познаний образованного человека счет был поставлен на четвертом месте, сразу же после чтения, письма и пения, необходимых в первую очередь для церковного обихода.

Древнейшая сеть элементарного образования, оформившаяся в виде приходских и монастырских школ, существовала на Украине вплоть до XVIII в. Подробные сведения о церковных школах на Левобережной (Слободской) Украине XVII в. по архивным материалам приводит академик Д. И. Багалей в первом томе «Истории Харькова»⁴.

Общественное и культурное развитие Украины, Белоруссии и Литвы, а в определенной степени и Западной Руси (Смоленщина) в XV—XVII вв. характеризуется многими общими чертами, определяемыми общностью их исторической судьбы. Захват западнорусских земель литовскими феодалами, уния Польши и Литвы, сначала на условиях равноправности, а затем подчинение шляхетско-магнатской Польшей западноукраинских земель и, наконец, фактическая аннексия Литвы вместе с Белоруссией и Западной Русью, — все это создавало сложное переплетение политических, религиозных и общественно-культурных влияний. Политическое и религиозное неравноправие коренного населения аннексированных областей, с одной стороны, усугубляло разрыв между ним и завоевателями, а с другой — заставляло украинцев, белоруссов и литовцев искать связей между собой, даже независимо от их религиозной принадлежности. Большую притягательную роль играло для них Московское государство, родственное по происхождению, по религии и по быту.

Выше были рассмотрены некоторые косвенные источники, по которым можно определить уровень математических знаний в изучаемый период, — архитектура, ремесло и обмен. Этот уровень, за немногими исключениями, определялся деятельностью элементарных церковных школ, наиболее распространенных и наиболее доступных. В XV в. начали появляться конфессиональные школы, которые условно можно назвать школами высшего и среднего образования, помня, однако, что эти современные термины не применимы к явлениям того времени, ибо школа XV—XVII, а иногда даже XVIII в. зачастую объединяла под одной кровлей две, а то и три образовательные ступени.

Высшее образование давали в польско-литовском государстве три католические академии, значительно позже преобразованные в университеты, — Краковская (осн. в 1400 г.), Замойская (осн. в 1595 г.) и Виленская (осн. в 1578 г.). В 1639 г. на базе слияния двух школ, школы Киево-богоявленского братства и школы Киево-Печерской лавры, была основана Киево-Могилянская коллегия — учебное заведение высшего

³ Стоглав, 1862, стр. 121.

⁴ Д. И. Багалей и Д. П. Миллер. История города Харькова за 259 лет его существования. Т. 1. Харьков, 1905, стр. 390—391.

типа, получившее впоследствии, в 1701 г., название академии. Она состояла из шести классов: пяти одногодичных и шестого двухгодичного. В первых пяти классах преподавали грамматику, синтаксис, поэтику и языки — славянский, греческий, латинский, польский. В шестом классе учащиеся изучали философию, включавшую арифметику и геометрию. Киево-Могилянская коллегия (а затем — академия) сыграла большую роль в развитии культуры не только Украины и Белоруссии, но и всего русского государства. Она была первым высшим учебным заведением и крупнейшим образовательным центром России XVII — XVIII вв. Коллегия дала таких деятелей в области просвещения, как Епифаний Славенецкий, Симеон Полоцкий. По образцу Киево-Могилянской коллегии в 1687 г. в Москве была организована Славяно-греко-латинская академия.

В 1639 г. в результате длительной борьбы за национальное освобождение православное население получило право на открытие двух академий — в Киеве и во Львове. Чтобы оно не могло воспользоваться этим правом, в 1661 г. во Львове была открыта католическая академия.

Преподавание математики лучше всего было поставлено в Краковской академии, где работало несколько видных математиков и были подготовлены учебники по арифметике и геометрии, распространившиеся впоследствии также на территории Украины, Литвы и Белоруссии. Одним из ее воспитанников был Николай Коперник. В Краковской академии получили образование также и некоторые украинцы, литовцы и белорусы.

Ватикан и правящая шляхетско-феодалная верхушка с большой настойчивостью насаждали на Украине, в Белоруссии, Литве и Западной Руси иезуитские школы. Основным назначением этих школ, в сущности, было окатоличивание православного населения, а обучение служило лишь приманкой. Преподавание велось на латинском языке. Учащиеся жили в общежитиях и выполняли все предписания римско-католической церкви, принимали участие во всех ее службах и обрядах. В этих школах поддерживались и прививались взаимная слежка учащихся друг за другом, подслушивание, доносы, карьеризм, пренебрежительное отношение к трудовому народу. Наконец, что являлось весьма немаловажным обстоятельством, иезуитские школы были сословными, в них учились дети общественных верхов, на поддержку которых орден иезуитов рассчитывал.

В XVI в. иезуитские школы были открыты в таких городах, как Львов, Ярослав, Полоцк, Несвежь, Гродно, Орша, Минск, Пинск, Рава, Смоленск, Винница, Витебск, Могилев и др. Однако, несмотря на такую большую разветвленность, они не могли способствовать повышению культуры среди народа. По замечанию Я. Лукашевича,⁵ эти школы принесли больше вреда, чем пользы.

Из математических наук в иезуитских школах изучали только арифметику, и то в курсе философии. В 1614 г. было разрешено ввести пре-

⁵ J. Łukasiewicz. Historia szkół w Koronie i w Wielkim Księstwie Litewskiem od najdawniejszych czasów aż do roku 1794. T. 1. Poznań, 1849, st. 438.

подавание арифметики как отдельного предмета в двух старших классах в виде дополнительных уроков в свободное время.

В противовес иезуитским школам организовывались различные конфессиональные протестантские училища. Так, кальвинисты открыли свои «гимназии» в Бресте, Вильно, Вежице, Несвеже, Семятыне, Шидлове, в Бирзах, Кейданах и в Слуцке. В этих школах учили читать не только по-латыни, но и по-русски и по-литовски. Лютеранские школы были организованы в Вильно и в Ковно и рассчитаны, главным образом, на местное немецкое население. Арианские школы были распространены в польской Силезии. В 1537 г. на Волини, в Киселане, также была открыта арианская школа, просуществовавшая, впрочем, лишь до 1544 г. Преподавали в ней в основном немецкие учителя, учились, главным образом, дети местных немецких и польских мещан. Неконфессиональными были две академические «колонии» Краковской академии, старейшая — во Львове, организованная около 1400 г., и в Бродах.

В XVI и XVII вв. повсюду на Украине, в Белоруссии и Литве начинают организовываться братские школы, основной задачей которых являлась борьба за сохранение и развитие национальной культуры. В братских школах учились дети коренного населения — русских, украинцев, белоруссов, литовцев. Учитель в этих школах учил одинаково «как сынов богатых, так и сирот убогих и которые ходят по улицам живности просячи»⁶. Наиболее видную роль сыграли братские школы Львова, Перемышля, Киева, Луцка и Вильно. В годы освободительной борьбы украинского народа братские школы были организованы также в Остроге, Виннице, Минске, Рогатине, Городке, Комарах, Бельце, Каменце-Подольском, Галиче, Пинске и вторая школа во Львове.

Первая братская школа на Украине была создана во Львове в 1586 г. Ее деятельность определялась школьным статутом, в котором в сжатой форме сформулированы организационные, педагогические и методические школьные требования, четко указаны обязанности учеников и учителей, а также родителей. Автором первого статута братских школ был Арсений Еласонский, высокообразованный по тому времени просветитель, искренне стремившийся к распространению знаний среди народных масс Украины. Учителей для школ подбирало и утверждало общее собрание братства, тщательно обсуждавшее каждую кандидатуру. Преподавание велось на родном языке. Изучали также латинский и греческий языки. За учебу взималась плата, от которой освобождались лишь беднейшие. Однако, наряду с положительными сторонами, в этих школах были и существенные недостатки, которые порождались влиянием церкви. В их учебной работе чувствовалась схоластика, во всем обучении преобладали религиозные мотивы, заставлявшие нередко даже передовых учителей быть носителями религиозных традиций.

В 80-х годах XVI в. Львовское братство, при участии учителей и наиболее способных учеников старших классов братской школы, издавало книги, как церковные, так и светского содержания. В XVII в.

⁶ Б. М і т ю р о в. Львівська братська школа в XVI—XVII ст. ст.— У кн.: Нариси історії Львова. Книжково-журнальне видавництво, Львів, 1956, стор. 90.

и в начале XVIII в. оно издало восемь различных букварей, общим тиражом более 34 тыс. экз. Одним из учебников, подготовленных Львовской братской школой, является «Грамматика доброглаголивого еллино-словенского языка совершенного искусства осьми частей слова» или «Адельфотис» (1591 г.), составленная учениками (спудиями) под руководством Арсения Еласонского. Она была издана на греческом и древнеславянском языках.

Другим учебником для братских школ была грамматика, составленная преподавателем Львовской братской школы Лаврентием Зизанием и изданная в Вильно в 1596 г. Позже эту грамматику заменила книга Мелентия Смотрицкого «Славянская грамматика», напечатанная в 1619 г. в типографии Виленского свято-духовского братства. «Грамматика» Смотрицкого служила основным учебным пособием в течение почти полутора столетий в русских, украинских, белорусских, сербских и болгарских школах. Во Львове был издан «Букварь языка словенска, писанный чтения учиться хотящим в полезное руководство» (1671 г.).

Математика преподавалась в братских школах в старших классах и относилась «к семи вольным наукам» (диалектика, риторика, музыка, арифметика, геометрия, астрономия, философия).

Насколько можно установить по сохранившимся конспектам и иным рукописным материалам, математика в братских школах обычно преподавалась на латинском языке, так как на этом языке издавались, в основном, учебные руководства и учебники.

4

Общая характеристика математической литературы

Письменные первоисточники по математике на Украине и в Белоруссии в XIV—XVII вв. можно разделить на две группы. Первую группу составляют общие источники по истории культуры, содержащие косвенные сведения о развитии математики в этот период, вторую группу — непосредственно математические рукописи или печатные издания, как отечественные, так и зарубежные, распространенные в школах того времени.

Примером письменных первоисточников первой группы может служить упоминавшийся уже нами ужгородский «Полуустав». Он предназначался для праздничных духовных занятий, богослужений и молитв. С точки зрения математики представляют интерес помещенные в нем таблицы чисел и славянской нумерации, календарные индексы, пасхальные таблицы и ключи. По содержанию «Полуустава» можно судить о том, что расчеты календаря были известны широким кругам духовенства на Украине уже в XIV в. Такого же рода письменным источником можно считать книгу «Букварь» Ивана Федорова.

К этой группе письменных источников следует также отнести книги Юрия Дрогобыча. Юрий Дрогобыч окончил Краковский университет,

получил степень бакалавра, а затем магистра. После окончания Болонского университета он получил степень доктора философии и медицины, читал лекции в этом университете и был в течение двух лет его ректором. В отделе латинских рукописей Баварской государственной библиотеки в Мюнхене хранятся в рукописной копии два календаря-альманаха (прогностика) Ю. Дрогобыча: о движении планет на 1478 г. и «Прогностическая оценка текущего 1482 года магистра Юрия Дрогобыча из Руси, доктора философии и медицины Болонского университета». В этих календарях с достаточной для того времени точностью определены время двух лунных затмений, фазы Луны в течение года, даны указания о видимом движении планет на небе, помещены различные географические сведения, а также многие заключения автора. Содержание этих работ Ю. Дрогобыча свидетельствует о его весьма высоких знаниях в области математики.

Рассмотрим объем математических сведений, изложенных в учебниках и учебных руководствах, которыми пользовались в школах XIV—XVII вв.

Авторы руководств по математике в XVI в. различали два вида арифметики: численную, или обычную, и линейную, вычисления в которой выполнялись на линиях при помощи камешков или жетонов.

Линейная арифметика. На линиях выполнялись следующие действия над целыми числами: нумерация, сложение, вычитание, умножение и деление. Действия на линиях основаны на тех же принципах, что и в индийской нумерации. Натуральное число в десятичной системе счисления изображалось на линиях счетной доски в основном так же, как и в настоящее время на счетах. Разница только в том, что на счетной доске камешки могли располагаться и между линиями. В этом случае каждый камешек означал пять единиц разряда нижней линии.

Цифровая арифметика. Нумерация, по определению большинства учебников, «учит, как записывать числа с помощью десяти знаков». Сложение определялось как «собираение данных чисел в одну сумму». Для вычитания существовало два определения: «вычитание есть действие, с помощью которого находят, на сколько одно число больше другого» и «вычитание есть выделение числа из числа, чтобы найти, какая остается сумма». Подчеркивалось, что вычитать можно только из большего числа меньшее. Для умножения давалось также два определения: «умножение есть определение по двум заданным числам третьего, которое содержало бы одно из них столько раз, сколько единиц в другом» и «умножение есть счисление, в котором множимое столько раз берется слагаемым, сколько единиц содержится во множителе». Деление определялось как «разделение большего числа на столько частей, сколько еди-

			6	7	8	4	8
			2	4	8	3	1
			6	7	8	4	1
2			4	4	5	2	7
7			2	9	6	8	7
8							
6							
	1	8	8	8			4

Умножение в клеточках
(по Брожеку)

ниц в меньшем». В разделе о действиях с целыми числами изложены все способы вычислений, вошедшие в современные учебники по арифметике.

Обычно изложение умножения начиналось с таблицы умножения, затем указывался способ умножения чисел, меньших пяти, на пальцах — так называемое правило лентя. Я. Брожек описал способ умножения в клеточках, которым пользовались еще индусы. Например, надо умножить 6784 на 4107. На линии АВ записываем 6784, а на линии ВД — 4107. Произведения однозначных чисел записаны в соответствующих клеточках: десятки сверху, а единицы под косыми линиями. Сложив однозначные числа, записанные в косых полосах, получим по линии АСД произведение 27 861 888.

При делении на однозначное число, если оно было меньше первой цифры делимого, его записывали под ней:

$$\begin{array}{r} 7236 \\ 3 \end{array}$$

Если же делитель был больше первой цифры делимого, то его записывали под второй цифрой делимого:

$$\begin{array}{r} 12618 \\ 9 \end{array}$$

Если делитель был многозначным числом, то его записывали под делимым по указанному правилу, ориентируясь на первую цифру делителя:

$$\begin{array}{r} 15120 \\ 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7289 \\ 731 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11361124 \\ 396 \end{array}$$

Действие деления выполнялось согласно алгоритму Евклида. Но записи в ходе деления производились различными способами. Например, $942 : 42$:

$$\begin{array}{r|l} 942 & 2 \\ 42 & \\ \hline 2 & \\ \hline 84 & \\ \hline 102 & 22 \\ 42 & \\ \hline 2 & \\ \hline 84 & \\ \hline 18 & \end{array} \quad 22 \frac{18}{42} = 22 \frac{3}{7}$$

Все арифметические действия проверялись по правилу девятки без указания на его недостаточность. Некоторые авторы производили проверку обратными действиями. Законы действий не формулировались, а предлагались в виде советов. Например: «наиболее удобно меньшее число складывать с большим и подписывать наоборот, но так или иначе, всегда получим один и тот же результат» (Сакробоско). Выработанной общепринятой терминологии не было.

Во многих учебниках арифметики отводилось большое место метрологии, а также действиям с именованными числами.

Большинство учебников рассматриваемого периода к арифметическим действиям относит прогрессии. Сакробоско делит прогрессии на натуральные, или непрерывные, и разрывные. Натуральные, по его определению, — это такие прогрессии, которые начинаются с единицы и члены которых следуют в порядке возрастания без пропусков, причем каждый последующий член больше предыдущего на единицу (1, 2, 3, 4, 5...). Разрывные — такие прогрессии, в которых пропускаются четные или нечетные числа (1, 3, 5, 7, 9...). Он же дает два правила вычисления суммы членов прогрессий для случаев, когда последний член прогрессии четное или нечетное число.

В арифметику включалось также действие извлечения корней. При выполнении этого действия ограничивались только квадратными и кубическими корнями. Вычисление их выполнялось, соответственно, по формулам для квадрата суммы и куба суммы двух чисел, как и в настоящее время, но запись вычислений была иной.

Арифметические действия с дробями. После действий с целыми числами в более полных учебниках арифметики изложены действия с дробями. Кроме сложения, вычитания, умножения и деления дробей некоторые авторы рассматривали также удвоение и деление пополам. Запись дробей не отличалась от записи в настоящее время.

Изложению действий с дробями предшествовало рассмотрение понятия об их преобразовании. Содержание этого раздела в учебниках было весьма разнообразным. Обычно первым преобразованием дробей было их сокращение. Нахождение общего наибольшего делителя производилось согласно алгоритму Евклида. Выполнялось также сравнение дробей. В качестве общего знаменателя принимали только произведение знаменателей данных дробей. Преобразование целого и смешанного чисел в дробь выполнялось обычным путем. Действия с дробями производились также аналогично современным вычислениям, но записи вычислений были иными. Например, у Паурбаха вычитание $\frac{4}{5}$ из $\frac{7}{8}$ записано так:

$$\begin{array}{r} \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} \\ \hline \frac{32}{40} \quad \frac{35}{40} \\ \hline 35 \\ 32 \\ \hline 3 \\ \hline 40 \end{array}$$

Паурбах и другие рассматривали также действия с дробями от дробей. Дробь от дроби записывалась двояко, например:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \text{ или } \frac{1}{2} \text{ от } \frac{1}{3}.$$

Правила для решения арифметических задач. Основными правилами для решения задач было «тройное правило» и «правило фальшивого положения». Тройное правило состояло из простого и сложного правил.

К простому тройному правилу относилась прямая зависимость величин, обратная зависимость величин, правило для целых и правило для дробей. Сложное тройное правило определялось, как дважды последовательно примененное простое тройное правило. Простое тройное правило записывалось в виде схемы, с помощью которой по трем известным величинам находили четвертую неизвестную. Тройное правило являлось основой «правила товарищества», «правила времени», «правила смеси», «правила убытка и прибыли» и «правила разностей» и применялось для решения задач различного типа.

Значительное внимание в пособиях по арифметике уделено правилу фальшивого положения, которое представляет собой своеобразный алгоритм для решения линейного уравнения первой степени. Это правило применялось при решении задач практического содержания.

Итак, в рассматриваемый период арифметику изучали с помощью счета на линиях и индусской нумерации. В пособиях XVI в. обычно преимущество отдавали линейной арифметике. Изложение арифметики носило догматический характер. Правила давались в виде рецептов, без выводов, однако в большинстве случаев сопровождались примерами. Иногда использовалась пятая книга «Начал» Евклида.

Одним из известных пособий по геометрии в XVI в. была «Геометрия» Гжепского. Она представляет собой практический курс, в основу которого положены «Начала» Евклида. В ней даны не только формулировки теорем, но и их доказательства.

Учебник Стегмана «Обучение математике» содержит сведения по практической геометрии. Геометрия, определяет Стегман, — это «часть математики о величинах». Ее содержанием, по его мнению, является изучение непрерывных величин. Из этих величин важнейшими он считает линию, плоскость и тело. Определяются они при помощи движения. Вместе с тем для точки, линии и поверхности даны и такие «определения»: точка есть граница линии, линия — граница поверхности, поверхность — граница тела. Мера отрезка определена как отношение отрезка к единице меры. Измеряются отрезки с помощью циркуля и линейки. В разделе «О прямой линии» линия определена как «величина, имеющая только длину», указывается, что линии делятся на прямые и кривые. Решены такие задачи: провести прямую, соединить две точки прямой, продолжить прямую, измерить ее отрезок, разделить пополам и на произвольное число равных частей, для двух прямых найти третью — среднегеометрическую⁷. Все построения выполнены правильно, но без объяснений. Интересно, что первые две задачи решены несколькими способами, включающими построения на местности. Стегман делит линии на встречающиеся, параллельные, секущие, касательные и перпендикулярные. Встречными он называет такие линии, которые при продолжении «встречаются» в одной точке. Перпендикуляр определяет как секущую, «которая пересекает другую прямую под прямым углом и идет к ней кратчайшим путем». В разделе о перпендикулярных прямых рассматриваются задачи о проведении перпендикуляра к прямой в дан-

⁷ Стегман для прямой и отрезка прямой употреблял один термин — «прямая».

ной точке, а также из точки, лежащей вне прямой. Все построения выполнены без каких-либо объяснений.

Раздел «О параллельных прямых» содержит ряд задач. Одна из них — провести прямую, параллельную данной прямой. Из указанных четырех построений единственность решения достигается в четвертом случае, где требуется, чтобы искомая прямая проходила через точку, заданную вне данной прямой. Все построения различны. В первом построении использованы свойства перпендикуляра, во втором — окружности, в третьем — равных дуг и в четвертом — диагоналей параллелограмма. Все построения выполнены без объяснений.

Другая задача сформулирована в следующем виде: провести перпендикуляр к недоступной прямой. Построение выполнено по признаку равенства прямоугольных треугольников, который, однако, нигде в книге не указан. Третья задача: провести параллельную прямую к прямой через точку, из которой эта прямая не видна. В построении использованы свойства углов, образованных при пересечении двух прямых третьей, и построение угла, равного данному.

Угол определен как фигура, образованная линиями, выходящими из общей точки. После некоторых предварительных сведений дано решение двух задач: построить угол, равный данному, и разделить угол пополам. Раздел заканчивается изложением градусного измерения углов.

Изучение геометрических фигур начинается с общего рассмотрения фигуры. К частям фигуры автор относит периметр, центр, радиус и диаметр. В отличие от современных учебников по геометрии, эти понятия определены не для окружности, а для многоугольника. Подобными Стегман называет фигуры, у которых соответствующие углы равны, а равными, — у которых стороны равны. Он приводит различные случаи построения многоугольников, подобных данному. Площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма и треугольника вычислены путем разбиения на треугольники. Все построения и вычисления указаны в рецептурной форме без каких-либо объяснений. Треугольник определен как фигура с тремя углами и тремя сторонами. Сообщается, что в треугольниках с соответственно равными углами соответствующие стороны пропорциональны. Подчеркивается важность этого положения в геометрии и геодезии. Затем помещены задачи о построении треугольника по трем его сторонам, о преобразованиях прямоугольников в равновеликие им треугольники. Правильность построений равновеликих треугольников следует из принципа равновеликих фигур и из признаков равенства треугольников.

После изложения основных сведений по геометрии Стегман переходит к задачам по измерению на местности. Измерения выполнены с помощью простейших измерительных приборов — палочки Якоби, трехсторонника, квадрата с сеткой, а также с помощью тени, вехи и зеркала.

Описание палочки Якоби дано в разделе «О геометрической палочке». Она состоит из двух планок квадратного сечения, соединенных в форме креста. Меньшая составляет $\frac{10}{21}$ большей. С помощью этой палочки можно определить высоту предмета, расстояние между двумя недо-

ступными точками, расстояние до недоступного предмета, а также измерить один катет по известной части другого.

Трехсторонник состоит из трех планок прямоугольного сечения с одинаковыми делениями, две из которых шарнирно прикреплены к концам третьей. С помощью этого прибора можно определить стороны треугольника путем построения треугольника, подобного данному, а также определить неизвестную сторону треугольника.

С помощью квадрата с сеткой (описания его нет) выполнялись те же измерения, что и при помощи палочки Якоби и трехсторонника.

Для вычисления площади треугольника указано два способа. Первый способ соответствует формуле Герона, второй — обычной формуле вычисления площади треугольника.

Раздел «О четырехугольниках» в учебнике Стегмана начинается введением, в котором даны их определения. К четырехугольникам относятся параллелограммы и трапеции. Трапеция определена как четырехугольник с разными сторонами. Изложение свойств четырехугольников ограничивается указанием о делении параллелограмма диагональю на два равных треугольника. Далее помещены десять задач. Первая группа задач — о построении фигур, равновеликих данным (параллелограмму — квадрат, треугольнику — параллелограмм, параллелограмму — прямоугольник, трапеции — параллелограмм). В большинстве решений построений нет. Автор ограничивается указанием о последовательности построения. Две задачи относятся к удвоению квадрата, а две — к вычислению площадей четырехугольников. В одной из последних задач указано правило вычисления площади прямоугольника, в другой — площади так называемого косоугольного четырехугольника (в этом случае площадь вычислена как сумма площадей прямоугольника и треугольника). Остальные задачи посвящены делению параллелограмма и трапеции на равные части.

В разделе «О многоугольниках» рассматривается построение многоугольников и вычисление их углов. Изложение материала весьма примитивно.

В учебнике Стегмана круг определяется как круглая фигура, эллипс — как удлинённая фигура. Однако площадь круга и сектора вычислены правильно. Площадь эллипса определена путем «разделения его на два полукруга и параллелограмм».

Заключительная часть учебника Стегмана (разд. 30 и 31) посвящена стереометрии. Поверхности автор делит на цилиндрические, конические и сферические и определяет их как поверхности вращения. Правила вычисления их площадей соответствуют известным формулам. Автор правильно классифицирует многогранники и способы вычисления их объемов. Однако указанный им способ вычисления объема бочки весьма приближенный.

Форма изложения геометрии у Стегмана — догматическая. Только в отдельных случаях приведены доказательства теорем. Нет объяснений рецептов решения задач. Материал изложен в таком порядке: сначала даны некоторые объяснения основных понятий, а затем — правила

для вычислений или построения в виде задач. В задачах дано условие, иногда со значительными пропусками и неточностями, и затем — решение без объяснения.

□

Итак, в XIV—XVII вв. в школах Украины и Белоруссии преподавание математики велось на уровне сообщения некоторых теоретических знаний и приобретения учащимися практических навыков. Авторы практических курсов арифметики ограничивались действиями над целыми и дробными числами, решениями задач на простейшие правила: тройное, ложного положения и др. Изложение арифметических правил носило догматический характер. Арифметика первоначально имела три направления: линейная арифметика, арифметика в индийской нумерации с некоторым использованием счета на линиях и арифметика в индийской нумерации. Теоретическая сторона в построении арифметики обеспечивалась изложением материала по пятой книге «Начал» Евклида.

Практические курсы геометрии включают планиметрию и некоторые сведения о вычислении площадей поверхностей и объемов простейших геометрических тел. Особое внимание в этих курсах уделено задачам измерения на местности с помощью простейших инструментов. Важное место занимают преобразования одних геометрических плоских фигур в другие, равновеликие им.

Тригонометрии обучали очень мало. Можно предполагать, что о ней упоминали в некоторых арианских школах (учебник Стегмана), а также в академиях во Львове и Вильно, где, возможно, пользовались трудами Коперника или их учебными переработками.

ГЛАВА ПЯТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ В XVII В.

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России

В XVII в. Россия вступила в новый период своей истории. Наряду с укреплением феодализма появились зачатки промышленного развития — первые мануфактуры. Начал складываться единый всероссийский национальный рынок. По словам В. И. Ленина, это было основной особенностью нового периода русской истории, когда, наперекор остаткам феодальной раздробленности и некоторой изолированности различных областей Русского государства, происходило фактическое слияние всех его частей в одно экономическое целое. В. И. Ленин писал: «Только новый период русской истории (примерно с 17 века) характеризуется действительно фактическим слиянием всех таких областей, земель и княжеств в одно целое. Слияние это вызвано было... усиливающимся обменом между областями, постепенно растущим товарным обращением, концентрированием небольших местных рынков в один всероссийский рынок. Так как руководителями и хозяевами этого процесса были капиталисты-купцы, то создание этих национальных связей было не чем иным, как созданием связей буржуазных»¹.

После разгрома интервенции польских и шведских феодалов и временного затишья на юге (меньше стало вторжений крымских и ногайских татар) в России началось восстановление хозяйства, происходившее, в основном, за счет усиления крепостнической эксплуатации народных масс. Наряду с барщиной и натуральными оброками применялась во все большем объеме денежная рента. К 1678 г. около 0,9 крестьянского населения принадлежало дворянству, церкви и царскому двору.

В этот период в России происходил процесс дальнейшего общественного разделения труда и роста товарного производства. Характерным для промышленного роста было высокое развитие ремесла, все большее сосредоточение его в городах, специализация по отраслям и районам. Усилился процесс превращения городских ремесленников в мелких това-

¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 153—154.

ропроизводителей. Происходило также укрупнение мелкого товарного производства, сопровождавшееся применением наемного труда.

Важнейшим явлением экономического развития России в XVII в. было возникновение мануфактурного производства с применением наемного и крепостного труда. Мануфактура в XVII в., писал В. И. Ленин, являлась «промежуточным звеном между ремеслом и мелким товарным производством с примитивными формами капитала и между крупной машинной индустрией (фабрикой)»². Однако удельный вес мануфактурного производства во всей промышленности России XVII в. был еще незначителен.

Рост товарно-денежных отношений отразился и на развитии сельского хозяйства. Все большее количество продуктов сельского хозяйства поступало на внутренний, а отчасти и на внешний рынок. Некоторые крупные феодальные хозяйства (например, боярина Б. И. Морозова) развортывали промышленное предпринимательство (винокурение, производство поташа и т. п.).

На основе общего подъема производительных сил в сельском хозяйстве и промышленности, производственной специализации районов и дальнейшего общественного разделения труда усилились торговые связи в национальном масштабе. Москва стала центром всероссийских рыночных связей. Значительно возросла торговля со странами Запада и Востока.

Социальный строй Русского государства в XVII в. представлял собой типичное для средневековья пестрое переплетение сословий и классов. Несмотря на значительные изменения в социальном строе России XVII в., основные общественные классы сохраняли средневековые черты, продолжали развиваться в рамках средневекового деления и оставались классами-сословиями. При этом укреплялась основа экономического господства класса феодалов — феодальная собственность на землю. В самой структуре феодальной земельной собственности происходили большие изменения: усилился процесс слияния поместной и вотчинной форм землевладения. Это свидетельствует о консолидации сил господствующего класса феодалов.

С целью укрепления феодально-крепостного строя Земский собор в 1649 г. принял «Соборное уложение», отразившее процесс слияния вотчины с поместьем. Был установлен порядок наследования дворянских имений и юридически оформлена система крепостного права. «Соборное уложение» наносило удар последним остаткам феодальной раздробленности, устраняло самостоятельность крупных феодалов, создавало централизованную базу взимания налогов на государственные нужды.

Сложные процессы социально-экономического развития России XVII в., жестокий произвол властей, усиление финансового гнета за счет прямых и косвенных налогов обуславливали обострение классовой борьбы. В начале XVII в. вспыхнуло восстание крестьян под предводительством Ивана Болотникова. С 1648 по 1650 г. обострилась классово-

² В. И. Л е н и н. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 385.

вая борьба во многих городах, в 1662 г. произошло восстание в Москве. В 1667 г. началась крестьянская война под предводительством Степана Разина. Несмотря на жестокое подавление восстания и казнь Степана Разина, антифеодальные восстания не прекращались. Значительные размеры приобрело Соловецкое восстание (1668—1676 гг.). Антифеодальная борьба, особенно крестьянские войны, наносили сильные удары по феодально-крепостническому строю России.

Обострение антифеодальной борьбы народных масс, социальные противоречия, усиление буржуазных элементов в стране побудили господствующий класс пойти по пути дальнейшего укрепления своей власти. Началась эволюция государственного строя в сторону усиления самодержавия. Государственно-политический строй России этого периода В. И. Ленин характеризовал как самодержавие «с боярской Думой и боярской аристократией»³. Во второй половине XVII в. начался переход к абсолютистской монархии, сопровождавшийся ликвидацией основных средневековых учреждений. Дворянство и экономически сильная верхушка посадского населения были основной опорой складывавшейся монархии. Михаил Романов первый из русских царей официально назывался «самодержцем». Наряду с установлением самодержавной власти усиливалась централизация государственного управления. Изменения происходили и в организации вооруженных сил. Зарождалась русская регулярная армия.

В середине XVII в., когда в борьбе с панской Польшей объединились силы двух братских народов — русского и украинского, появилась возможность решить ряд неотложных внешнеполитических задач. Важное место во внешней политике России в XVII в. занимала проблема обеспечения безопасности южных границ от турок и татар. В 30—70-х годах было сооружено несколько оборонительных линий. В 1676 г. Турция начала войну с Россией, пытаясь подчинить себе Украину. Русские войска (вместе с русскими воевали украинцы) сумели дать сокрушительный отпор туркам. В 1681 г. Турция вынуждена была отказаться от своих притязаний на Левобережную Украину и подписать Бахчисарайский мирный договор.

Дальнейшее экономическое развитие страны и укрепление ее международного положения создали предпосылки для крупных социально-экономических, административных и культурных изменений конца XVII — первой четверти XVIII в.

Социально-экономическое развитие России определяло и дальнейшее развитие ее культуры. Новые течения в области культуры формировались в борьбе с религиозным мировоззрением, а также с влиянием церкви вообще. До XVI в. духовенство играло видную роль в развитии культуры, в частности образования. В XVI в. начал складываться круг светских образованных людей, и культура приобретала светский характер.

В XVII в. в русской культуре произошли значительные сдвиги, основой которых было, прежде всего, развитие просвещения. В этот

³ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 17, стр. 346.

период просвещение получило распространение среди более широких кругов населения и приобрело более разносторонний и глубокий характер. Грамоте обучались по азбуковникам. В 1634 г. был издан букварь Василия Бурцева, переиздававшийся несколько раз. За вторую половину XVII в. московский печатный двор издал много букварей, в том числе букварь Кориона Истомина. В середине XVII в. была издана «Грамматика» Мелетия Смотрицкого. Среди рукописей этого периода встречаются специальные руководства по арифметике и геометрии.

С распространением грамотности увеличился спрос на книги. Однако подбор книг, издававшихся печатным двором, не мог удовлетворять русского читателя. Поэтому, наряду с печатными книгами, пользовались оригинальной и переводной рукописной литературой. Круг читателей значительно расширился. Все большим спросом пользовались светские книги, содержащие сведения по вопросам техники, ремесла, искусства, торговли. Появились руководства по измерению земель, устройству технических сооружений, изготовлению красок, торговые книги и т. п.

Большую роль в развитии просвещения сыграло увеличение количества библиотек. Раньше библиотеки были лишь при монастырях, а в XVII в. появились библиотеки Посольского приказа, московской типографии, царская, отдельных представителей знати. В библиотеках этого времени было много книг на латинском, греческом, польском, немецком и других языках.

Обучение элементарной грамоте и пополнение знаний путем чтения разных книг не решали вопроса о просвещении в целом. Необходимо было систематическое образование. Поэтому с середины XVII в. начали создаваться правительственные и частные школы при монастырях (Чудовом, Спасском и др.). В школе при Андреевском монастыре (открыл ее Ф. М. Ртищев) обучали славянскому и греческому языкам, риторике, философии и другим словесным наукам. В 1667 г. прихожане церкви Ивана Богослова (в Китай-городе в Москве) подали челобитную царю о разрешении создать при церкви школу по образцу украинских братских школ. Все эти и другие начинания в области школьного дела завершились открытием в 1687 г. Славяно-греко-латинской академии в Москве — первого высшего учебного заведения России. Академия давала весьма высокое для того времени образование. В ней по учебникам братьев Лихудов преподавали логику, психологию, «физику, или естественную философию». Однако в целом образование в России в XVII в. носило еще, в основном, средневековый характер.

В XVII в. русские исследователи сделали ценнейшие географические открытия в Сибири, дали несколько описаний восточных стран, составили карты России. Большое развитие получила литература. Появились стихотворения, драматургические произведения, сатирическая литература, бытовая и воинская повести. Начали составлять первую русскую рукописную газету под названием «Куранты». При царском дворе в 1672 г. был организован первый в России театр. Высокого совершенства достигла архитектура, в которую все больше проникали

светские мотивы и традиции народного творчества. Среди памятников архитектуры XVII в. особенно выделяется дворец в с. Коломенском под Москвой. В русской живописи, сохранявшей в основном еще церковный характер, наметилась тенденция к реализму, особенно сказавшаяся в творчестве выдающегося русского художника XVII в. Симона Ушакова. Возникла портретная живопись.

Россия сумела добиться заметных успехов в области техники, математики, химии, физики, астрономии и других наук. Русские мастера создали первую казнозарядную пушку с клиновидным замком, огромный колокол, установленный на Спасской башне Кремля, часы «с боем». О достижениях русской техники свидетельствуют сооруженные в то время большие мосты, грандиознейшие по своим размерам храмы и церкви, «вододействующие» механизмы, кузнечные молоты, сверлильные и другие станки, применявшиеся на тульских, каширских и других заводах.

2

Общая характеристика рукописных источников математических знаний

Краткие сведения о русских математических рукописях XVII в. даны в различных каталогах и описаниях русских рукописей и старопечатных книг, а также в работах Б. В. Бобынина и Т. И. Райнова.

Рукописи, содержащие сведения по математике, можно разделить на три группы: рукописи математического содержания, сборники, в которых отдельные разделы посвящены математике, и не математические рукописи, включающие сведения по математике. Из русских математических рукописей XVII в., известных в настоящее время, в 44 имеются сведения по арифметике. В их число входит пять рукописей профессора Московского университета Ф. Г. Баузе, рукопись бывшей библиотеки редакции журнала «Физико-математические науки в их настоящем и прошлом» и рукопись Государственной публичной библиотеки им. Салтыкова-Щедрина (шифр Q IX-43). Остальные 37 рукописей в свою очередь можно разделить на две группы: первую группу составляют 33 рукописи, вторую — 4 рукописи (Собр. Унд. № 682, Собр. Унд. № 1335, Чертк. № 372 и ОЛДП (ОШ) 28).

Изложению арифметики в рукописях первой группы предшествует введение, в котором подчеркивается полезность и ценность арифметики для практики и других наук. Все рукописи, за редким исключением, озаглавлены одинаково: «Сия книга, глаголемая по-гречески арифметика, а по-немецки алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость». Руководства по арифметике предназначались для торговцев, чиновников государственных учреждений, землемеров, управителей имений, ремесленников. Этим и определялось их содержание. Весь материал разделен на части (статьи), а части — на параграфы (строки), следующие в порядке возрастания трудности вопросов. В первой статье изложена нумера-

ция, далее — действия над целыми числами: сложение, умножение, вычитание и деление. За статьями об этих действиях следуют весьма интересные статьи об инструментальном счете — «Счете костями, или пенязи» и о «дошаном счете», в которых описывается счетная доска и выполнение на ней арифметических операций с целыми числами. Важнейшим из практических приложений этого счета считалось употребление его с целью «класти сошную кладь». В некоторых арифметических рукописях этому вопросу уделено особое внимание.

Далее следуют важные для торговцев статьи о метрологии Московского государства, а также Венеции, Антверпена, Нюрнберга и других городов с примерами перевода одних систем мер в другие или перевода больших мер в меньшие и обратно. Во всех рукописях метрологический отдел представляет собой список одного источника. В нем изложены два действия — сложение и вычитание именованных чисел. Соответствующие статьи построены по одному плану: за изложением правила действия следуют задачи в различных системах мер. Правило сложения представляет собой, по сути, правило расположения отдельных наименований в составном именованном числе.

Изложение дробей начинается с раздела «Статья численная о всяких долях указ», в котором речь идет о письменном изображении дроби, определении числителя и знаменателя и о наименовании простейших дробей. Затем следует статья, озаглавленная в некоторых рукописях «Вынимание дробовое», содержащая умножение дробей. А далее излагается четыре арифметических действия над дробями.

В статье «Сложение долям вместо или считание» рассматривается сложение правильных дробей с одинаковыми и разными знаменателями, а также смешанного числа с правильной дробью. Более полно сложение дробей освещено в статье «Статья считания или сложения в долях». Статья состоит из десяти параграфов: сложение правильных дробей с одинаковыми знаменателями, правильных дробей с различными знаменателями, более сложных правильных дробей с различными знаменателями, смешанного числа с правильной дробью, смешанного числа со смешанным, части дроби с дробью, части дроби с частью другой дроби, выраженной смешанным числом части дроби с другой дробью, выраженной смешанным числом части смешанного числа с дробью, выраженной смешанным числом части смешанного числа с частью дроби. Каждый параграф включает изложение правила на соответствующем примере. Так же, как и сложение дробей, изложены вычитание, умножение и деление. Остальное содержание рукописей почти полностью составляют задачи коммерческой арифметики.

Особое значение в арифметических рукописях имеют статьи, посвященные тройному правилу, — «Статья тройная в целых и в долях всяких» и «Статья тройная в долях». Первая начинается с похвалы простому тройному правилу в целых числах, которое, по мнению составителей арифметических рукописей, оказывается «тою строкою похвальною и лучшей строкою изо всех иных строк», которую «философы зовут «золотою строкою». Во второй статье сообщается, что тройное правило в целых числах еще не так достойно удивления, как то же правило

²Сия ²пята ²тема ²Потресни ²дре
 жетина ²а ²поке ²мечни ²торима
 а ²поручни ²цы ²фирнай ²сетна
²хростъ ²едина ²педми ²хростъ
 Бюшнихъ ²

Пятая ²хростъ ²белми ²велики
 хростъ ²Нарица ²вми ²др
 жетина

Пятая ²хростъ ²белми ²велики
 хростъ ²Нарица ²вми ²др
 жетина

Сия ²9 ²хростъ ²предварныхъ
 исторыми ²видное ²ихъ ²типъ
 нбстѣ ²пишутъ ²сиче
 1.2.3.4.5.6.7.8.9.

Второй лист рукописи Муз. Собр. № 2606.

За тройным правилом следует «Статья деловая», содержащая решение задачи с помощью пропорционального деления. В одной группе задач числа, пропорционально которым должно быть разделено данное число, указаны, в другой — их надо определить с помощью данных условий. Далее следуют статьи с сугубо утилитарными наименованиями: «Статья торговая», «Статья о прикупах и о накладах счет», «Статья спрашивальная в тройной строке», «Статья ростовая, добыточная и прибыльная», «Статья о нечисти во всяких овощах и в товарах» и др.

Особое место в арифметических рукописях XVII в. занимает «Фальшивая или збойливая статья», представляющая собой не что иное, как известное правило двух ложных положений, которое легко обосновы-

вается при помощи элементарных сведений по алгебре. Некоторые задачи «фальшивых статей» сведены к линейному уравнению с одним неизвестным, к системе двух, трех и четырех линейных уравнений с соответствующим числом неизвестных.

В конце многих рукописей, а иногда и в самом тексте помещены разнообразные задачи для развлечения и развития смекалки. Эта группа задач весьма интересна с точки зрения методов их решения.

В рукописях описываемой группы в условиях задач, как правило, употребляется славянская и крайне редко — арабская нумерация. Вычисления выполнены в арабской нумерации, а в объяснении решения использована славянская нумерация.

Рукописи второй группы, в отличие от рукописей первой группы, не содержат статей о счете костями и действиях с именованными числами. Статья о нумерации очень коротка или ее совсем нет. Основное содержание этих рукописей почти тождественно содержанию рукописей первой группы. Отличие состоит иногда лишь в форме изложения. Встречаются также задачи, которых нет в рукописях первой группы. В рукописи Чертк. № 372 многие задачи решены с помощью алгоритмов для решения линейного уравнения и систем линейных уравнений с двумя, тремя и четырьмя неизвестными.

Правила предлагаются в форме предписания или рецепта и всегда сопровождаются примерами. Взаимное расположение в изложении правил и связанных с ними примеров в различных статьях различно. В одних — примеры следуют за изложением правила, в других — предшествуют ему. Ценной особенностью рукописей было обилие подробно решенных задач. Собственно, это были сборники примеров и задач с краткими вводными указаниями на правила решения и чрезвычайно подробными решениями.

Математическая терминология рукописей XVII в. во многом не сходна с установившейся позднее. Число называлось перечнем, нуль — оным или оником. Дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ и т. д. именовались пятиной, седминой и т. п., $\frac{12}{13}$ читалось: либо двенадцать тринадцатин, либо двенадцать

тринадцатых жеребьев (т. е. частей). Вместо слова «сумма» говорили «исподний, нижний или большой перечень» (сумма подписывалась под слагаемыми — перечнями), вместо «уменьшаемое» и «вычитаемое» — «заемный» («заем») и «платежный» («платеж») перечень. Разность называли «остатком». Числитель дроби назывался «верхнее число», а знаменатель — «нижнее число». Встречаются и некоторые иностранные термины.

В целом рукописи свидетельствуют о высоком мастерстве русских арифметиков XVII в., детально разработавших систему вычислений на изобретенных ими счетах, искусно и безошибочно выполнявших вычисления при решении линейных уравнений со многими неизвестными. В ряде случаев, отрываясь от коммерческих задач, русские арифметики оригинально трактовали более отвлеченные арифметические вопросы (суммирование геометрических прогрессий, задача «о деньгах вкуче ведати» и др.).

3

Арифметика на линиях в арифметических рукописях XVII в.

На Руси, как и в других государствах, пользовались различными средствами наглядного, инструментального счета. Два приема инструментального счета описаны во многих русских арифметических рукописях: счет костями и дощаной счет.

Счет костями, или пенязи, заключался в следующем. На столе чертили несколько продольных и перпендикулярных к ним прямых линий.

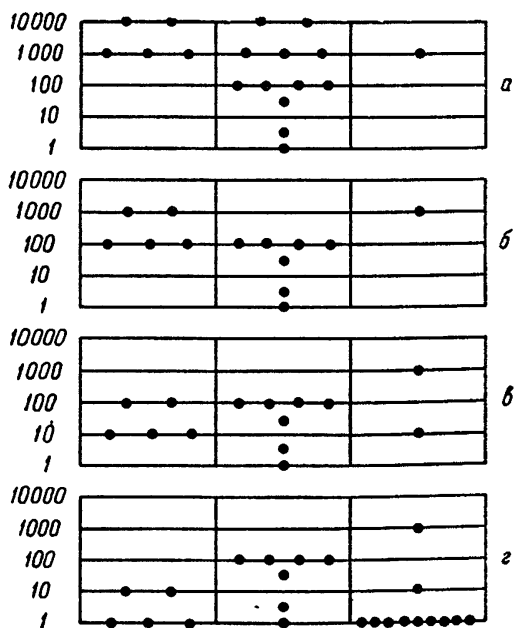
	Множи- тель	Множи- мое	Первый итог	Второй итог	Третий итог	Четвертый итог	Резуль- тат
5000						с	о
1000				о			о
500					о	о	о
100		о	о		о	о	о
50	о	о	о	о	о	о	о
10	о	о	о	о	о	о	о
5	о	о	о	о	о	о	о
1	о	о	о	о	о	о	о
	66	96	6×6	6×90	60×6	60×90	6336

Умножение костями, или пенязи.

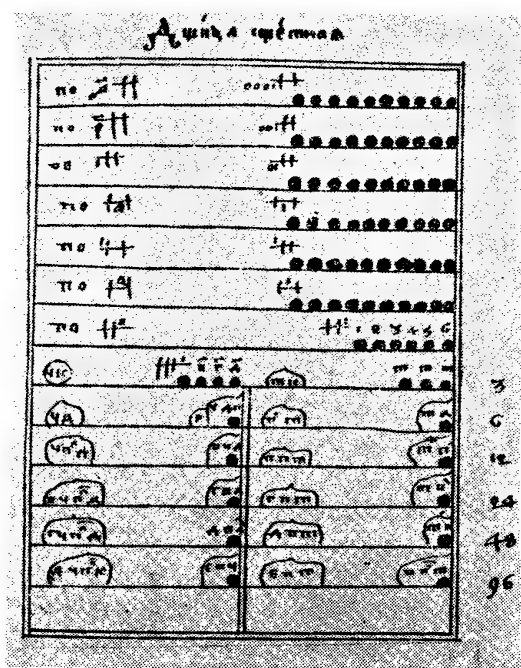
Окончательный результат действия записывали в последней колонке справа. Число продольных полос зависело от числа разрядов, содержащихся в наибольшем из данных чисел, число перпендикулярных полос — от характера действия. Так, при сложении проводили только одну прямую, при умножении — столько, сколько нужно было записать частных произведений. Счет костями, или пенязи, употреблялся при всех четырех арифметических действиях над целыми числами.

При сложении кости-слагаемые откладывали слева от вертикальной линии доски. Начинали сложение с единиц меньшего разряда и заканчивали единицами наивысшего разряда, а кости-сумму откладывали справа от вертикальной линии.

Для умножения на доске чертили вертикальную прямую, слева от нее откладывали множитель, а справа — множимое. Процесс умножения 96 на 66 показан на рисунке. Первую цифру множителя 6 сначала умножали на число единиц множимого 6, проводили вертикальную черту и произведение 36 помещали справа от нее. Затем число единиц множите-



Деление на счетной доске.



«Дщица счетная» для сошного письма.

ля 6 умножали на 90 и проводили вертикальную прямую, а справа от нее откладывали произведение 540. Далее число 60 множителя умножали на количество единиц множимого 6, проводили вертикальную линию и ставили произведение 360. Наконец, 60 умножали на число 90 множимого, проводили вертикальную черту и откладывали справа от нее 5400. Сложив полученные произведения, получали результат 6336. Способ умножения можно выразить формулой

$$\begin{aligned} 96 \times 66 &= (90 + 6) \times (60 + 6) = \\ &= 6 \times 6 + 90 \times 6 + 6 \times 60 + 90 \times \\ &\quad \times 60 = 36 + 540 + 360 + \\ &\quad + 5400 = 6336. \end{aligned}$$

При вычитании проводили две вертикальные прямые. Уменьшаемое ставили слева, а вычитаемое — справа от первой вертикальной линии. Вычитали на доске снизу вверх и разность располагали справа от второй вертикальной прямой.

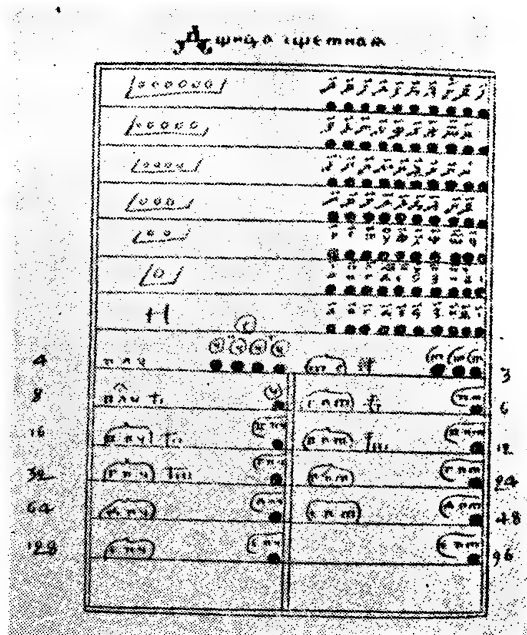
Процесс деления состоял в следующем. На счетной доске проводили две вертикальные прямые и между ними помещали делимое, а слева от первой линии — делитель на уровне делимого. Деление числа 23 456 на 23 показано на рисунке. Число 23 делили на 23. Одну кость откладывали справа от второй линии против трех костей делителя (а). Определив первую цифру частного, делитель помещали на одну линию ниже (б). Поскольку вторая горизонтальная линия в делимом свободна, в частном следующей цифрой был ноль. Затем снова делитель откладывали на одну линию ниже и делили 45 на 23. Одну кость ставили справа от второй вертикальной линии против трех костей делителя (в). Далее вычитали 23 из 45. Снова делитель помещали ниже на одну линию и делили 226 на 23, после чего 9 костей откладывали справа от второй вертикальной линии против трех костей делителя (г). Следовательно, частным от деления 23 456 на 23 является число 1019 с остатком 19.

При помощи счета костями выполняли не только четыре арифметических действия, но и вычисления с применением тройного правила. Об этом свидетельствует статья «О коли захоть тройною считати костями, или пенязи», включенная во многие рукописи первой половины XVII в.

Кроме счета костями, употреблялся так называемый дощаной счет. Прибор для дощаного счета состоял из бичевки с нанизанными на них костяшками. Способ вычислений в основном такой же, как и на счетах, хотя в деталях он и претерпевал изменения. Статья «О дощаном счете»

содержится во многих рукописях XVII в. Изложение сопровождается рисунками, которые могут служить иллюстрацией постепенного развития русских счетов. Основной текст статьи — описание «дощаного счета» — остается во всех рукописях почти без изменений.

В некоторых рукописях XVII в. встречаются рисунки с изображением «дщиц счетных», являющихся вариантом дощаного счета XVII в. Обычно эти рисунки встречаются парами. «Дщицы счетные» для сошного письма и денежного счета рукописи Q IX-13 представлены на рисунках. В рукописи F IX-47 приведена «Дщица счетная» только для сошного письма. Дщицы счетные отличались от дощаного счета только тем, что состояли из счетного поля, разделенного 13 или 12 прямыми линиями, из которых шесть нижних переделены пополам «перечнем». По обе стороны «перечня» снизу вверх на пяти линиях расположено по одной четке, на шестой линии слева от «перечня» — четыре, справа — три четки; во всех верхних рядах, кроме последнего, — по десять четок, в последнем, примыкающем к неполным, — только семь четок.



«Дщица счетная» для денежного счета.

4

Арифметика целых и дробных чисел

В русских арифметических рукописях XVII в. к арифметическим действиям отнесены нумерация, сложение, вычитание, умножение, деление и возвышение в степень. Извлечение корней из целых чисел излагается в геометрии.

В разделе о нумерации сообщается, что числа записываются с помощью десяти знаков. Первая цифра означает число единиц, вторая — число десятков, третья — число сотен и т. д. Разряды именовались: единицы, десятки, сотни, тысячи. Высшие десятичные разряды — «тьма». «Тьма тем» записывалась особым знаком. Затем дана таблица наименований десятичных разрядов великого счета, т. е. от 1 до 10^{46} или 10^{47} . В этой системе слово «тьма» обозначала 10^6 , легион — тьму тем, т. е. 10^{12} , леандр — 10^{24} . Промежуточные разряды составлялись из соответствующих основных, например сто тысяч тем легионов — 10^{23} .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	спсо ты (а)щѣ те	р	с	т	у	ф	х	у	ѡ	ц	с	и
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	дѣ(а)ть ты (а)щѣ те	і	к	л	м	н	ѡ	п	р	ѡ	ѡ	ѡ
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ты (а)ща те мѣ	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	то те мѣ	р	с	т	у	ф	х	у	ѡ	ц	с	и
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	дѣ(а)ть те мѣ	і	к	л	м	н	ѡ	п	р	ѡ	ѡ	ѡ
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на те мѣ	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	то ты (а)щѣ	р	с	т	у	ф	х	у	ѡ	ц	с	и
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	дѣ(а)ть ты (а)щѣ	і	к	л	м	н	ѡ	п	р	ѡ	ѡ	ѡ
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на ты (а)щѣ	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	сѣ	р	с	т	у	ф	х	у	ѡ	ц	с	и
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	дѣ(а)ть	і	к	л	м	н	ѡ	п	р	ѡ	ѡ	ѡ
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
17	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ
20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ѣ(а)на	а	в	т	а	ѣ	с	з	н	ѡ	ѡ	ѡ

Нумерация в рукописи Муз. Собр. № 2606.

В рукописях XVII в. дана таблица сложения, суммы чисел в которой кончаются числом 11. Сложение и вычитание многозначных чисел выполнялись так же, как это делается и в настоящее время. Знака действий не было в употреблении. Сложение проверялось правилом девятки, а вычитание — сложением.

Изложению умножения предшествовали таблицы умножения однозначных чисел в разных формах с описанием их употребления при вычислениях. Каких-либо объяснений составления этих таблиц нет. Кроме обычного способа умножения многозначного числа на многозначное описаны еще два способа. В первом из них действие умножения выполняется в обратном порядке. Множимое умножается на каждую цифру множителя слева направо, полученные произведения записываются одно под другим, сумма их и является произведением. Второй способ умножения двухзначного числа на двухзначное, известный в литературе как способ умножения в клеточках, упоминал еще Лука Пачоли, описавший его под названием «крестик без клеток». В некоторых рукописях указывается способ умножения однозначных чисел, больших пяти, соответствующий так называемому «правилу лентяя».

При умножении числа называли: множимое — верхней строкой, множитель — второй или нижней строкой, произведение — большим перечнем. Знака умножения не было. Правильность умножения проверяли с помощью правила девятки. Возвышение числа в натуральную степень выполняли последовательным умножением.

Из всех арифметических действий с целыми числами наибольшие затруднения вызывало деление. У разных народов мира существовало много различных способов деления. В русских рукописях XVII в.

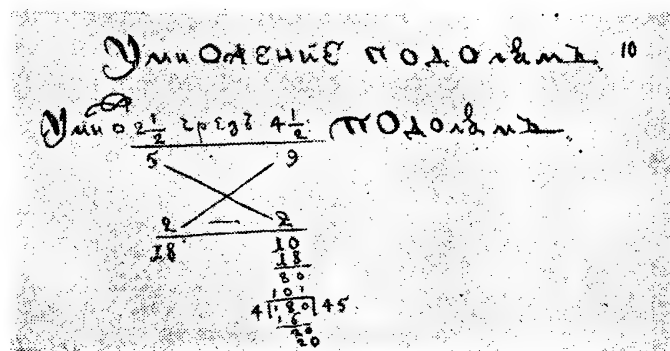
рассматривается деление многозначных целых чисел на однозначное, трехзначное и многозначное числа, при котором пользовались алгоритмом Евклида. Мы уже указывали ранее, как записывали делимое и делитель, в зависимости от величины делителя в сравнении с первой цифрой делимого. Деление проверялось с помощью правила девятки. Числа при делении называли: делимое — большим перечнем, делитель — деловым жеребьем, частное название не имело.

В русских математических рукописях первой половины XVII в. и их списках большое внимание уделено русской и западноевропейской метрологии. Описаны только сложение и вычитание именованных чисел. В рукописях конца XVII в. действия с именованными числами большей частью выполнялись только при решении задач, а способ их выполнения аналогичен современному.

В русских рукописях XVII в. изложению действий с дробями предшествовало описание сокращения дробей. Сокращение дробей выполнялось путем последовательного деления числителя и знаменателя на их общие множители или деления числителя и знаменателя на общий наибольший делитель, определявшийся с помощью алгоритма Евклида. Далее описана нумерация, сложение, вычитание, умножение и деление дробей. В нумерации запись и понимание числителя и знаменателя аналогичны современным.

Подробно арифметические действия с дробями изложены в рукописях первой половины XVII в. и их списках. В рукописях второй половины XVII в. они описаны на примерах без каких-либо объяснений или вовсе не описаны.

Рассмотренные в указанных рукописях действия сложения и вычитания дробей с одинаковыми и разными знаменателями отличаются



Умножение «крестиком» в рукописи № 1664.

Таблица умножения

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		9	12	15	18	21	24	27	30
4			16	20	24	28	32	36	40
5				25	30	35	40	45	50
6					36	42	48	54	60
7						49	56	63	70
8							64	72	80
9								81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Описание этой таблицы та же, что и у нас, то есть дано название умножения и деления, то есть то же, что и у нас.

Таблица умножения в рукописи № 1664.

от современных только формой записи и тем, что общий знаменатель находится во всех случаях как произведение знаменателей данных дробей. Например, сложение $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6}$ записывалось так:

$$\begin{array}{r} 24 \quad 25 \\ \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{49}{30} \quad 1 \frac{19}{30} \end{array}$$

Докладъ на ннн 3 до нн
 3 2 3 4 аннннннннннннн
 Сортнннннннннннн

1	полонина	9	Дейти
2	2	10	Дейти
2	2	10	Дейти
3	2	11	Дейти
3	2	11	Дейти
4	2	12	Дейти
4	2	12	Дейти
5	2	13	Дейти
5	2	13	Дейти
6	2	14	Дейти
6	2	14	Дейти
7	2	15	Дейти
7	2	15	Дейти
8	2	16	Дейти
8	2	16	Дейти
9	2	17	Дейти
9	2	17	Дейти

Эри разотнннннннннннн

Запись дробей в рукописи Муз. Собр. № 2606.

Умножение и деление рассматриваются в таком порядке: дроби на дробь, целого числа на смешанное, дроби на целое число и смешанного числа на смешанное. Выполнение этих действий аналогично современному, отличие состоит только в форме записи. Например, деление

$3\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$ записывалось так:

$$\begin{array}{c}
 7 \quad 3 \\
 3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2 \\
 14 \\
 6
 \end{array}
 \quad
 2\frac{2}{6} \text{ станет } 2\frac{1}{3}.$$

Кроме арифметических действий с дробями в обычном смысле в рукописях описаны действия с дробями от дробей.

Арифметические задачи и методы их решения в русских математических рукописях XVII в.

Содержание арифметических задач, описанных в русских арифметических рукописях XVII в., очень разнообразно. Они разделены на две основные группы. Задачи первой группы служат для обоснования приемов решения. Ко второй группе относятся задачи с практическим содержанием. Встречаются также занимательные задачи. Особое внимание уделено простому тройному правилу для целых и дробных чисел, соответствующему случаю прямой пропорциональной зависимости. Примером изложения этого правила может служить следующая задача: «Смотри, как 3 чети аршина дал 3 алтына; что дати за 100 аршин».

Решение: $\frac{3}{4}$ даст 3, что даст 100

$$\frac{300}{1} \quad \frac{3}{4} \quad 1200 \quad 400.$$

Значительное место в русских рукописях XVII в. занимает способ пропорционального деления. Описания способа нет, но при помощи его решен ряд задач, например задача из «Статьи деловой» (рукописи Муз. Собр. № 982): «Хош делити 12 рублей на 2 жеребья, первому жеребью взяти $\frac{2}{3}$, а другому взяти $\frac{3}{4}$. Ино сколько которому взяти»⁴. Решение: $\frac{2}{3}$ от 12 составляет 8, $\frac{3}{4}$ от 12 дает 9; $8 + 9 = 17$. По тройному правилу находим: первый получит $5\frac{11}{17}$, второй — $6\frac{6}{17}$ руб.

Многие задачи в русских рукописях XVII в. решены по способу приведения к единице. Рассмотрим задачу из «Статьи спрашивальной современы» рукописи Муз. Собр. № 982: «Некий человек один выпьет кадь квасу в 14 дней, а как учнет с ним жена его пити и они выпьют ту кадь в 10 дней. Ино в сколько дней ту кадь жена его одна выпьет». Решение: $14 - 10 = 4$. «Умножи 14 с 10 придет 140, дели ту ж 140 на 4 станет 35». Кадь квасу жена одна выпьет за 35 дней. При решении задачи объем бочки принимали за единицу, т. е. решение задачи выполнено по способу приведения к единице.

Во многих случаях способ приведения к единице использован в весьма оригинальной форме. Например, задача из «Статьи деловой» рукописи Муз. Собр. № 982: «Хош делити 100 на 2 жеребья так как умножаем меньшей перечень с четырьмя ино придет как большой перечень разделим на 3 сколько которому досталось». Решение: предполагается, что бóльшая часть равна 12, $12 : 3; 4 : 4 = 1$, следовательно,

⁴ В условиях задачи выражение «первому жеребью взяти $\frac{2}{3}$, а другому взяти $\frac{3}{4}$ » следует понимать так: 12 руб. надо разделить в отношении $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, т. е. в отношении 8 : 9. Все приведенные нами решения взяты из рукописей.

меньшая часть — 1. Тогда 100 делим на 2 части, пропорционально числам 12 и 1. По тройному правилу определяем каждую часть: $92\frac{4}{13}$ и $7\frac{9}{13}$ руб. Здесь за условную единицу принимают 12. Тогда соответствующие искомые части выражаются целыми числами и дальнейшие вычисления упрощаются по сравнению с решением по обычному способу приведения к единице.

Не менее важное значение авторы русских рукописей XVII в. придавали правилу ложных положений. В «Статье фальшивой или збойливой» формулировка правила иллюстрируется задачами. Например: «Найди ми то число что умножая с 14 да тот умножалный перечень делил на 4 и на $\frac{2}{3}$ стало ми из делу 18». Решение: пусть искомое число 8; умножив 8 на 14 и разделив результат на $4\frac{2}{3}$, получим 24. Полученное число больше требуемого по условию задачи на 6. Предполагая, что искомое число 7 и выполнив требуемые по условию задачи вычисления, получим 21, т. е. число, больше требуемого по условию задачи на 3. Далее записываем:

$$\begin{array}{rcccl}
 & \ll 8 & & & 5 \\
 & & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & & 3 \text{ деловое} \\
 7 & 7 & & & 3 \\
 6 & \frac{6}{42} & & & \frac{8}{24} \quad 18 \text{ 6 то есть число} \gg \\
 & & & & 3 \\
 & \frac{24}{18} & & &
 \end{array}$$

Следовательно, искомым числом является 6.

Правило ложного положения фактически состоит в следующем. Пусть надо решить уравнение

$$ax + b = 0.$$

Выбираем произвольные x_1 и x_2 и вычисляем:

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Легко проверить, что искомое значение x выражается формулой⁵

$$x = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

Наряду с правилом ложного положения в русских арифметических рукописях второй половины XVII в. рассмотрены также другие приемы решения линейных уравнений с одним неизвестным и систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

⁵ Б. В. Гнеденко. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат, М.—Л., 1946, стр. 46.

В статье «Иная практика в долях тройная» рукописи Муз. Собр. № 982 рассмотрена задача: «Найти ми то число что аз делил на $\frac{3}{4}$ и вышло жеребей умножал с $\frac{3}{5}$ и пришло $\frac{5}{6}$ ». Способ решения записан в виде линейного уравнения с одним неизвестным:

$$\frac{x}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{6},$$

откуда $x = 1\frac{1}{24}$.

Задача из рукописи Чертк. № 372: «Купил мех перцу, платил по 2 алтына и затем осталось у меня 6 алтын 1 деньга, и я платил за фунт по $2\frac{1}{2}$ алтына, ино у меня недостало 7 алтын с копейкою, сколько перцу у том меху было, и сколько денег платил». Решение: «2 алтына = 12 денег, 6 алтын 1 деньга = 37 денег, $2\frac{1}{2}$ алтына = 15 денег, 7 алтын с копейкой = 44 деньги». «Выниже платеж, из платежу же 12 денег из 15 де, останется 3 деньги, то станет деловой сложи остатки вместе с недостатком 37 да 44 деньги, станет 81 деньга, дели же то на 3, придет 27 фунтов, столько в том мехе перцу».

Сумма уплаченных денег вычислена по тройному правилу. Она равна 27 алтынам 5 деньгам. Как видим, решение задачи приводит к уравнению

$$12x + 37 = 15x - 44,$$

где x — количество фунтов перца. Отсюда: $x = 27$.

Третий пример взят также из рукописи Черт. № 372: «Купил в рознь 5514 фунтов пороху за все деньги 352 рубля 8 копейки и 3 полушки, а покупал фунт за 2 алтына с полукопейкою, и по 2 алтына с деньгою. Сочти ми сколько фунтов коею ценою купил».

Задача приводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 25x + 26y &= 141135, \\ x + y &= 5514, \end{aligned}$$

где x — число фунтов пороха, купленного по 25 полушек, y — число фунтов пороха — по 26 полушек. Получаем $x = 2229$, $y = 3285$.

В рукописях встречаются также задачи, решаемые по правилу ложного положения или с помощью соответствующей системы уравнений, например двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим задачу из рукописи Черт. № 372: «Двадцать четыре скотины быков, да овец, да свиней, съели в три месяца 64 гривны, быки ели по 6 гривен, овцы ели по 4 гривны, свиньи ели по 2 гривны, сколько которой животины было». Способ решения задачи эквивалентен решению системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 24, \\ 6x + 4y + 2z &= 64, \end{aligned}$$

где x — число быков, y — число овец, z — число свиней. В итоге получено уравнение $2x + y = 8$. Ответ: 4 — «столько станет овец».

В этой же рукописи есть задача, решенная с помощью алгоритма, соответствующего решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными.

В западноевропейских руководствах по арифметике к арифметическим действиям отнесены прогрессии. В русских рукописях XVII в. рассмотрены задачи двух типов на вычисление членов и суммы геометрической прогрессии со знаменателями 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (см. рукопись ОЛДП(ОШ) 28) и арифметические задачи на прогрессии. К первому типу относится, например, задача из рукописи Рогож. клад. № 28: «Идут 7 баб, а у всякие бабы по 7 посохов, а на всяком посохе 7 рогов, а на всяком роге по 7 кошелей, а во всяком кошеле по 7 пирогов, а во всяком пироге по 7 воробьев. И того станет баб и посохов, и рогов, и кошелей, и пирогов, и воробьев числом 117 649». Искомое число получается в результате несложных действий.

Ко второму типу относится, например, задача из рукописи Чертк. № 372: «Два человека имели торг меж себя, у одного лошадь, у другого булавки, просил один за лошадь цены 450 рублей, или ты дал за нее булавками, западковной един гвоздь булавку, а за прочие вдвое. А гвоздей подковных у лошади было 24; а булавками цена по 5 алтын 1000 булавок. Другой невосхотел деньгами цены дать дал булавками. Сочти ми кому удалось, тому ли кто лошадь взял, а булавки дал, или тому, кто лошадь дал и булавки взял». Ответ. «Удача первому за 24 гвоздя булавок 16 777 215, т. е. 2516 рублей 58 копеек. Да в остатках 225 булавок». Решение: члены геометрической прогрессии со знаменателем 2 вычисляются последовательным умножением; затем указывается сумма 24 членов этой прогрессии (16 777 215) и по тройному правилу вычисляется стоимость всех булавок — 2516 руб. 58 коп. и 225 булавок «в остатках».

Заключительный отдел русских арифметических рукописей XVII в. обычно составляли занимательные задачи «Для изощрения ума». В большинстве рукописей к ним отнесены задачи: «О трех зерщиках» и «О деньгах в куче ведать».

Интересен заключительный отдел «О задачах шутливых через арифметику» рукописи Чертк. № 372, в котором рассмотрены три задачи одного типа. Оригинальные по содержанию способы их решения связаны с решением системы линейных сравнений с простыми модулями⁶.

Таким образом, задачи в русских математических рукописях XVII в. классифицируются по содержанию и способам их решения. Кроме названных типов задач в них рассмотрены задачи на процентные вычисления, на смешение, на движение и т. п. Решение их выполнено по указанным выше способам.

⁶ А. П. Ю ш к е в и ч. Об одной задаче теории чисел в русских математических рукописях XVII в. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 17. М., 1957.

Первоисточники русских арифметических рукописей XVII в.

О первоисточниках русских арифметических рукописей XVII в. существуют различные мнения. Некоторые исследователи считают, что эти рукописи являются пересказом или переработкой западноевропейских руководств XV—XVII вв. На самом же деле русские рукописи того времени отражают оригинальное творчество русских просветителей, ученых и народа в целом. Конечно, в развитии науки, просвещения и культуры различных стран не обходится без взаимного влияния, но основной путь этого развития в каждой из них должен быть установлен на основе тщательного анализа.

Русские арифметические рукописи XVII в. по содержанию имеют некоторые общие черты с отдельными западноевропейскими учебниками арифметики, но и от них они отличаются изложением материала и наличием многих типов задач с решениями. В русских рукописях, как и в западноевропейских, не указываются знаки действий. Однако в русских рукописях для наименования компонентов рассматриваемых действий выработалась постоянная оригинальная терминология, в учебниках же Западной Европы наименования сложения и вычитания нет, а терминология умножения и деления не постоянна. В первых западноевропейских учебниках арифметики излагается только арифметика на линиях, дается описание счетной доски, четырех арифметических действий и решение задач с помощью простого тройного правила, а в русских арифметических рукописях нашло широкое применение употребление русских счетов, которые были хорошо известны в России в XVII в. и не известны в Западной Европе⁷.

В западноевропейских учебниках арифметики после действий с целыми числами излагаются метрология и действия с именованными числами. Зачастую действия с именованными числами не отделяются от действий с целыми числами. В русских рукописях первой половины XVII в. рассматривается только сложение и вычитание именованных чисел. Раздробление и превращение этих чисел излагается вместе с тройным правилом. В некоторых рукописях здесь же излагается сошное письмо, которое было создано на Руси еще в XV в. Арифметика целых чисел представляет собой оригинальное построение и изложение способов действий над ними, в том числе не известных в Западной Европе (дощаной счет, сошное письмо и др.).

Авторы русских рукописей понимали под дробью часть некоторой величины: золотника, деньги и т. д. В XV—XVI вв. учение о дробях уже получило стройную систему и оформилось приблизительно в те же разделы, которые встречаются в наших современных учебниках. Процесс этого формирования ярко выражен в русских арифметических

⁷ И. Г. С п а с с к и й. Происхождение истории русских счетов.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952.

рукописях. Изложение дробей отличается от изложения в руководствах по арифметике Западной Европы. Например, сокращение дробей в русских рукописях излагается дважды: сначала в связи с делением целых чисел с остатком, а затем в разделе о дробях. Преобразование дробей не концентрируется в отдельном разделе, а рассматривается при изложении арифметических действий с дробями. Обращает на себя внимание описание различных случаев действий с дробями. В русских рукописях встречаются некоторые арифметические действия очень древнего происхождения, ведущие свое начало по крайней мере от древнегреческого математика Герона Александрийского (II в. до н. э.), например действия с долями от долей. Вычисление долей от долей описано у Леонардо Пизанского. В западноевропейских руководствах по арифметике XV—XVII вв. действия с долями от долей не встречаются. Изложение материала о действиях сложения, вычитания, умножения и деления дробей в русских рукописях и западноевропейских руководствах XV—XVII вв. почти одинаково. Однако в форме записи вычислений в действиях с дробями для русских рукописей характерны оригинальные приемы, созданные отечественными авторами.

В западноевропейских учебниках не одинакова классификация задач. Одни авторы классифицируют задачи по методам их решения (Фарманкович, Ризе), другие придерживаются смешанной классификации задач по методам решения и содержанию их одновременно (Ян из Ланцуты, Клос). Последнего принципа классификации задач придерживаются и авторы русских рукописей. Задачи в рукописях распределены по статьям, название которых связано с методами решения задач и их содержанием. Большинство названий этих статей отражает интересы торговли того времени («Торговая», «О нечисти во всяких овощах и в товарах», «Меновая в торгах», «Складная торговая» и др.). Таким образом, даже названия статей свидетельствуют о связи арифметики с практикой. В то же время происхождение их связано с историческим прошлым развития математики. Так, названия «Статья тройная в целых и в долях всяких», «Статья тройная в долях» происходят от известного в глубокой древности метода решения задач «тройной строки». В рукописях излагается сначала тройное правило для целых чисел, а затем — для дробей.

В учебниках Западной Европы конца XV—XVII вв. большое место отведено правилу одного и двух ложных положений. В русских рукописях излагается только правило двух ложных положений. Ему посвящена «Статья фальшивая или збойливая». Название этой статьи восходит к глубокой древности. После изложения правила двух положений рассматриваются соответствующие задачи.

В западноевропейских руководствах введены названия разделов. Однако в них нет названий разделов или правил, в которые можно было бы включить статьи: «Статья о нечисти во всяких овощах и в товарах», «Статья торговая складная», «Статья торговая сложились прикащики», «Статья торговая складная с прикащики». В меньшей мере, чем в западноевропейских руководствах по арифметике, в русских рукописях наблюдается непостоянство состава отдельных типов «статей» (задач).

В западноевропейских руководствах по арифметике XV—XVII вв. значительное внимание уделяется занимательным задачам. В начале XVII в. были даже составлены специальные сборники таких задач (Бапье, Озанам). В русских рукописях занимательные задачи входят в заключительный раздел и представляют собой в значительной части оригинальное творчество. Весьма распространены были задачи «о плотниках», «о яйцах», «о хождении юношей», «о льве, овце и волке», «о трех зерщиках». В рукописи Рогож. клад. № 23 рассмотрены две весьма интересные задачи на геометрические прогрессии. Одна из них — русская переработка известной задачи «о семи старухах» из «Книги об абак» Леонардо Пизанского. Она восходит к временам папируса Ахмеса.

Таким образом, в русских рукописях XV—XVII вв. задачи в преобладающем большинстве представляют собой оригинальное творчество русских авторов.

Рассмотрим вопрос о методах решения арифметических задач, приведенных в русских рукописях XVII в.

Тройное правило получило свое начало у индусов. Особое внимание начали уделять ему с XVI в., с того времени, когда европейская торговля и промышленность получили значительное развитие. В немецких учебниках о нем отзывались как о таком, которое выше всяких похвал. оно «ключ купцов». У французов оно называлось «золотым правилом». Обычно в книгах по арифметике рассматривали прямое тройное правило (случай прямой пропорциональности), обратное тройное правило (случай обратной пропорциональности) и тройное правило для дробей, а также различные частные случаи тройного правила, которые, по мнению авторов, были необходимы при решении задач. Однако объяснения к этому правилу были совершенно неудовлетворительными. В русских рукописях оно излагается в более общем виде. Это дало возможность сократить число частных случаев. Например, в западноевропейском руководстве Клоса рассмотрено семь частных случаев, в рукописи же Муз. Собр. 982 в «Статье торговой» — лишь два случая.

Правило пропорционального деления восходит ко временам папируса Ахмеса (задача: «Разделить 700 хлебов между 4 лицами так, что первый получает $\frac{2}{3}$, второй получает $\frac{1}{2}$, третий $\frac{1}{3}$, четвертый $\frac{1}{4}$ »).

В «Книге об абак» Леонардо Пизанского помещено много задач на пропорциональное деление. Почти все они касаются деления прибыли пропорционально капиталам или капиталам и времени, причем часто указываются не сами капиталы, а их отношения. Большое внимание этим задачам уделяет Лука Пачоли. В русских рукописях рассматриваются задачи на правило пропорционального деления с подробными решениями, без каких-либо объяснений самого содержания правила.

Задачи на смешение восходят к временам Древнего Египта. В русских рукописях такие задачи помещены в «Статье о нечисти во всяких овощах и в товарах». Следует полагать, что задачи на смешение заимствованы у восточных авторов.

Учение о процентах было известно еще в древние времена, но в различных государствах к нему по-разному относились. У индусов и ара-

бов задачи на проценты были в арифметической практике. У римлян допускались только простые проценты. В средние века, особенно в XII—XIV вв., взимание процентов при ссудах воспрещалось церковью и государством. Поэтому в западноевропейских руководствах такие задачи попадались редко, хотя в частной практике, среди торговцев и феодалов, взимание процентов было, безусловно, распространенным делом. В русских рукописях задачи на проценты помещены в двух статьях: «Статье торговой», «Статье ростовой и добыточной и прибыльной». Даны два типа задач: по известному проценту найти процентные деньги и по известным процентным деньгам определить сумму, на которую они начисляются.

В русских рукописях рассматривается метод двух ложных положений. Его применяли китайцы, индусы и некоторые другие народы. Арабы придали ему форму, в которой он вошел во многие европейские руководства, в том числе и русские. Правило двойного ложного положения, по-видимому, берет свое начало в Китае, где, как и в русских рукописях XVII в., оно было простейшим алгоритмом для решения сложных практических задач⁸.

С древних времен до середины XIX в. сведения о прогрессиях составляли неотъемлемую часть западноевропейских математических руководств. В русских рукописях задачи на прогрессии появились во второй половине XVII в. (Рогож. клад. 23, Черт. 372, ОЛДП (ОШ) 28).

Одним из типов задач, рассмотренных в русских рукописях, являются задачи на развлечения («о трех зерщиках», «о яйцах», «о деньгах в куче ведати», «о ефимочном и золотом персневом вынимании» и др.). Подобного рода задачи встречаются также у Клода Гаспара Баше.

Таким образом, в русских рукописях XVII в. для решения задач использовались методы, созданные русскими авторами, а также методы, указанные в иностранных источниках, в том числе сложившиеся в более древние времена, например у индусов, китайцев и арабов. Последние во многих случаях в русских рукописях XVII в. изложены лучше, чем в западноевропейских руководствах по арифметике XV—XVII вв.

Русские арифметические рукописи XVII в. являются оригинальными произведениями. Их авторы были хорошо знакомы с современной им учебной литературой Западной Европы. Тщательно подобранный ими материал сконцентрирован по отдельным вопросам и правилам. Объяснения изложены подробно и сопровождаются многочисленными задачами с детальными решениями. Последнее обстоятельство весьма выгодно отличает русские рукописи от западноевропейских учебников. Даже заимствованный из иностранных источников материал не скопирован русскими авторами, а творчески использован с хорошим пониманием сути вопроса и знанием математического наследия древних

⁸ М. Я. В ы г о д с к и й. Происхождение «правила двух ложных положений». — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.

народов (индусов, китайцев, арабов, римлян и греков). Творчество русских авторов проявилось также в тщательном отборе материала для составления рукописей и в своеобразном изложении этого материала с учетом практических потребностей Руси XVII в. и требований развития отечественного просвещения. Большинство задач, содержащихся в русских рукописях, является творчеством русских авторов и не встречается в иностранных источниках. Даже задачи, сходные с задачами, включенными в иностранные пособия, представлены в новых вариантах. Для решения задач русские авторы создали свои методы, а также использовали методы, сложившиеся в процессе развития математики у восточных народов.

7

Геометрия в рукописи „Синодальная 42“

К математическим рукописям XVII в., содержащим сведения по геометрии, относятся: два учебника геометрии (рукописи «Синодальная 42» и F IX-47); книга сошного письма; рукопись бывшей библиотеки Московского архива Министерства иностранных дел № 549 (в старом каталоге № 1043); рукопись Археографической комиссии № 29; рукопись библиотеки редакции журнала «Физико-математические науки в их настоящем и прошлом»; рукописи Собр. Унд. 833, Собр. И. Д. Беляева № 70/1572, КП 178/1928, Q XVII в.; рукопись F IX-3, представляющая собой часть «Устава ратных, пушкарских и других дел», изданного в 1777 и 1781 гг. в двух частях, а также отдельные разделы или параграфы (статьи), посвященные геометрии, некоторых общих рукописей (сборников).

Рукопись «Синодальная 42» представляет собой единственный сохранившийся до наших дней русский учебник по теоретической геометрии начала XVII в., в котором дано систематическое изложение геометрии в элементарной форме. Рукопись состоит из двух предисловий и двух книг о планиметрии. Каждая из них состоит из двух частей. Изложение материала сопровождается большим количеством чертежей, а также гравюрами, вырезанными из геометрической книги (вероятно, латинской, насколько об этом можно судить по обрывкам слов, сохранившимся на краях гравюр). В первом предисловии назван составитель рукописи — «Ивашко, князь Елизарьев». В первой части первого предисловия почти дословно изложено содержание первой части («О величинах») «Геометрии» Рамуса. «Начала философии, риторики и иных мудростей, относящихся к геометрии», указывает автор, собраны из различных «старинных мудростей и книг». Приведены многочисленные сведения по философии, истории и географии, даты различных событий.

Первая часть первой книги в основном содержит планиметрические определения. Она состоит из 47 глав. В первых трех главах даны определения основных геометрических понятий: линии, поверхности, тела. Следующие четыре главы посвящены углам. Автор различает углы, образуемые двумя прямыми и прямой с кривой, иллюстрируя это

чертежами. В восьмой главе даны определения фигур по Евклиду и помещены изображения окружности, треугольника и прямоугольника. Главы 9—14 посвящены окружности и кругу. Дальнейшие главы весьма разнообразны по содержанию: определения прямолинейной фигуры, равностороннего треугольника (здесь же отмечается, что каждый из острых углов равностороннего треугольника равен «6-й доли венца»⁹; определения равнобедренного и неравностороннего (в разных вариантах) треугольников, четырехугольников; понятия о гномоне, вписанных и описанных фигурах; определения высоты треугольника и прямоугольной фигуры; определения параллельных прямых отрезка, разделенного в крайнем и среднем отношении. 36-я глава посвящена определению площади. Вводится понятие площади квадрата как «силы черты» (если длина стороны квадрата равна 4 единицам, то «сила черты» равна 16 единицам), а также рассматривается понятие диагонали, причем отмечается, что площадь квадрата, построенного на диагонали, равна сумме площадей двух квадратов, построенных на данных сторонах. В следующих главах вводится понятие средней пропорциональности между всем отрезком и данной его частью. Подобие фигур (40-я глава) дано по Евклиду, и в качестве примера подобных фигур приведены два прямоугольника со сторонами 24×8 и 18×6 единиц, а понятие равновеликих фигур, изложенное в рукописи, не является евклидовым, и в качестве примера рассматриваются два прямоугольника со сторонами 20×9 и 15×12 единиц. Заключительные главы посвящены градусной мере. Дано понятие об измерении углов дугами в градусной мере. Окружность делится на 360 градусов, градус — на 60 минут (или «дробные»), минуты — на 60 секунд («вторые доли»). Рассматривается понятие четверти круга, содержащей 90° («четвероуголие»), изучаются углы, меньшие 180° и дополняющие их до 180° .

Вторая часть первой книги содержит планиметрические теоремы, служащие в основном для измерения площадей основных плоских фигур или выражающие их важнейшие метрические свойства. Кроме традиционного материала «Начал» Евклида изложены также теоремы из известного сочинения Архимеда «Об измерении круга» и некоторые другие сведения, например теорема Паппа Александрийского. Характерна структура каждой теоремы «видения» (по терминологии автора). Сначала формулируется теорема, затем подробно объясняется ее смысл и даются элементы доказательства, не всегда, впрочем, полные. В объяснениях обыкновенно даны ссылки на предыдущие теоремы и упоминаются первоисточники (Евклид, Пифагор, Архимед, Рамус и другие авторы). Утверждения, содержащиеся в этой части рукописи, делятся на группы. Утверждения первой группы излагаются по Евклиду, второй — по неизвестному автору и третьей — по другим греческим авторам, взятым из сочинения Архимеда «О круге».

Первая глава второй части посвящена изложению теоремы о сумме двух смежных углов и попытке ее доказательства. Вторая глава содержит изложение четвертого следствия аксиомы параллельности. В после-

⁹ «Венцом» Елизарьев называет окружность.

дующих двух главах формулируются предложения о площадях квадратов, соответствующие алгебраическим равенствам

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}; \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Первое из этих равенств дано без ссылки на какой-либо источник, второе — по Евклиду. В пятой главе рассматриваются параллелограммы, в следующих трех — теорема Пифагора и ее обобщение для тупоугольного треугольника. В 9-й главе формулируется теорема Евклида: в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, образует два треугольника, подобные данному и между собой. Новые варианты этого предложения содержатся в 70-й и 71-й главах. Далее излагаются теоремы Евклида об углах и сторонах треугольника, теорема Евклида о равенстве двух треугольников, предложения о свойстве перпендикуляра в равнобедренном треугольнике, геометрически истолковывается утверждение, что для равнобедренного треугольника ABC с высотой BF справедливо соотношение

$$AB^2 = BF^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2.$$

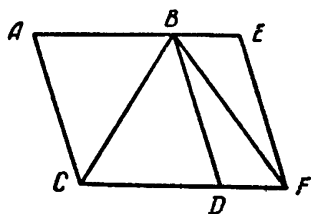
В 20-й главе формулируется теорема, обратная теореме Пифагора, в 21-й — свойства биссектрисы угла треугольника, в 22-й — лемма о свойстве прямой, проведенной в треугольнике параллельно его стороне. В 23-й главе сообщается теорема о свойстве перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, в 24—25-й рассматриваются теоремы о площадях треугольников. Равновеликим геометрическим фигурам посвящены главы 26—28. В главе 35 предлагается теорема: площади параллелограммов $ABDC$ и $BEFD$ относятся, как площади треугольников CBD и DBF (см. рисунок). В главах 32, 36 и 37 рассматривается свойство диагоналей параллелограмма, геометрическая интерпретация тождества

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

и теорема о свойствах отрезков, образованных при пересечении хорд в круге. В главах 38—40 излагаются правила для вычисления площади прямоугольника, произвольного правильного многоугольника, теорема о пересечении сторон угла рядом параллельных прямых, а также сообщаются сведения о пропорциональности отрезков и подобии фигур.

В главах 41—43, 47, 49 изложены следующие сведения и предложения без ссылок на первоисточники: геометрическое истолкование третьей и четвертой пропорциональной с примерами; сторона пятиугольника есть среднее геометрическое между его диагональю и большим отрезком диагонали, образуемым ее пересечением с другой диагональю; в произвольных многоугольниках с соответственно равными углами стороны пропорциональны. Главы 50—58 посвящены углам в окружности, свойствам диаметра, хорд, касательных и секущих.

Вторая книга рукописи делится также на две части, по нумерации рукописи — это третья и четвертая части. Третья часть содержит 99



Теорема об отношениях площадей параллелограммов и треугольников.

предложений (теорем), четвертая — 33. Вторая книга посвящена геометрическим построениям на плоскости, в ней рассмотрены также задачи вычислительного характера. Каждая задача называется «проведение» (построение). После формулировки задачи, как правило, описывается построение, часто с элементами доказательства и ссылками на соответствующий теоретический материал, а также приводится чертеж. Большинство построений выполняется по Евклиду. Некоторые предложения (26—29)

посвящены построению фигур, равновеликих заданным (преобразовать пятиугольник в равновеликий четырехугольник; построить треугольник, равновеликий данному, так, чтобы высотой его был заданный отрезок; построить четырехугольник, равновеликий данным четырехугольникам). Затем дано определение двух отрезков, пропорциональных квадратам данных чисел.

Следующая группа предложений (31—34) связана с построениями в окружности. В предложении 34 речь идет об определении центра круга, вычислении диаметра по заданной хорде и высоте соответствующего сегмента. В предложениях 35—44 описаны построение треугольника, вычисление его высоты и площади, причем сначала рассматривается равносторонний треугольник, а затем прямоугольный, равнобедренный и разносторонний треугольники. Евклидовыми являются предложения 35 и 43.

В следующих пяти теоремах (45—49) автор ограничивается только построением треугольника по заданным условиям. Из них по Евклиду даны теоремы 48 и 49. Построению четырехугольников (квадрата, ромба, параллелограмма) и многоугольников и вычислению их площадей посвящены предложения 50—64. Из них по Евклиду даны предложения 50, 56, 63. Эти предложения для всех четырехугольников, кроме квадрата, изложены в таком порядке: первое предложение — построение, второе — вычисление площади. Для правильного пятиугольника дано птолемево построение.

Предложение 65 представляет собой вариант теоремы Пифагора, данный по Евклиду. Последующие теоремы (66—71) посвящены вычислению длины окружности, площади круга и их частей (полукруга, сектора, сегмента и т. д.). В предложении 72 рассматривается вычисление площади неправильного и невыпуклого многоугольника путем его разбиения на треугольники. Заключительный раздел третьей части рукописи содержит предложения 73—99, посвященные построению равновеликих фигур (треугольника, квадрата, ромба, параллелограмма, многоугольника). Из них только предложение 88 дано по Евклиду.

Нумерация предложений в четвертой части продолжается (от 100 до 132)¹⁰. Предложения 100—107 посвящены построению равновеликих

¹⁰ № 108—110 в рукописи нет.

фигур. По Евклиду даны предложения 100, 101 и 105. В этих задачах речь идет о построении фигуры, равновеликой двум или даже пяти заданным фигурам. Предложения 111—122 содержат задачи об описании окружности вокруг треугольника, квадрата, правильного пятиугольника и правильного шестиугольника и вписывании окружности в них. В предложении 123 рассмотрено деление треугольника на несколько равных частей, удовлетворяющих некоторому условию. Остальные предложения (124—132) представляют собой различные варианты предложения 124: разделить треугольник прямой на два треугольника так, чтобы площади их находились в данном отношении и делящая прямая проходила через вершину данного треугольника.

Как видим, рукопись Елизарьева составлена по типу учебников и включает в себя почти весь известный в то время материал по элементарной геометрии. Этот материал излагался во многих практических учебниках по геометрии XVI—XVII вв., однако в них не всегда включались задачи на построение, а если они и давались, то не выделялись в отдельный раздел, как это сделано в рукописи «Синодальная 42». К задачам на построение Елизарьев прибавляет небольшое число задач вычислительного характера, составленных им, очевидно, самостоятельно. Геометрический материал изложен в рукописи на высоком для того времени уровне. Автор рукописи, безусловно, был знаком с основными источниками и руководствами по геометрии. В его распоряжении, очевидно, были «Начала» Евклида, сочинения Архимеда, а также учебники Рамуса и Спейделя.

Таким образом, в первой половине XVII в. в России был подготовлен учебник, пригодный для обучения геометрии и отвечающий требованиям, предъявлявшимся в то время к элементарным пособиям такого рода. Рукопись Елизарьева не была издана и не получила, вероятно, распространения в списках. Тем не менее ее появление свидетельствует о том, что в те времена в России были высокообразованные люди, интересовавшиеся «светскими» науками и желавшие приложить силы к их распространению. Сам факт возникновения рукописи свидетельствует также об известной потребности в такого рода пособиях и подтверждает предположения о сравнительно высоком уровне математических знаний в России того времени.

Рукопись Елизарьева по содержанию превосходит все известные в настоящее время другие русские геометрические рукописи XVII в., геометрическую часть «Арифметики» Л. Ф. Магницкого и даже книги по геометрии издания 1708¹¹ и 1714 гг.¹² Известные геометрические рукописи начала XVIII в. носят прикладной характер и содержат более узкий круг сведений. В печатной же литературе по геометрии начала XVIII в. очень мало сведений теоретического характера. «Геометрия, словенски землемерие...» посвящена в основном геометрическим построениям и преобразованиям. В «Геометрии-практике...» приведены

¹¹ Геометрия, словенски землемерие... М., 1708 (переиздания — 1709 и 1725 гг.).

¹² Геометрия-практика с фигурами. СПб, 1714.

преимущественно сведения для вычислений. Изданные в переводе Саттарова в 1739 г. и сокращенные проф. А. Фархварсоном «Евклидовы элементы» (8 книг) приспособлены для первоначального обучения.

Только в середине XVIII в. появились печатные учебники по геометрии¹³, которые как с точки зрения теоретических обоснований, так и по объему содержащегося материала стояли выше рукописи Елизарьева.

Значительную работу выполнил Елизарьев по выработке геометрической терминологии. Избегая во многих случаях иностранных терминов, Елизарьев смело вводит русские слова взамен иностранных, идя в этом отношении, может быть, даже дальше некоторых авторов более позднего времени. Математическая, в частности геометрическая, терминология русских рукописей того времени послужила определенной основой для дальнейшего ее совершенствования в последующих руководствах по математике.

8

Рукописные практические руководства по геометрии XVII в. и их источники

Уже в начале XVII в. был создан практический курс геометрии. Он включает ряд вопросов геометрии, входящих в значительную часть русских геометрических рукописей XVII в. Полное представление о практической геометрии в России XVII в. дает рукопись «Книга именуема геометрия или землемерие радиксом и циркулем» (F IX-47).

В предисловии «Землемерией, елински геометрия: мудрость в седми свободных мудростей» дано определение геометрии: «Землемерие или землемерство елински геометрия, сиречь размерительная, есть сие художество дело полезно к размерению градостроения и путем и ко иным вещам паче большому».

Первая статья рукописи «Первое напишут о делении мер разных в четвероугольном сочинении» начинается с правила извлечения корня. Затем рассмотрены три группы задач. Первая группа задач посвящена определению стороны квадрата, равновеликого площади поля в форме произвольной фигуры, вторая — определению площади прямоугольного поля и стороны равновеликого ему квадрата и третья — вычислению площади прямоугольного поля, стороны равновеликого квадрата и периметра прямоугольника.

Статья «Что такое место по округе ведать вдоль и поперек» содержит две строки. Первая строка включает задачи, в которых по периметру поля определяется площадь поля и сторона равновеликого ему

¹³ Г. В. Крафт. Краткое руководство к теоретической геометрии. СПб, 1748, 1762 и др.

квадрата. Вычисление площади поля по его периметру соответствует формуле

$$S = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

где p — периметр, S — площадь поля. Формула справедлива только для квадрата. В рассмотренных задачах нет каких-либо указаний о форме поля. Сторона квадрата, равновеликого ему по площади, вычисляется правильно.

В рукописи ОЛДП (ОШ) 28 описан иной способ вычисления площади поля по его периметру, состоящий в том, что периметр делится на $4\frac{2}{3}$ и частное принимается равным стороне квадрата, равновеликого вычисляемой площади. Даны два правила («указа»), иллюстрируемые тремя задачами.

Вторая строка — «О смете десятинные земли в полях» — посвящена выражению площади в десятинах. Статья «Смета, как при рати воинство» содержит пять задач¹⁴ на вычисление площади прямоугольника по стороне равновеликого ему квадрата. Рассмотрим одну из них.

«Стояло войско в поле во все четыре стороны на полверсты, а на всякой сажени по 3 человека стояло конных, а пеших по 9 человек и ты смети что под ними будет земли сажень и что конных и пешех людей стоит. А в полуверсте 300 сажень».

Записанное решение. Занимаемая площадь равна $500 \times 500 = 250\,000$ кв. сажень. «Конных» было $250\,000 \times 3 = 750\,000$ чел. и «пеших» — $250\,000 \times 9 = 2\,250\,000$ чел.

Статья «Счет геометрического разума радикасом сии речь корени осмоугольного» посвящена извлечению кубического корня. Она начинается таблицей кубов однозначных чисел. Способ извлечения кубического корня представляет собой последовательное и точное применение формулы

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$$

с подробным выполнением соответствующих действий. Правильность извлечения кубического корня проверяется как обычно¹⁵.

В статье «Указание како в житнице хлеб в сусеках, не меряя познавати» рассмотрено измерение объема «житниц». Она начинается с вычисления объема куба. Далее следует вычисление объема кругового цилиндра по правилу, которое в современных обозначениях соответствует формуле

$$V = \frac{\pi^2 r^2}{3} h,$$

где V — объем цилиндра, r — радиус основания, h — высота (в рукописи $\pi = 3$).

Способ вычисления объема цилиндра состоял в том, что цилиндр заменяли равновеликим параллелепипедом с той же высотой и с основа-

¹⁴ Во многих известных рукописях XVII в. рассмотрены только две задачи.

¹⁵ Извлечение кубического корня излагается в рукописях: Собр. Унд. 682 и Ст. 44.

нием, представляющим собой прямоугольник со сторонами, равными периметру основания и третьей части от четверти периметра. Отсюда следует, что одновременно с вычислением объема цилиндра решалась задача о замене круга равновеликим прямоугольником.

В строке под заглавием «О том же» излагается правило определения объема житниц с верхами. Чтобы вычислить объем житницы с верхом, надо найти объем житницы без верха по изложенному выше способу, а затем определить, сколько верхов будет в житнице. Если их будет 5 или 6, то, найдя соответственно 5-ю или 6-ю часть объема житницы без верха и сложив ее с объемом житницы, получим объем житницы с верхом¹⁶. Далее следует «указ» (правило) о задаче на вычисление объема житниц с верхом и без верха.

Статья «О бочешных размерах» посвящена вычислению объема бочек. Все способы вычисления состояли в том, что сначала бочка заменялась равновеликим цилиндром, а затем цилиндр — равновеликим параллелепипедом с основанием, представляющим собой квадрат. В ходе вычислений задача нахождения площади круга решается поразному.

Задача о квадратуре круга рассматривается в статье «Или сия тому ж подобна статья». В строке «Круг мерной указывает места круглины и четвероугольны» сообщается, что площадь квадрата, равновеликого данному кругу, равна $\frac{3}{4}d^2$ или $\frac{3}{4}(2r)^2 = 3r^2$, где r — радиус круга, d — его диаметр, $\pi = 3$. Несколько точнее вычисляется в рукописи длина окружности. Она содержит $3\frac{1}{8}$ диаметра.

В статье «Циркулем, геометрический разум» описано вычисление объема бочки и чайника с помощью геометрических построений и решение 14 задач на замену одних геометрических фигур другими, им равновеликими. Способ вычисления объема бочки состоял в том, что бочку заменяли равновеликим цилиндром с той же высотой и с диаметром основания

$$d_2 + \frac{d_1 - d_2}{3},$$

где d_1 — диаметр бочки у воронки, d_2 — диаметр основания бочки (при этом цилиндр преобразовывался в равновеликий параллелепипед).

Объем чайника (усеченного конуса) принимали равным объему цилиндра с высотой, равной высоте конуса, и радиусом основания

$$r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2},$$

где r_1 и r_2 — соответственно радиус верхнего и нижнего оснований усеченного конуса (при этом цилиндр преобразовывался в равновеликий параллелепипед).

Во всех остальных известных рукописях описаны те же способы вычисления объемов геометрических тел, что и в рукописи F IX-47.

¹⁶ Способ определения числа верхов в житнице не указывается.

Только в рукописи Чертк. 372 (статья «Второй образец о бочешной мере») указан еще один способ (которого нет в других рукописях) вычисления объема бочки и ведра.

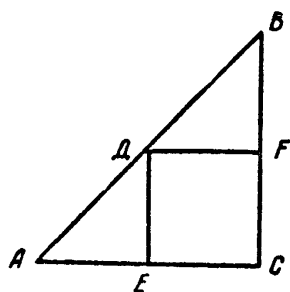
Кроме задач на преобразование одних геометрических тел в другие, им равновеликие, в рукописи даны 12 задач на преобразование плоских геометрических фигур в другие, им равновеликие ¹⁷.

В «Указе како знать с единого места» изложен способ определения расстояния между двумя точками из третьей точки и рассмотрены задачи двух типов, иллюстрирующие этот способ. При определении расстояния между двумя точками из какой-либо третьей точки считали, что точка, из которой определяется расстояние, и две заданные точки являются вершинами прямоугольного треугольника. Измерив расстояние от взятой точки до двух заданных точек, неизвестное расстояние определяли по теореме Пифагора. При этом, однако, не сообщается, где надо взять третью точку, чтобы она и заданные две точки были вершинами прямоугольного треугольника. Задачи с использованием прямоугольного треугольника встречаются также в рукописи ОЛДП(ОШ)28 (статья «О радиусе»).

В «Указе како знать до коего места нибудь сажень или аршин и вершков не меряя» рассматривается определение расстояния до какого-либо предмета. Сначала излагается общее правило определения искомого расстояния, а затем — его возможные варианты. Чтобы определить расстояние до какого-либо предмета, не выполняя измерения, надо иметь две вехи: одну — длиной в аршин и с вершковой шкалой и зазубриной внизу, другую — длиной в полтора аршина с отверстием вверху. В одном месте устанавливают аршинную вежу, а с полторааршинной вехой отходят на такое расстояние, чтобы, смотря через верхнее отверстие этой вехи, можно было видеть вершину аршинной вехи и точку, до которой определяют расстояние, на одной прямой. На этом месте ставят полторааршинную вежу. Затем на месте аршинной вехи ставят колышек и измеряют расстояние до полторааршинной вехи. Пусть это расстояние равняется, например, 12 аршинам. Отходим влево от колышка на некоторое расстояние и ставим аршинную вежу. Вместо полторааршинной вехи ставим колышек и отходим влево на такое расстояние, на котором отверстие полторааршинной вехи, вершина аршинной вехи и точка, до которой определяем расстояние, видны на одной прямой. В этом месте ставим полторааршинную вежу. Измеряем расстояние между колышком, который поставлен на месте аршинной вехи, и самой аршинной вехой. Пусть это расстояние равно 10 аршинам. Наконец, измеряем расстояние между полторааршинными вехами. Пусть оно равно 13 аршинам. Искомое расстояние определяем по тройному правилу, т. е. $13 \times 12 = 156$, $156 : 3 = 52$. В заключении «Указа» сообщается, что на втором этапе измерения вехи можно ставить не слева, а справа.

При измерении не учитывалось расстояние от полторааршинной вехи до предмета. Из «Указа» и примеров следует, что неизвестное

¹⁷ Эти построения содержатся в «Началах» Евклида, в рукописях они приведены без объяснений.



Определение расстояния до предмета.

расстояние до предмета определялось на основании подобия прямоугольных треугольников ABC и ADE (см. рисунок), где BC — расстояние от полторааршинной веши до предмета, FC — расстояние между аршинной и полторааршинной веши на первом этапе измерения, DF — расстояние между двумя положениями полторааршинной веши, BF — искомое расстояние.

«Указ како знать чему нибудь высоту земли стоя» посвящен определению высоты предмета с помощью веши. В нем при измерении расстояния a до предмета не учтена длина веши h , т. е. вместо $a + h$ взято a . Более вероятным является утверждение, что в этом «Указе» дано решение следующей задачи: «С помощью прямоугольного треугольника с углом 45° определить высоту предмета».

Значительное место в рукописи занимает статья «Книга о сошном и вытном письме и четвертные пашни». Она начинается изложением вычислений на счетах. Описанные в ней счета отличаются от счетов других известных рукописей XVII в. Они состоят из одного ящика, содержащего 12 рядов. Количество косточек в первых шести рядах справа и слева неодинаково. Слева и справа в первых пяти рядах по одной косточке. В шестом ряду слева четыре косточки, справа — три. Остальные шесть рядов имеют по шесть косточек.

Далее рассмотрены задачи с решениями на вычисление площадей многоугольников и примеры на действия с дробями применительно к сошному письму. При сложении дробей вычисления выполняются не только в третьих и четвертых частях сохи, а и в малых четвертях (полполполчасти) и малых третях (полполполтрети).

Заканчивается «Книга» изложением счета квадратными саженьями в третьих и четвертых частях четверти, квадратными саженьями — «вытным письмом» (вытями) и четвертями — сошным письмом. Число квадратных сажень делили на число вытей, а в частном доли выти выражали в дробях по системе деления на два и три.

После «Книги о сошном и вытном письме и четвертные пашни» в рукописи излагаются вопросы практической геометрии.

1. Вычисление длины окружности. Рассмотрены две задачи и правило, согласно которому вычисление длины l окружности соответствует формуле $l = \pi d$, где d — диаметр окружности, а $\pi = \frac{22}{7}$.

2. Вычисление площади круга соответствует формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

3. Задачи на построение (восстановить перпендикуляр в начале заданного луча; разделить данный отрезок пополам; проверить перпендикулярность двух прямых; найти центр окружности; разделить окружность на три¹⁸ равные части). Построения не сопровождаются объяснениями. Однако на основании анализа построений можно сделать вывод о том, что они выполнялись обычным путем.

¹⁸ В рукописи описка, написано «на четыре».

4. Вычисление площади треугольника. Рассмотрены две задачи. В первой площадь треугольника вычисляется по формуле Герона, во второй — по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2},$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь. За высоту треугольника принят отрезок, равный среднему арифметическому двух сторон треугольника. Получение двух разных результатов не смущает автора рукописи.

Вычислению площади треугольника посвящены также две задачи рукописей Собр. Унд. и ОЛДП(ОШ)28. В первой рукописи оно соответствует формуле

$$S = \frac{ab}{2},$$

где a и b — две стороны треугольника, S — его площадь. Во второй площадь прямоугольного треугольника определяется как половина произведения его катетов.

5. Вычисление высоты треугольника. Рассмотрена задача: «Хощеши познать как бы стояло 2 древо 6 сажен другое 8 сажен. А меж ими 10 сажен и как они повалились древо на древо концами что от земли они будут высотой». Дано два способа ее решения. По первому способу высоту определяли путем геометрического построения: на прямой брали отрезок, равный 10 единицам (10 саженям). С концов этого отрезка проводили дуги радиусом 8 и 6 единиц. Опустив из точки пересечения этих дуг перпендикуляр, получали высоту треугольника. Вычисление высоты по другому способу соответствует формуле

$$h = \frac{ab}{c},$$

где a, b, c — стороны и h — высота треугольника.

6. Вычисление стороны квадрата, площадь которого равна половине (третьей, четвертой и т. д. части) данного квадрата. Вычисление соответствует формуле

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{2}},$$

где a — сторона данного, b — сторона искомого квадрата.

7. Определение расстояния до какой-либо точки с помощью квадрата и вехи. Указано их применение.

8. Деление окружности на шесть равных частей. Изложено неясно. Вероятно, автор, изложив деление окружности на три равные части, считал, что на шесть равных частей ее можно разделить путем деления каждой третьей части пополам. Справедливость такого предположения подтверждается тем, что деление окружности на 12, 24, 48 и 96 равных частей выполняется последовательным делением 6-й, 12-й и т. д. частей пополам. Однако построений автор не приводит. Чтобы разделить окружность на 18 равных частей, предполагается каждую ее шестую часть разделить на три равные части (построений также нет).

$A_1C = 12$ (единицам). Тогда высота предмета AB определяется по формуле

$$AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{CA_1}.$$

Эти вычисления являются результатом применения подобия треугольников ABC и A_1B_1C .

По второму «указу» высоту предмета AB_2 определяют, используя подобие треугольников CDE и ACB_2 :

$$AB_2 = \frac{AC \cdot CD}{DE}.$$

Величину DE находят при помощи квадранта. Оба «указа» иллюстрируются примерами.

Определение расстояния между двумя предметами. Сначала измеряют расстояния от точки до двух предметов. Затем с помощью квадранта определяют угол между двумя направлениями от точки к двум предметам. Этот угол строят на бумаге, на его сторонах откладывают отрезки, соответствующие в некотором масштабе расстояниям от точки до предметов. Измерив расстояние между концами отрезков, получают искомое расстояние.

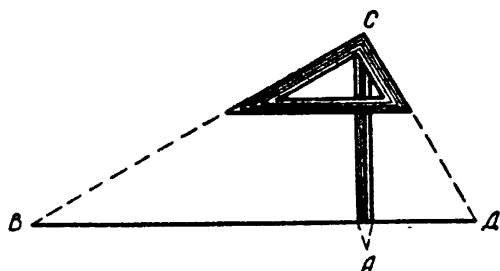
В «Уставе ратных дел» описано измерение на местности с помощью прямоугольного треугольника и палочки Якоби.

При измерении расстояния от данной точки A до недоступной точки B в точке A ставят вежу длиной почти в рост человека (см. рисунок). К вершине C вежи приставляют треугольник так, чтобы конец ее был вершиной прямого угла, а продолжение одной из сторон пересекало точку B . Другая сторона треугольника, продолженная мысленно, пересекается с землей в точке D . Измерив длину отрезка AD , получают искомое расстояние:

$$AB = AC \frac{AC}{AD}.$$

Следовательно, при определении расстояния от данной точки до недоступной точки использовали зависимость между высотой прямоугольного треугольника и отрезками, на которые делится высотой его гипотенуза.

Палочка Якоби — простой угломерный прибор, состоящий из «жезла» с делениями, вдоль которого под прямым углом передвигается малый «жезлик». Длина жезлика равна длине одного деления основного жезла. Например, необходимо определить высоту предмета FE (см. рисунок). Предположим, что глаз наблюдателя находится в точке A . Повернувшись лицом в сторону предмета, наблюдатель приставляет к глазу прибор так, чтобы жезл занимал положение AB . Затем устанавливает жезлик на такое деление жезла, чтобы лучи зрения, падающие на концы жезлика C и D , проходили и через точки предмета E и F . Отметив колышком это местоположение, наблюдатель перемещает жезлик вдоль жезла на одно деление вперед или назад. Предположим, что жезлик перемещен вперед, занимая положение C_1D_1 . Тогда наблюдатель



Измерение расстояния от данной точки до недоступной точки.

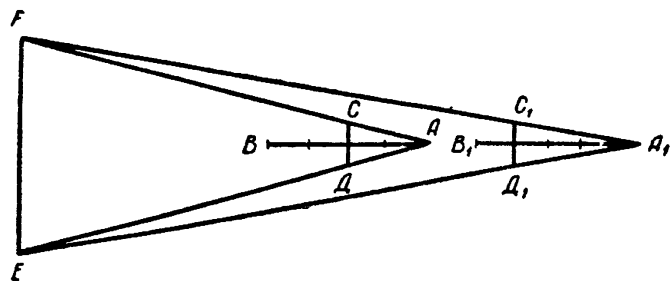
снова направляет угломерный прибор на предмет FE . Теперь, чтобы лучи зрения прошли через точку F и E и концы жезлика, наблюдатель должен передвинуться на некоторое расстояние. Предположим, что в этом случае его глаз оказался в точке A_1 . Расстояние между двумя положениями — A_1 и A — и является искомой высотой.

Сущность этого приема измерения заключается в использовании подобия треугольников: $\triangle ACD \sim \triangle AFE$ и $\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle A_1FE$.

Таким образом, в русских рукописях XVII в. подробно освещены вопросы практической геометрии. В большинстве случаев это освещение ограничивалось вычислением площадей многоугольников и объемов бочек и сусеков. Однако были и учебники практической геометрии (рукопись F IX-47), которые по своему характеру, объему и изложению не уступали западноевропейским.

Русские геометрические рукописи XVII в. — это учебники по геометрии, книги сошного письма, часть «Устава ратных, пушечных и других дел, касающихся воинской науки», а также отдельные разделы арифметик и сборников, посвященные геометрии. Об их первоисточниках можно судить на основании исследования рукописи F IX-47. При измерении объемов геометрических тел (житниц, бочек, чайника и стакана) авторы русских рукописей проявляли значительную оригинальность. Объем куба они вычисляли обычным способом. При измерении объемов других геометрических тел применяли принцип преобразования одного тела в другое, ему равновеликое, который описан и в руководствах практической геометрии Западной Европы, например, в книге И. Стегмана. Так, у Стегмана бочка заменяется цилиндром той же высоты и с основанием, равным основанию бочки. Однако в русских рукописях изложено несколько приемов для вычисления объема бочки, которые дают более точные результаты.

В связи с вычислением объемов житниц и бочек в русских рукописях практически решалась и задача квадратуры круга. В иностранных руководствах по геометрии описан лишь один из способов этих вычисле-



Измерение высоты предмета с помощью палочки Якоби.

ний (в геометрии С. Г. Гжепского). Длину окружности по ее радиусу русские авторы вычисляли по своему способу.

Задачи на вычисления, связанные с прямоугольными треугольниками, в русских рукописях представлены в форме «указа» для измерения

расстояния между двумя точками, которое производилось из третьей точки на местности. Задачи на построение выполнены по Евклиду, как и у П. Рамуса, вычисление площади треугольника — по формуле Герона. Однако в русских рукописях указаны еще две приближенные формулы, которых нет в иностранных руководствах по геометрии. В рукописях излагается также деление окружности на равные части и построение квадрата, площадь которого в несколько раз больше или меньше площади данного, приведены задачи на измерение на местности с помощью квадранта.

Таким образом, практические руководства по геометрии в России XVII в. были своеобразны как по содержанию, так и по изложению.

□

Итак, математика в России XVII в. развивалась в двух направлениях — теоретическом и практическом. В области геометрии это проявилось в создании практических и теоретических руководств. Обширным теоретическим руководством была работа И. Елизарьева, представлявшая собой оригинальный теоретический курс геометрии. Автору этой рукописи были известны такие работы по геометрии, как сочинения Архимеда, «Начала» Евклида, руководства Рамуса, Спейделя. Практические вопросы по геометрии освещены в сборниках и книгах сошного письма. Курсом практической геометрии является рукопись F IX-47. В ней отражены вопросы, выдвинутые требованиями хозяйственной жизни страны (сошное письмо, измерение объемов бочек, жилищ и др.).

Арифметические рукописи XVII в. содержат сведения по арифметике весьма значительного объема: действия с целыми и дробными числами и решения соответствующих задач, алгоритмы решения систем линейных уравнений.

Русские математические рукописи были составлены с учетом русской действительности, с учетом требований развития производительных сил России того времени. По своему содержанию и изложению они были на уровне учебных руководств по арифметике и геометрии Западной Европы конца XV—XVII в.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ XVIII В.

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России

В конце XVII — первой четверти XVIII в. в России начинаются преобразования в экономике, государственном управлении и культуре, подготовленные всем ходом исторического развития страны. К концу XVII в. она хотя и опережала в своем экономическом развитии Пруссию, Польшу, Турцию, Иран и некоторые другие государства, но по сравнению с такими странами, как Англия и Нидерланды, где произошли буржуазные революции, отставала в развитии промышленности, внешней торговли, флота и т. д. В сложившихся в России условиях для решения внутренних и внешнеполитических задач требовались коренные реформы, которые и были осуществлены Петром I.

Одной из основных проблем для России того времени была проблема выхода к морям, решение которой способствовало бы дальнейшему развитию хозяйства и торговли, а также обеспечению обороны и независимости страны.

Осуществление этой проблемы Петр I начал с борьбы за выход к Черному морю. В результате азовских походов была взята крепость Азов. Началось сооружение большого флота на Азовском море. Это было крупнейшим военным и внешнеполитическим успехом и создавало условия для дальнейшей борьбы с Турцией за выход из Азовского моря в Черное. В результате войны (1700—1721 гг.) со Швецией Россия вернула себе старинные русские земли по побережью Финского залива, а также Эстляндию, Лифляндию и Карельский перешеек с Выборгом. Россия стала могущественной морской державой. Международный авторитет ее значительно возрос.

В первой четверти XVIII в. в России развивалось промышленное строительство. На Урале была создана крупная металлургическая промышленность. В 1725 г. уральская металлургия давала около 3/4 всей выплавки чугуна в России. Развивалась судостроительная и текстильная промышленность, цветная металлургия и многие другие отрасли хозяйства. Крупным промышленным центром стал Петербург, основанный в 1703 г. К концу первой четверти XVIII в. в России насчитывалось свыше 190 мануфактур, которые были расположены не только в центре

страны, но и на Урале, в Карелии, на Украине, в Татарии, Сибири. Основными способами обеспечения промышленных предприятий рабочей силой были покупка крестьян, вольный наем, приписка государственных крестьян, прикрепление к мануфактурам наемных рабочих и использование труда рекрутов, ссыльных. Основной общей тенденцией в развитии мануфактурной промышленности было широкое использование крепостного труда. Работные люди жили в чрезвычайно тяжелых материальных условиях, получая за свою работу от зари до зари нищенскую плату, которой хватало едва лишь на скудные «харчи».

Некоторые сдвиги происходили в развитии сельского хозяйства. Начали применять агротехнические методы, возросло производство технических культур. Особое внимание уделялось развитию овцеводства с целью обеспечения суконных мануфактур своим сырьем. Широкое распространение получило трехполье, вытеснявшее на севере подсеку и на юге перелог. Однако основными орудиями труда оставались по-прежнему соха и борона, плуги встречались очень редко. Земля обрабатывалась плохо, урожайность была низкая. Дворяне, стремясь повысить доходность своих имений, усиливали эксплуатацию крестьян.

Дальнейшее общественное разделение труда обуславливало рост национального рынка. В стране появлялись новые ярмарки, торговые пристани, гостинные дворы, биржи. Поощряя внутреннюю торговлю, государство предоставляло купечеству огромные ссуды. Во внешней торговле оно стремилось ликвидировать посредничество и установить прямые связи с западноевропейскими государствами. В 1726 г. экспорт России превышал импорт в два раза.

Развитие внутренней и внешней торговли способствовало дальнейшему развитию экономики страны. Все тяготы, связанные с экономическим подъемом страны, ложились на народные массы. Принудительный труд на строительстве и в промышленности, рекрутские наборы, резкое увеличение налогов (с 1724 г. была введена подушная подать) значительно ухудшили положение крестьян и мануфактурных рабочих людей.

Внутренняя политика Петра I была направлена на укрепление положения помещиков. Изданный в 1714 г. указ о единонаследии, по которому все числившиеся за дворянами имения объявлялись их наследственной собственностью, окончательно уничтожил различия между вотчинами и поместьями. Рядом указов были предоставлены различные льготы и привилегии купечеству. Однако основной социальной опорой самодержавия было дворянство.

Усиление феодальной эксплуатации и налогового гнета неизбежно вело к обострению классовой борьбы. В антифеодальных движениях того времени принимали участие крестьяне, мелкие служилые люди, посадские люди, работные люди мануфактур. Одним из наиболее крупных городских движений, направленных против произвола царских властей и феодального гнета, было восстание в Астрахани 1705—1706 гг. В конце 1707 г. началось восстание на Дону под предводительством Кондратия Булавина, принявшее общенародный характер. В занятых

повстанцами городах вводилось самоуправление. Осенью 1708 г. восстание на Дону было подавлено. Однако народное движение продолжало разрастаться. В 1709—1710 гг. широкая волна крестьянских восстаний охватила уже 60 уездов страны. Но все эти выступления были стихийными, не связанными друг с другом. Власти жестоко расправлялись с восставшими.

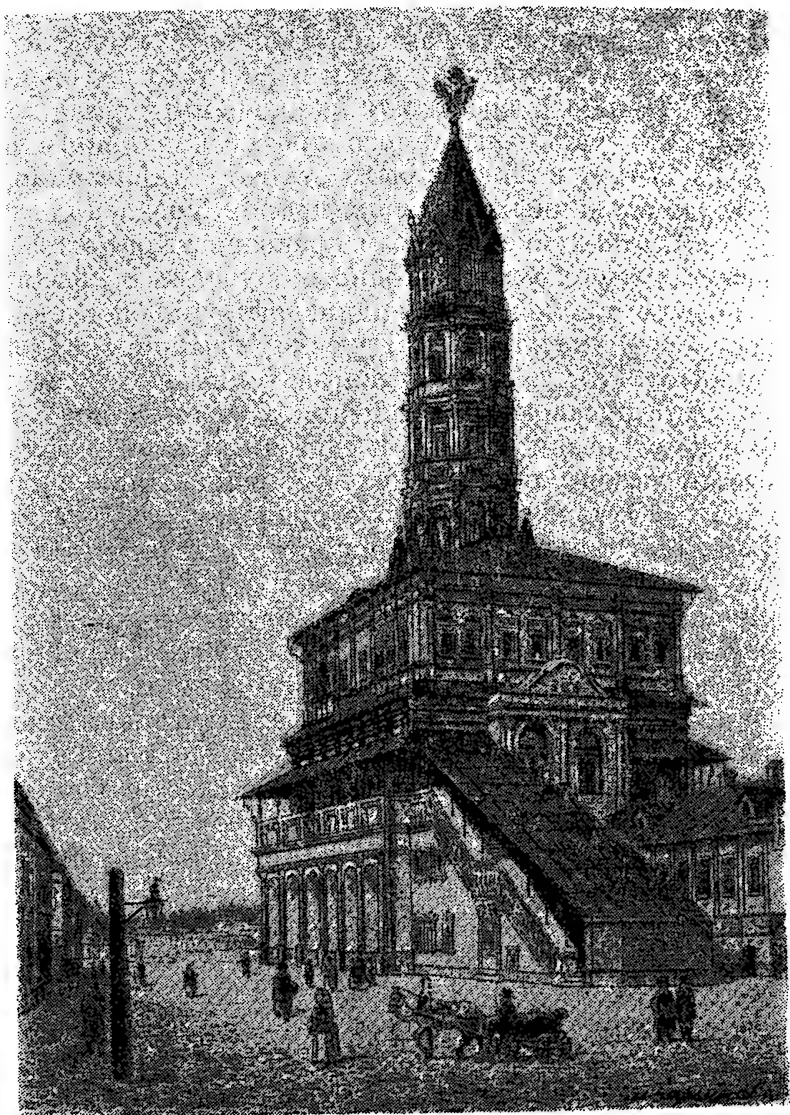
Классовая борьба вызвала необходимость проведения реформ государственного управления. В 1708 г. в разгар народного движения на юге страны, в целях создания сильной местной власти для борьбы с антифеодальными выступлениями, в России были образованы губернии во главе с губернаторами, получившими широкие полномочия вплоть до права распоряжаться местными воинскими командами. В 1711 г. вместо боярской думы был учрежден Сенат — высший государственный орган, ведавший финансами, торговлей, судопроизводством. В 1718 г. вместо устаревших приказов были введены коллегии, на которые возлагалось руководство отдельными отраслями управления. На правах коллегий действовали также Главный магистрат, управлявший городскими магистратами, и Синод, ведавший делами церкви. С учреждением Синода упразднялось патриаршество и церковь была поставлена на службу феодальному государству. Гражданская служба была отделена от военной. Решающую роль в государственном управлении приобрело чиновничество дворянство. С упрочением абсолютистского государства был установлен государственный контроль за выполнением государственных законов.

Серьезные преобразования проводились в армии. С введением ежегодных рекрутских наборов появилась русская регулярная армия. Были учреждены военные школы и академии, готовившие для армии и флота образованных офицеров. Решающую роль в организации регулярной армии и в укреплении обороноспособности государства сыграло развитие военного производства. Общее число отлитых при Петре I орудий превышало 10 тыс. Русский военно-морской флот показал свое превосходство над шведским флотом (Северная война). По мореходным качествам (скорости, маневренности) русские суда не уступали кораблям, построенным на верфях стран Западной Европы.

Реформами государственного аппарата и созданием регулярной армии было завершено утверждение абсолютизма в России. Сложная бюрократическая система управления была одним из проявлений абсолютизма.

Преобразования в первой четверти XVIII в. были своеобразной попыткой ликвидировать отсталость России при сохранении феодально-крепостнического строя. Реформы первой четверти XVIII в. затронули многие стороны экономической, политической и культурной жизни страны. Политика государства была направлена на возвышение класса помещиков и нарождавшейся торгово-промышленной буржуазии за счет усиления эксплуатации крепостного крестьянства.

Промышленное строительство, создание военно-морского флота и другие экономические и административно-государственные мероприятия требовали квалифицированных специалистов в различных областях



Сухарева башня, в которой помещалась
Навигацкая школа.

науки, техники и государственного управления и стимулировали, таким образом, развитие просвещения и науки в России. Большую роль в развитии общественной мысли начала XVIII в. сыграли выдающиеся писатели и публицисты (Феофан Прокопович, И. Т. Посошков, А. Д. Кантемир и др.), ставившие своей целью оправдать проводимые в стране реформы и освободить науку и просвещение от церковно-религиозного засилья. И. Т. Посошков в «Книге о скудости и богатстве» всесторонне обосновывал необходимость развития производительных сил страны, выступал за государственную регламентацию экономики и введение обязательного 3—4-летнего обучения крестьянских детей. Феофан Прокопович выступал за прогресс и науку, был сторонником

учения Коперника и Галилея. В первой четверти XVIII в. дело просвещения в значительной степени перешло от духовенства к государству. К этому времени относится также начало специализации школьного образования — так называемого профессионального обучения.

В 1701 г. в Москве была открыта Навигацкая школа для обучения юношей различных сословий (дворян, посадских людей и др.) морскому делу и математике. Первым преподавателем этой школы и основателем математического и мореходного обучения в России был приглашенный в Россию профессор Эбердинского университета Андрей Фархварсон, в совершенстве владевший русским языком. В одном из официальных документов 1737 г. отмечается значение деятельности этого ученого для развития русского просвещения. С его помощью «первое обучение математике в России введено и едва ли не все при флоте российские подданные, от высших и до низших, к мореплаванию в навигацких науках обучены». В Навигацкой школе преподавал выдающийся русский педагог Л. Ф. Магницкий, автор знаменитой «Арифметики» — первого русского учебного пособия по математике и навигации. Навигацкая школа давала хорошее для того времени математическое образование. В ней учили арифметике, геометрии, тригонометрии с приложением к геодезии и больше всего — навигации и астрономии.

В 1715 г. в Петербурге на базе Навигацкой школы была создана Морская академия. Академия выпускала не только образованных моряков для службы во флоте, но и хорошо подготовленных геодезистов и картографов. В программу обучения входило «учить детей: 1) арифметике, 2) геометрии, 3) фехтованию или приемам ружья, 4) артиллерии, 5) навигации, 6) фортификации, 7) географии, 8) знанию членов корабельного гола (т. е. кузова) и такелажа, 9) рисованию».

В 1701 г. в Москве была открыта Артиллерийская школа, в 1707 г. — Хирургическая школа при военном госпитале, первое медицинское учебное заведение, а в 1712 г. — Инженерная школа.

Комплектовались учебные заведения в принудительном порядке специальными указами. Учиться в те времена было нелегко: науки преподавались большей частью на малопонятном языке, учебных пособий не хватало или они были очень дороги, с учащимися обращались грубо, в школах применялись различные телесные наказания. Поэтому учащиеся часто убегали из школ. В 1722 г., как сообщалось в «высочайшем указе», из московской навигацкой школы бежало 127 школьников, «от чего произошла утрата денежной суммы, потому что оные школьники — стипендиаты, жив многие лета и забрав жалованье, бежали».

Специальные и общеобразовательные учебные заведения создавались и в провинциях. При заводах в Карелии и на Урале были организованы первые в России горные школы, где готовили квалифицированных мастеров для металлургической промышленности. Во многих городах появились «цифирные» (для горожан), архиерейские (для духовенства) и гарнизонные (для детей солдат) школы. Цифирные школы были учреждены в 1714 г. (цифирью называлась элементарная математика) при архиерейских домах и крупных монастырях. Преподавали в них

ученики Навигацкой школы, обучали грамоте, арифметике, географии и началам геометрии. Сословный состав учащихся был довольно разнородным: в самом указе говорилось: «во всех губерниях, дворянских и приказного чина, дьячих и подьяческих детей, от 10 до 15 лет, опричь однодворцев, учить цифири и некоторую часть геометрии».

Было создано всего 42 цифирные школы для детей всех сословий, кроме крепостных крестьян. Однако в этих школах преимущественно, если не исключительно, обучались «дьячьи и подьяческие дети», т. е. юношество, предназначенное для приказной службы. Посадские люди обратились в Сенат с ходатайством об освобождении их детей от обязательного обучения в цифирных школах, так как они занимаются торговлей. Их просьба была удовлетворена. Об успехах обучения в цифирных школах можно судить по выдержке из отчета школы, открытой в Переяславе Рязанском в мае 1722 г. Набрали в нее 96 учеников, из них было обучено 4, выпущено в канцеляристы 2, отдан в солдаты 1, 59 «отлучились от арифметической школы самовольно», остальные 32 ученика учились в 1727 г. «во арифметике, нумерации — 11, адиции — 5, субстракции — 1, мультипликации — 3, дивизии — 5, тройному — 3, десятичным дробям — 2, геометрии циркульным приемам — 1, тригонометрии плоской, тангенсам — 1»¹.

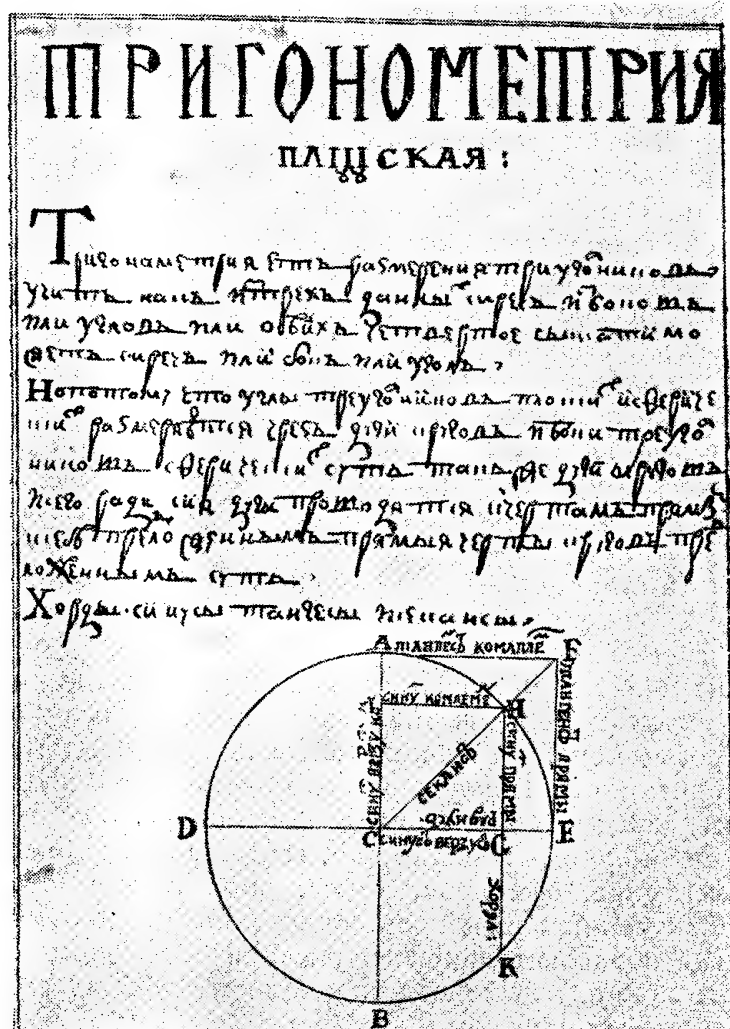
Таким образом, попытка создать начальную школу, которая бы готовила технически грамотных людей, не привела к желаемым результатам. Специальные же профессиональные школы в Москве, Петербурге и в ряде других городов (Навигацкая, Инженерная и др.) — по сути первые в стране высшие учебные заведения — готовили высокообразованных гражданских и военных специалистов: механиков, геодезистов, горных мастеров, моряков, математиков, офицеров, чиновников. Кроме того, в профессиональных школах учились почти исключительно дети дворян.

Одним из мероприятий образовательного характера была посылка в обязательном порядке за границу выходцев из дворян для овладения точными науками и культурными навыками.

Для нужд школьного образования выпускалась учебная литература. Наибольшее распространение получила «Грамматика» М. Смотрицкого и «Арифметика» Л. Магницкого, являвшаяся настоящей школьной энциклопедией математических знаний. Издавались и учебники по специальным предметам (например, по механике учебник Г. Скорнякова-Писарева «Наука статическая, или механика»). Для Навигацкой школы в начале XVIII в. были изданы учебники по математике и навигации, подготовленные учителями этой школы А. Фархварсоном, С. Гвином и Л. Магницким. Математические и географические пособия для навигаторов издал библиотекарь В. Киприанов.

Печатный двор в Москве в течение XVII в. выпустил большое количество книг. Однако это были книги в основном церковного содержания. С 1706 г. книги светского содержания начали печатать новым гражданским шрифтом, более упрощенным по сравнению со сложным начерта-

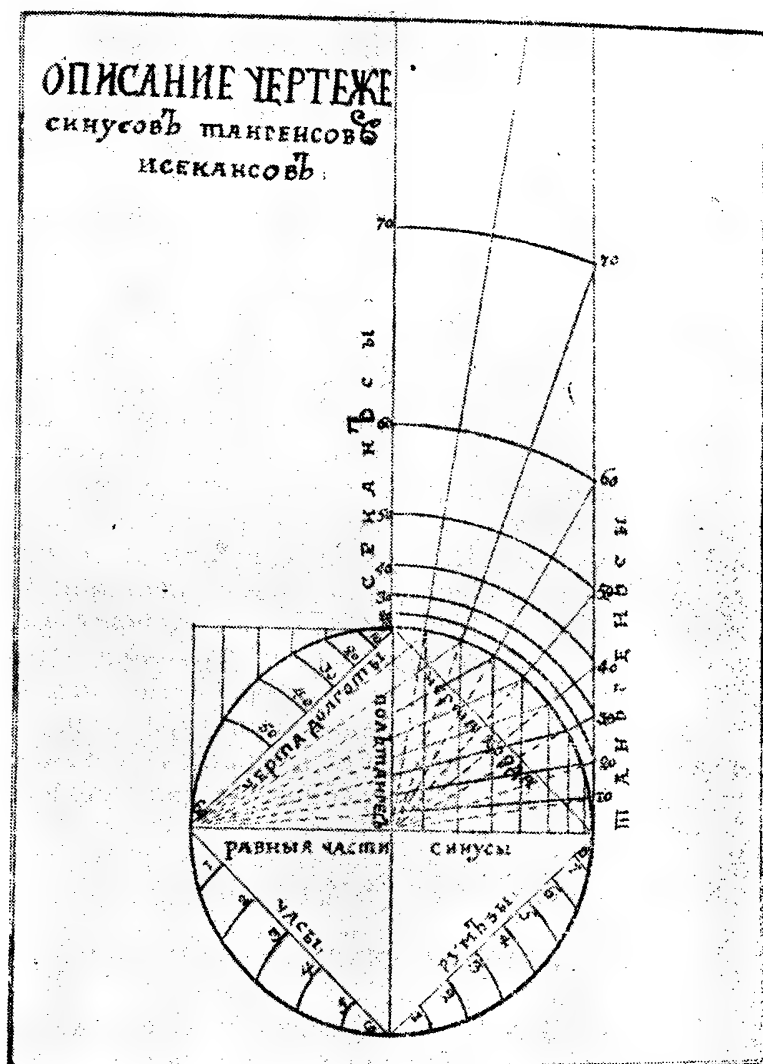
¹ П. П е к а р с к и й. Наука и литература в России при Петре Великом. Т. 1, 1862, стр. 117.



«Тригонометрия плоская» в рукописи № 1664.

нием церковнославянских букв и более легким для чтения. Гражданский шрифт быстро распространился не только в России, но и в Болгарии и Сербии. Новым шрифтом печатались оригинальные и переводные сочинения учебного и научного содержания. Технических книг на русском языке не было. Поэтому по различным отраслям технических и специальных знаний (математике, кораблестроению, фортификации, архитектуре, военному делу и др.) издавались в большом количестве переводные книги.

В начале XVIII в. из среды русского народа вышли замечательные механики и техники. В области механики кроме Г. Скорнякова-Писарева прославился мастер А. К. Нартов, создавший токарно-шлифовальный станок с самоходным суппортом. Этот станок представлял собой значительное явление в токарном деле. Техник Я. Батищев изобрел оригинальную машину для водяной обточки ружейных стволов и штыков,



Описание чертежей синусов, тангенсов и секансов в
 рукописи № 1664.

Е. Никонов разработал проект создания подводного корабля, М. Сердюков — проект Вышневолоцкого канала.

В первой четверти XVIII в. большой размах приняли географические и геодезические исследования, а также изучение природных ископаемых страны. Специальные экспедиции занимались исследованием Камчатки, Сибири, Северного морского пути. С. И. Ремезов создал замечательный для своего времени труд — «Чертежную книгу Сибири». Велись большие подготовительные работы по снаряжению экспедиции В. Беринга. В 1724 г. Петр I утвердил устав Петербургской академии наук, которая фактически была открыта после его смерти. Петербургская академия наук отличалась от зарубежных академий тем, что в ней не были представлены богословские предметы и выделялись три направления работ — математическое, физическое и гуманитарное. Кроме того,

она ставила своей задачей не только разработку научных проблем, а и распространение знаний и подготовку русских ученых. При Петербургской академии наук были основаны Астрономическая обсерватория, Музей естественных наук и древностей (Кунсткамера), Библиотека, Ботанический сад.

Значительные изменения в первой четверти XVIII в. происходили и в развитии литературы, изобразительного искусства и архитектуры. Характерной чертой литературы было постепенное освобождение ее от церковно-схоластической тематики и стиля. Изобразительное искусство все больше и больше насыщалось реалистическими тенденциями. В архитектуре наблюдалось сочетание западного стиля барокко с традициями русской архитектуры XVII в. В композиции зданий появились декоративные детали — колонны, фронтоны, портики. Широко применялись также характерные для русской архитектуры узорчатые украшения. Так складывалось «московское барокко» в каменном строительстве России. Архитектор И. Зарудный использовал этот стиль при постройке дворца Лефорта, Троице-Сергиева монастыря, храма в Филях и Меншиковой башни в Москве. С 1714 г. каменное строительство начало сосредоточиваться в Петербурге (в центре города и его окрестностях), где русские зодчие создавали великолепные ансамбли.

Таким образом, русская культура в первой четверти XVIII в. во всех своих областях обогащалась новым содержанием, близким к реальной жизни, к потребностям дальнейшего прогрессивного развития.

2

„Арифметика“ Магницкого

В XVII в. в России было издано только одно математическое сочинение — «Считание удобное, которым всякий человек, купующий или продающий, зело удобно изыскати может число всякие вещи» (1682 г.), представляющее собой таблицу умножения, охватывающую произведения чисел от 1×1 до 100×100 . В 1714 г. эта книга была переиздана.

В 1699 г. в Амстердаме вышла книга Копиевского «Краткое и полезное руковедение во арифметику, или в обучение и познание великому счету, в сочетании всяких вещей» на русском языке. Кроме беглых указаний записи чисел и действий (арабскими цифрами)² в ней даны некоторые определения. Копиевский, как и позже Магницкий в «Арифметике», различает персты, суставы и сложные числа. Эта книга, хотя и была издана большим по тому времени тиражом (3350 экз.), оказала незначительное влияние на распространение арифметических знаний в России.

² По некоторым данным, в России арабские цифры впервые появились на чертежах, гравюрах, резанных на меди или на дереве, еще с середины XVII в. Печатные арабские цифры в первый раз появились в «Юрнале об осаде Хотенбурга», изданном в Москве в 1702 г.

В 1701 г. Копиевский издал в Амстердаме пособие по мореходству — «Книга учащая морского плавания...» В этой книге впервые на русском языке изложены элементы геометрии и тригонометрии применительно к мореходству, а также помещены пятизначные таблицы логарифмов, синусов. Однако роль этой книги в математическом образовании в России была также малозаметной.

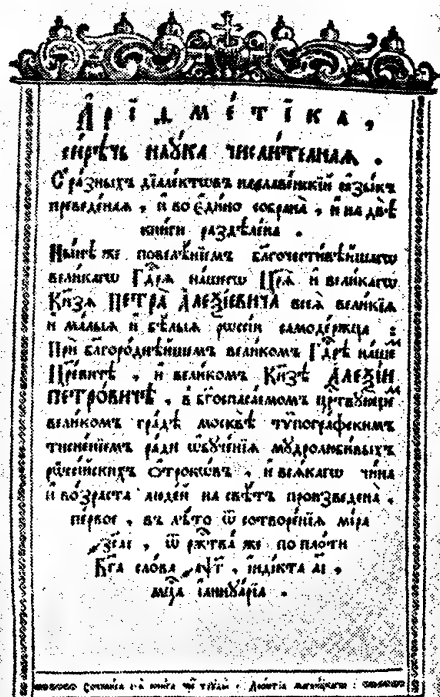
Особое место в русской математической литературе занимает «Арифметика» Магницкого, которая до середины XVIII в. была основным учебником по математике. Ее содержание выходит за рамки названия. Наряду с пространным изложением арифметики в этом руководстве содержатся также элементы алгебры, геометрии, тригонометрии и ряд практических сведений о коммерческих расчетах и задачах по навигации. Магницкий поставил своей целью дать математическое пособие на русском языке.

Эта цель была достигнута: не одно поколение русских людей училось по этой книге. По книге Магницкого учился и М. В. Ломоносов, называвший ее «вратами учености».

Автор «Арифметики» Л. Ф. Магницкий был выдающимся русским педагогом-математиком первой половины XVIII в. и сыграл значительную роль в создании русской математической литературы. Он родился в 1669 г. в Осташковской слободе Тверской губернии. Учился, возможно, в Московской академии. Однако своим образованием Магницкий обязан не столько школе, сколько своей одаренности и упорному труду, благодаря которым он изучил математику, древние языки, пиитику и риторику. В 32 года Магницкий был учителем математики в Навигацкой школе, затем был учителем и заведовал учебной частью в Морской академии (в Петербурге). Он занимался также набором в цифирные школы. Умер Магницкий 19 октября 1739 г.

Кроме «Арифметики», Магницкий написал еще несколько пособий по математике. В 1703 г. он принимал участие в издании «Таблиц логарифмов, синусов, тангенсов и секансов к научению мудролюбивых тщателей», а в 1722 г. издал справочник «Таблицы горизонтальных северных и южных широт».

«Арифметика» была издана в 1703 г. под заглавием «Арифметика, сиречь наука числительная». Она состоит из двух предисловий, введения и трех книг (третья книга посвящена навигации). Весь материал изложен в форме вопросов и ответов.



Первая страница «Арифметики» Л. Магницкого.

ТАКАНЦА.									
100	2	100	4	100	6	100	8	100	10
	1		6		3		5		25
	4		8		7		9		30
	5		10		8		10		55
	6		12		9		10		40
100	7	100	14	100	16	100	18	100	20
	8		16		18		20		30
	9		18		20		22		40
	10		20		22		24		45
	11		22		24		26		50
100	12	100	24	100	26	100	28	100	30
	13		26		28		30		35
	14		28		30		32		40
	15		30		32		34		45
	16		32		34		36		50
100	17	100	34	100	36	100	38	100	40
	18		36		38		40		45
	19		38		40		42		50
	20		40		42		44		55
	21		42		44		46		60
100	22	100	44	100	46	100	48	100	50
	23		46		48		50		55
	24		48		50		52		60
	25		50		52		54		65
	26		52		54		56		70
100	27	100	54	100	56	100	58	100	60
	28		56		58		60		65
	29		58		60		62		70
	30		60		62		64		75
	31		62		64		66		80
100	32	100	64	100	66	100	68	100	70
	33		66		68		70		75
	34		68		70		72		80
	35		70		72		74		85
	36		72		74		76		90
100	37	100	74	100	76	100	78	100	80
	38		76		78		80		85
	39		78		80		82		90
	40		80		82		84		95
	41		82		84		86		100

Таблица умножения в «Арифметике» Л. Магницкого.

«Книгу первую арифметики» автор начинает определением арифметики: «Арифметика или числительница, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее, и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена являвшихся изряднейших арифметиков, изобретенное, и изложенное». Охарактеризовав арифметику не столько по содержанию, сколько по «гражданским качествам», Магницкий делит ее на «арифметику политику» и «арифметику логистику». «Что есть арифметика политика; есть числение, сочиненное в толиком удобном образе: яко каждо может исчислити всякое исчисление, великое и малое, в продажах и куплях, в мерах же и весах, и во всякой цене, и во всяких деньгах, во все царства всего мира».

«Арифметика политика» состоит из пяти частей: «О числах целых», «О числах ломаных, или с долями», «О правилах подобных, в трех, в пяти и в семи перечнях», «О правилах фальшивых, еже есть гадательных», «О пра-

вилах радикалов квадратных и кубических, к геометрии принадлеж-
щих». В первой части рассмотрены целые числа и пять действий —
нумерация, сложение, вычитание, умножение и деление. После действий
с целыми числами Магницкий дает общую схему денежной системы и
весовых единиц древних и современных ему народов, а также мер Мос-
ковского государства. Далее он знакомит читателя со сложением и вы-
читанием именованных чисел, а также с их раздроблением и превраще-
нием, которые рассматривает как умножение и деление. Действия с
именованными числами Магницкий выполняет по обычному способу.

Во второй части дано определение дробей: «Число ломаное ничтоже ино есть, токмо часть вещи, числом объявленная сиречь полтина есть, половина рубля...», затем изложены арифметические действия с дробями — нумерация, сокращение, сложение, вычитание, умножение и деление — и приведено много примеров.

В третьей части автор обращает внимание читателя на необходимость знания арифметических действий над целыми и дробными числами и понятия пропорциональности для пользования тройным правилом. Отношения и пропорции показаны на многочисленных примерах, правда, в ряде случаев без объяснения. При изложении тройного правила Магницкий пользуется такой аналогией. При сооружении дома ставят сначала два угла, и затем третий и затем находят четвертый. Так и в тройном правиле: по известным трем пропорциональным величинам на-

ходят четвертую, пропорциональную третьей. Он рассматривает семь видов тройного правила. Первые четыре вида — простое, а последние три — сложное тройное правило.

Тройное правило Магницкий применяет для решения 137 задач, объединенных в 13 статей. Первая статья — «Тройная торговля». Для нее типична такая задача: «5 аршин стоят 2 рубля 2 гривны, сколько стоят 15 аршин?» Вторая статья — «Тройная торговля о куплях и продажах» — содержит более сложные задачи такого же типа. Для третьей статьи — «Тройной торговли в товарных овощах и с вывескою» типична следующая задача: «Куплено для пороха 22 бочки селитры весом с тарой 702 пуда, а платили за селитру с тарой 1404 рубля, а за пуд селитры по 2 руб. 16 коп., при этом от 108 пудов снимали 8 пудов. Найти стоимость пуда селитры с тарой, стоимость пуда селитры без тары, вес селитры и сколько уплачено за селитру».

Четвертая статья — «О прикупках и о накладах или убытках» (о прибыли при продаже некоторого количества товара с известной накидкой). Все задачи этой статьи рассмотрены в русских рукописях XVII в. Пятая статья — «Вопросная в тройном правиле» — содержит задачи различного содержания. Вот одна из них: «Из сукна шириной $2\frac{1}{4}$ аршина, а длиной $3\frac{1}{4}$ аршина сшили кафтан. Сколько нужно сукна на кафтан, если его ширина $2\frac{1}{2}$ аршина?» В шестой статье «Вопросной же со времени» помещены задачи на передвижение путешественников. Примером может служить следующая задача: «Идет один человек из города в другой город и проходит в день 40 верст, а другой человек идет из другого города навстречу первому и проходит 30 верст в день; расстояние между городами 300 верст. Определить, через сколько дней они встретятся и сколько каждый прошел до встречи». Такого рода задачи усложнялись тем, что пути, проходимые ежедневно, возрастали в арифметической прогрессии. Седьмая статья — «Деловая в тройном правиле» — задачи о пропорциональном делении, восьмая — «Торговая меновая в тройном правиле» — о количестве товара, подлежащего обмену на данное количество другого товара по известным ценам, девятая — «Торговая складная и делительная» — на правило товарищества. Десятая статья — «Торговая складная с прикащиками и с людьми их» — содержит задачи, аналогичные задачам девятой статьи, но усложненные введением других лиц на определенных условиях. Все задачи этой статьи описаны в русских рукописях XVII в. В следующей статье — «Торговой складной со времени» объединены также аналогичные задачи, но еще более усложненные. Например: «Некоторый человек нанял на год работника и обещал ему платить 12 руб. и кафтан, но он работал 7 месяцев и получил 5 руб. и кафтан. Сколько стоит кафтан? В 12-й статье «Займодавная и о срочном времени» помещены задачи на проценты и уравнения платежей, а в последней — «О соединении вещей» — задачи на смешение.

В четвертой части «Арифметики» Магницкий рассматривает три «фальшивых» правила:

а) в первом и во втором предположении получаем числа, большие искомого;

б) в первом и втором предположении получаем числа, меньшие искомого;

в) в первом предположении получаем число, меньшее искомого или наоборот.

Излагаются эти правила на примерах. Применение их для решения задач рассмотрено в трех статьях. Из 33 задач, приведенных в этих статьях, 17 описаны в русских рукописях XVII в. Наряду с правилом двух ложных положений Магницкий применял также правило одного ложного положения. Анализ решения задач показывает, что кроме двух приемов правила одного и двух ложных положений очень часто применяли и другие способы, равнозначные приемам решения линейных уравнений и систем линейных уравнений.

Правило ложного положения позволяло механически получать точное решение задач и его можно было применять в приближенных вычислениях, например при определении корней уравнений, при интерполировании. Это значение оно сохранило и поныне.

Четвертая часть заканчивается статьей «О утешных неких действиях через арифметику употребляемых», содержащей шесть занимательных задач, подобных задачам русских арифметических рукописей XVII в.

Пятая часть посвящена прогрессиям и извлечению квадратного и кубического корней. Статья «О прогрессиях» начинается определением: «Прогрессио есть пропорция, или подобенство чисел к числам в примножении, или во суменшении яковых либо перечнев». Рассмотрено три вида прогрессий: арифметические, геометрические и «гармонические», но определения даны лишь для первых двух. «Арифметическое прогрессио или пропорция есть, егда три или многая числа коеждо их от друга равное разнство, но разныя пропорции иматъ, и сие или одинаким пошествием, яко 2, 4, 6, 8, 10, 12 или не одинаким, яко 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13». «Геометрическое прогрессио или пропорция есть, егда три или многая числа, едину и туюжде между собою пропорцию, но разнства различная имут, и сие или одинаким пошествием, яко 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, или не одинаким, яко 2, 4, 6, 12, 18».

Магницкий рассматривает убывающие и возрастающие прогрессии. Вначале он излагает свойства арифметических прогрессий, затем дает правило для вычисления суммы и общего члена прогрессии: «Первый предел и последний сложи, и то сложение сумножи с половиною всех пределов». «Разнством сумножи 13 мест, и первый предел к тому приложи, и будет последний предел»³. И далее рассмотрены для различных случаев примеры и задачи арифметической прогрессии.

Изложение геометрической прогрессии начинается определением знаменателя геометрической прогрессии — «Идеже достоит умствовати яко егда, два числа геометрического прогрессия, и едино другим разделяется, и произведения бывает пропорция, или умноженное число, имже прогрессия возвышается или вознижается» — и среднего геометриче-

³ Умножается на 13, так как речь идет о вычислении 14-го члена прогрессии.

ского. Затем следуют примеры и задачи на геометрическую прогрессию. У Магницкого нет формул для нахождения общего члена и суммы членов геометрической прогрессии, при решении задач он пользуется описательным способом.

Вычислению квадратного корня посвящена статья (пятая часть) «О радиках квадратном». «Радикс есть число яковыя либо четвербоочныя и равномерныя фигуры или вещи един бок содержащие. И того ради радикс или корень именуется, зане от него вся пропорции всея алгебры начинаются или рождаются, и егда сие число само в себе множится, тогда произведение его нарицается число квадратное или четвертный радикс, зане всея равномерночетвербоочныя сущия фигуры вся арая, или плоскость в том произведении числами познавается... И когда седмикратно делил и то семь крат приложи к единому иже нашел из разделения, и будет 8, толико есть и пределов ихже искал еси». Определение иллюстрируется примером: «Егда радикс будет или един бок от яковыя либо равномерныя фигуры 10 сажень, или стоп, или каких иных мер... и тогда производится геометрическое число, или квадратное, якоже сие 10 множено с 10, ихже произведение есть 100 еже есть число квадратное...» Пример сопровождается чертежом квадрата, разбитого на 10×10 квадратиков. Следовательно, квадратный корень определяется геометрически.

Определив сторону квадрата по его площади и поместив табличку квадратов от 1 до 12, Магницкий отмечает, что всякое число может быть квадратным корнем. Изложение понятия квадратного корня он начинает с решения геометрической задачи: «Квадрат имеет площадь 100 квадратных единиц. Определить сторону квадрата». Далее подробно описывает способ извлечения квадратного корня и на примерах знакомит читателя с извлечением квадратного корня из целых и дробных чисел, давая весьма краткие объяснения. Приближенное значение корня он получает приписыванием пар нулей справа. Кубический корень рассмотрен в статье «О радиках кубичном». Среди задач на вычисление кубического корня есть задачи на замену куба несколькими равновеликими между собой кубами. Например: «Некоторый куб имеет сторону 28 вершков. Из него надо сделать 8 одинаковых меньших кубов. Определить сторону куба».

Рассматривая задачи на вычисление поверхностей, Магницкий приводит, впервые в русской литературе, сведения о десятичных дробях. Он полностью излагает сложение десятичных дробей и формулирует правила для вычитания и умножения их. Относительно деления и извлечения квадратного корня Магницкий ограничивается весьма краткими замечаниями, предоставляя читателю самому изучить эти операции.

«Книга вторая арифметики» начинается большим предисловием, раскрывающим назначение «арифметики логистики», или арифметики небесных движений, или, наконец, «астрономской».

Первая ее часть — «О чине арифметики, алгебраики речения и арифметики логистики через градусы и минуты действующия» — состоит из двух «пределений» — разделов. В первом разделе дано определение алгебры: «Алгебра же назвася от изобретателя, гебер нарицаемого.

а итальянски коссика от речения косса, еже есть вещь». Указано семь «видов» алгебры: нумерация, «знаменованье», сложение, вычитание, умножение, деление и тройное правило. В статье «О нумерации алгебраики» даны письменное и словесное обозначения последовательных степеней от 1-й до 12-й включительно: 1-ая — R — бок, или радикас; 2-я — q или 3 — квадрат, или зензус; 3-я — se или C — кубус, или кубик; 4-я — 33 , $qqbq$ — зензизензус, или квадрата квадрат, или биквадрат; 5-я — β — солидус, или сурдесолидус; 6-я — $3se$ или qC — зензикубус, или квадратокубус; 7-я — $B\beta$ — бисурдесолидус, бисолидус; 8-я — 333 или qqq — зензизензизензус, или триквадрат; 9-я — $sece$ — бикубус, кубокубус, сугубый кубус; 10-я — 3β — квадрат солида, или зенсурдесолид; 11-я — $C\beta$ — кубосурдесолид, или терсолид; 12-я — 3β или se — биквадратокубус. Далее перечисляются степени от 13-й до 25-й:

13	14	15	16	17	18	19
$D\beta$	$3B\beta$	$CE\beta$	3333	$E\beta$	$3CECE$	$F\beta$
20	21	22	23	24	25	
33β	$CEB\beta$	$3C\beta$	$C\beta$	$333CE$	$\beta\beta$	

«Алгебраические числа», указывает Магницкий, есть последовательные степени, образующиеся одна из другой по определенному закону. Однако особые знаки степеней он дает только для первой, второй, третьей, четвертой и пятой степеней. Остальные степени представляют собой комбинацию этих знаков. Правило умножения степеней только по форме отличается от обычного.

Показатель степени Магницкий обозначает (при изложении сведений об одночленах и многочленах) повторением возводимой в степень величины соответствующее число раз или помещает его в одной строке справа от основания степени. Коэффициент у него имеет такое же значение, как и в настоящее время. Знаки сложения и вычитания он записывает: —+— (больше) и —÷— (меньше). При чтении многочлена, состоящего из разных степеней одной и той же буквы, последняя не произносилась, читались лишь одни названия показателей. Действия с одночленами и многочленами Магницкий излагает на примерах. «Нумерацию» у него означает название чисел, а «знаменованье» — их изображение.

Действия с алгебраическими дробями (нумерация, сложение, вычитание, умножение и деление) Магницкий выполняет так же, как это делается и в настоящее время.

Вторая часть — «О геометрических через арифметику действующих» — состоит из двух «пределений». В 18 задачах первого «пределения» Магницкий знакомит с основными правилами вычисления различных фигур «планиметрии и солидометрии». Площадь треугольника он вычисляет как половину произведения основания на высоту, площадь параллелограмма и произвольного четырехугольника — как сумму площадей треугольников, на которые они делятся диагональю. Далее описывается вычисление площади круга и площади сегмента, у которого хорда равна радиусу (из площади сектора вычитается площадь тре-

угольника, вычисленная по формуле Герона). Площадь сектора определяется как полупроизведение его дуги на радиус. В этом же «пределении» изложено вычисление поверхности и объема земного шара в итальянских милях, без числовых примеров даны правила определения объемов призмы, цилиндра, пирамиды и конуса, а также боковых поверхностей пирамиды и конуса. Характерной особенностью всех задач является связь их содержания с жизненной практикой.

Первое «пределение» отличается некоторой противоречивостью формулировок правил и фактических вычислений в задачах, иллюстрирующих эти правила. Например, при вычислении площади треугольника правило сформулировано ошибочно (половина произведения сторон дает площадь), а вычисления и чертеж даны правильно (половина произведения основания на высоту). Чертежи и вычисления не соответствуют наименованиям фигур. Встречаются также ошибки при вычислении площади параллелограмма: иногда основание взято верно, а иногда вместо основания параллелограмма взят большой отрезок от вершины острого угла до основания перпендикуляра, опущенного из вершины противоположного острого угла на продолжение основания. Ошибка и опечатка допущены также при вычислении площади сегмента.

Второе «пределение» — «Различные действия через различный чин арифметики» — посвящено алгебре. Прежде всего рассматривается способ решения квадратных уравнений.

1. Уравнения первого типа:

$$q \rightarrow R = 0 \text{ или } q = 0 \rightarrow R \text{ или } 0 = q \rightarrow R.$$

В современной записи это выглядит так:

$$x^2 + x = c; \quad x^2 = c + x; \quad c = x + x^2.$$

Решение задачи («Длина некоторого отрезка умножается на 20 и сложенная со своим квадратом дает 800. Определить длину отрезка») сведено к решению квадратного уравнения вида

$$q \rightarrow 20R = 800,$$

которое в современных обозначениях записывается

$$x^2 + 20x = 800.$$

2. Уравнения второго типа:

$$q = R \rightarrow 0; \quad q \rightarrow 0 = R; \quad R \rightarrow 0 = q,$$

которые можно записать в виде

$$x^2 = x + c; \quad x^2 - c = x; \quad x + c = x^2.$$

Далее решена задача: «Квадрат неизвестного числа равен этому числу плюс 12. Найти число».

Магницкому было известно, что квадратный корень имеет два знака и поэтому квадратное уравнение имеет два решения, сумма которых равна по модулю коэффициенту при x . Однако он не принимал во внимание отрицательные, иррациональные и комплексные решения и поэтому, рассматривая уравнения первого и второго типов, пользовался одним решением.

После простых задач рассмотрены геометрические задачи, необходимые, как писал Магницкий, для построения тригонометрических таблиц. Эти задачи (13) помещены под особым заглавием «О различных линиях в фигурах сущих». Последние две задачи не связаны с квадратными уравнениями — в одной из них надо найти дугу сектора по его площади, в другой просто сообщается, что хорда угла в 60° или же сторона вписанного шестиугольника равна радиусу, а половина ее равна синусу 30° .

Далее Магницкий переходит к изложению тригонометрии, в которой он хотел «объявити прочая все синусы через последующая проблематы». В заключении раздела он сообщает, что таким путем можно получить все линии основных тригонометрических функций и составить таблицы синусов, тангенсов и секансов.

Рассмотрим вопрос об источниках и значении «Арифметики» Магницкого.

Магницкий подчеркивал, что писал книгу для купцов, экономов, инженеров, ратных людей, навигаторов и др. Этим объясняется большое количество детально разбираемых примеров и задач в книге в дополнение к подробно излагаемым правилам. Далее, автор ориентировался прежде всего на математиков-самоучек, к которым принадлежал и сам. В связи с таким назначением «Арифметики» он не следовал иностранным авторам, а придавал своей книге полуэнциклопедический характер: она содержит арифметику, сведения об алгебре, частично о геометрии, тригонометрии, астрономии, географии и навигации.

Основное место в «Арифметике» занимает арифметическая часть, как первая ступень математического образования. При изложении арифметики Магницкий больше всего использовал русские арифметические рукописи XVII в., руководствовался принятой в них классификацией разделов и системой изложения, заимствовал из них значительное количество задач. Магницкий знал также наиболее популярные учебники по арифметике немецких авторов (Шуере, Фаульгабера, Штифеля, Ризе). Согласно требованиям того времени он придал изложению материала характер предписаний, разъясняемых на примерах.

Новым в арифметической части руководства было учение о прогрессиях, а также извлечение квадратного и кубического корней⁴. Потребности практики вынуждали Магницкого включить в арифметику эти разделы, так как они могли понадобиться и такому читателю, который изучал только первую книгу «Арифметики». Изложение этого материала сопровождается большим количеством задач, требующих применения прогрессий и извлечения корней, что выгодно отличает книгу Магницкого от иностранных руководств того времени. В статью об извлечении квадратного корня Магницкий включил впервые в русской литературе сведения о десятичных дробях (в связи с разбираемыми в статье задачами на вычисление поверхностей).

В определениях Магницкого в этой части книги есть логические недочеты, но эти недочеты были присущи всем арифметическим руко-

⁴ В известных нам русских рукописях XVII в. (ОЛДП(ОШ)28. Собр. Унд. 682, QIX-3, Ст. 44) извлечение квадратного и кубического корней входило в геометрию.

водствам того времени. Некоторые неудачные места можно объяснить спешкой, неаккуратной записью или непродуманностью. Так, проверка девяткой рекомендуется без всяких оговорок, непоследовательно описано сложение и деление дробей, правило одного ложного положения применяется без каких-либо пояснений, правило смешения объясняется недостаточно, решение многих задач изложено неясно.

Значительным шагом вперед было введение в книгу элементов алгебры, хотя и отведено им незначительное место (например, символика, извлечению корней и решению трех видов квадратных уравнений отведено около 40 страниц, не считая геометрических приложений). В существо вопроса Магницкий не углубляется и знакомит читателя лишь с формальными правилами, иногда выраженными в довольно неясном виде. Но алгебра у Магницкого не играет самостоятельной роли. Ее назначение — помочь при решении ряда геометрических задач, важных с прикладной точки зрения и, в конце концов, подводящих изучающего к некоторым вопросам, связанным с навигацией. При изложении алгебры Магницкий тяготеет к немецкой, так называемой классической литературе, однако он не следовал одному какому-либо автору, тем более что в то время алгебраическая символика и понятия алгебры еще твердо не установились.

Геометрия в «Арифметике» Магницкого является составной частью трех разделов, посвященных извлечению квадратного и кубического корней и решению квадратных уравнений. Задачи геометрического содержания недостаточно обработаны: все в них верно, но изложение труднодоступно для читателя. Эти задачи Магницкий заимствовал из русских рукописей XVII в. или составил по их образцу. Все правила вычислений, за исключением вычисления объема шара, также даны в русских рукописях XVII в. (например, в рукописях F IX-47, «Синодальная 42»). В геометрической части книги нет никаких определений, указаны лишь отдельные названия, а также даны задачи с чертежами. Иногда новое название без объяснений встречается только в задаче. Обычно автор дает формулировку правила и иллюстрирует его примерами. Иногда приведен конкретный пример без предварительного ознакомления с соответствующим правилом и читателю предлагается на основании рассматриваемого примера самому сформулировать правило. Объем геометрических сведений был недостаточным для практических целей. В русских рукописях по практической геометрии он был значительно большим.

Сведения о тригонометрии в «Арифметике» Магницкого были новинкой в русской литературе. Занимают они в книге всего около десяти страниц. Нет никаких предварительных объяснений, даже не определены линии синуса и косинуса. Чертежи, необходимые для вывода соответствующих соотношений, служат в книге лишь для пояснения существования вопроса.

Нововведением в русской литературе была и последняя часть «Арифметики» Магницкого, в которой дано решение некоторых задач из навигационной практики.

Таким образом, в арифметической части книга Магницкого была написана на уровне европейских учебников того времени, в части же

алгебры она ближе всего подходила к учебникам алгебры конца XVI — начала XVII в. Несмотря на ряд недостатков, «Арифметика» Магницкого около полустолетия не имела себе равных в русской учебной литературе. Несколько переводных книг по математике появилось во второй четверти XVII в., но ими пользовались почти исключительно в гимназиях и в академическом университете. Преподавание же в остальных учебных заведениях велось по книге Магницкого. По этой книге изучали математику и люди, занимающиеся самообразованием. Она была, как писал В. В. Бобынин, промежуточным звеном между старинной русской рукописной литературой и вновь создаваемой тогда русской учебной математической литературой. «Арифметикой» Магницкого пользовались и авторы новых руководств по математике. Например, Я. П. Козельский в конце книги «Арифметические предложения» (СПБ, 1764) поместил «Меры пространства, весы и монеты» из «Арифметики» Магницкого.

3

Обзор другой учебной математической литературы

Необходимость в небольшом учебнике арифметики не отпала и после выхода «Арифметики» Магницкого. В 1705 г. было издано наглядное пособие по арифметике «Новый способ арифметики феории или зрительные, сочинен вопросами ради удобнейшего понятия... В Москве 1705 года через труды Василия Киприанова» в виде большой таблицы, украшенной рисунками, портретами ученых (Архимеда, Пифагора, Коперника, Тихо де Браге и др.) и содержащей начальные сведения по арифметике.

В первой части пособия даны пять основных «пределений» по Магницкому (с наименованием действий по-латыни и по-русски), квадратная таблица умножения, способ проверки умножения и деления девяткой (без разъяснения), примеры сложения и вычитания именованных чисел (многие примеры не торгового, как у Магницкого, а «военного» содержания). Во второй части заслуживают внимания десятичные («децимальные») дроби и действия над ними.

Кроме пособия по арифметике, В. Киприанов издал «Таблицы логарифмов, синусов, тангенсов, секансов к научению мудролюбивых тщателей», составленные учителями Навигацкой школы Фарварсоном, Гвином и Магницким (1703 г.), а также математическое сочинение под названием «Таблицы горизонтальные северные и южные широты», подготовленное Фарварсоном и Магницким (пер. с голл., 1722). Другие труды Фарварсона до нас не дошли, сохранились только их названия: «Евклидовы элементы» (1719 г.), «Тригонометрия плоская и сферическая». В официальных бумагах упоминается еще учебник по алгебре и трактат о качке корабля.

Хотя «Арифметика» Магницкого заполнила большой пробел в арифметическом курсе, для обучения геометрии она была малопригодна.

В широко известных геометрических рукописях XVII в. было только немного задач на измерение площадей и объемов, да и к ним часто давались неточные правила. Необходим был учебник по алгебре и геометрии, который бы удовлетворил возросшие потребности в такой литературе. Временно такими учебниками служили переводные книги иностранных авторов.

В 1708 г. был издан (напечатан новым гражданским шрифтом) учебник геометрии «Геометрия, словенски землемерие...» На второй титульной странице дано такое заглавие книги: «Приемы циркуля и линейки или избраннейшее начало во математических искусствах, инже возможно легким способом заступити землемерия и иных из оного происходящих искусств». Если учесть характер преподавания в Навигацкой школе, спешность подготовки кадров в тяжелой военной обстановке, традиции основной части рукописной литературы, то становится понятно, почему для перевода был избран практический, а не теоретический курс геометрии. Этот учебник является переводом изданной в 1686 г. в Вене книги «Ertzerzogliche Handgriffe des Zirckels und Lineals», автором которой, как установил И. Я. Депман, был австрийский математик Антоний Эрнест фон Пюркенштейн. Ценные библиографические сведения о ней опубликовал С. Е. Фель⁵. Переводчиком книги был известный сподвижник Петра I Яков Вилимович Брюс, редактировал первое издание Петр I. Известно три издания книги⁶. Второе издание учебника вышло в 1709 г. с двумя новыми разделами. Первый из них — «О превращении фигур плоских во иныя такова же содержания» — составлен Брюсом, второй — «Построение солнечных часов в различных случаях» — принадлежит Петру I. В 1725 г. вышло третье издание книги под таким же названием «Приемы циркуля и линейки».

В предисловии к «Геометрии» указывается, что теория геометрии неразрывно связана с практикой: «Геометрия есть сугуба: Первая обходится токмо единым размышлением о доводах в художествах и искусствах по ведомым или правилам оныя употребляюща, такожде из истинаго ли основания могу освидетельствованны быть, и называется такое единое размышление на латинском языке геометрия теоретика. Другая же противна первой есть, и действует токмо единым обучением, тако о чем первая на преди мыслили, то сия действием являет. А ежели сказать единым словом то сие быть приемы механического художества и называется на языке латинском геометрия практика. Хотя бы последняя и паче почтилася яко теоретика. Однако же не может едина без друга добро стояти, а кто токмо едину теоретику хвалит, делает токмо благоположенное основание, но винже иногда строится... Не много инако и тому служитца будет, иже бы токмо едину практику хотел. Зане он царскую крепость на песке строил бы, и под Дунай руке подкопы бы проводил, а не остаток с баварским плотом во Индею ездил бы...»

⁵ С. Е. Фель. Петровская геометрия. — В кн.: Труды Института истории естествознания. Т. 4. М., 1952, стр. 140—165.

⁶ Экземпляр одного из них хранится в Государственной публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина.

Придавая большое значение теории в предисловии, автор, однако, ограничивается только основными определениями геометрических образов в духе Евклида, сообщает аксиомы и часть постулатов «Начал» и вводит специальные допущения, необходимые при решении задач на построение. Например: «Допущается и признается свободно без всякого прекословия. Ежели кто имеет прямую линейку, к тому же карандаш или перо, то может он тем на бумаге из данной точки прямую линию начертить» или «Обещается каждому свободно данную прямую линию продолжить, коль далеко похощешь, токмо бы места свободного довольно было». Переходя к решению задач на построение, автор ограничивается только описанием построения. Семи частям книги предшествуют определения, аксиомы и постулаты. Затем даны задачи и правила их решения. Заканчивается книга рассмотрением разверток многогранников и правил их построения. «Геометрия» в свое время была весьма распространенной, о чем свидетельствует значительное количество рукописных ее списков, известных в настоящее время.

В 1708 г. была издана также книга Брюса «О превращении фигур плоских во иныя такова же содержания». Она состоит из 22 пронумерованных страниц и 11 таблиц с чертежами. Первая задача («Какую эллипсис циркулем начертить») есть и в «Геометрии» издания 1708 г., однако в этой книге предложен иной способ ее решения. Остальные 39 задач — на построение равновеликих фигур. В «Геометрии» 1708 г. их нет.

«Геометрия» не затрагивала численного измерения линий и фигур и поэтому не могла удовлетворить требованиям геометрического образования. По-видимому, для восполнения этого пробела была издана «Геометрия — практика с фигурами»⁷. До последнего времени не были точно установлены год, место издания этой книги и фамилия ее автора. П. П. Пекарский и В. В. Бобынин считали, что автором ее является Фархварсон и что издана она была в 1730 г. или даже в 1739 г. И. Я. Депман установил, что книга издана в 1714 г. в Петербурге и автором ее является Брюс.

В первом разделе книги рассмотрено 13 задач на решение прямоугольных и косоугольных треугольников. Во втором разделе дано решение тех же задач, но с применением логарифмических таблиц. В третьем и четвертом разделах автор вычисляет поверхности и объемы различных геометрических фигур. Решения, в отличие от первых двух разделов, носят чисто геометрический характер, без применения тригонометрии. Теоретических объяснений в книге нет.

Изданный в 1728 г. на французском языке учебник «Сокращения математические» предназначался для обучения Петра II. Учебник составили члены Петербургской академии наук Я. Герман и Ж. М. Делиль. В этом же году он был переведен на русский язык И. Горлицким. Книга содержит сведения по геометрии, в основном, а также по арифметике и тригонометрии. Значительная часть материала дана в форме

⁷ Один экземпляр этой книги (без титульной страницы) хранится в Библиотеке АН СССР, другой (тоже без титульной страницы) — в Государственной библиотеке СССР им. В. И. Ленина.

вопросов и ответов. Изложение носит схематический характер, доказательства, как правило, не даны, но большинство утверждений иллюстрируется примерами. В первой части — лонгиметрии — кроме линий рассмотрены приемы измерения на местности и приведены соответствующие примеры, во второй — планиметрии — вопросы построения различных фигур, измерения площадей, в третьей — стереометрии — свойства пространственных фигур. Приведены примеры на вычисление поверхностей и объемов многогранников и круглых тел. Хотя тригонометрии посвящено всего 16 страниц, однако для того времени она была изложена достаточно полно. Наименее удачно изложены в книге сведения по арифметике. Как и остальные учебники по геометрии, изданные в России в начале XVIII в., эта книга была написана с практическим уклоном.

4

Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии в конце XVII — первой четверти XVIII в.

Воссоединение Украины с Россией в 1654 г. не охватывало объединения всех земель, населенных украинцами, в составе Русского государства. Оно привело к воссоединению в этом государстве Левобережной Украины и Киева с прилегающим к нему округом. Вся Правобережная Украина — Волынь, Подолия, Галиция — осталась под властью панской Польши. Под властью Польши находились также Белоруссия и часть Смоленщины. Поэтому развитие культуры на Украине и в Белоруссии в этот период представляет собой крайне сложный процесс, в котором переплетались различные влияния. Россия на протяжении всей истории оказывала большое влияние на развитие экономики и просвещения на Украине и в Белоруссии и всегда подавала братскую помощь украинскому и белорусскому народам. Украинско-белорусская культура со своей стороны оказывала определенное влияние на развитие культуры соседних народов. Общеизвестна роль киевских «старцев», выучеников Киево-Могилянской коллегии украинца Арсения Сатановского, белоруса Симеона Полоцкого и многих других в деле развития просвещения. В некоторых отраслях знания «киевское» влияние было более ощутимым, в других — менее. В конце XVII и начале XVIII в. многие выученики и студенты коллегии были школьными учителями в России, даже в таких отдаленных местах, как Архангельск, Урал, Сибирь.

Неменьшим было влияние Киева и на те области, которые оставались еще под властью Польши. В течение длительного времени Киево-Могилянская коллегия (а затем академия) оставалась единственным высшим учебным заведением, в котором учились украинцы, белорусы и русские.

Как и в России, на Украине в конце XVII—первой четверти XVIII в. для самостоятельного математического творчества не было достаточных возможностей. Поэтому рассмотрим лишь уровень математических знаний в обеих частях украинско-белорусских земель в описываемый период, изученный на основании печатной и рукописной литературы этой эпохи и системы образования.

В Польше в XVII—XVIII вв. оставалась та же система образования, которая в основных чертах сложилась еще в XVI в. Это были приходские и средние (называвшиеся современниками «высшими») школы и академии. В 1612 г. Краковская академия выработала для католических приходских школ план, в который входили следующие предметы: латинский и греческий языки, катехизис, риторика, поэзия, история, музыка, арифметика и «компут» (пасхалия) — *computus ecclesiasticus*. Практически это сводилось к обучению чтению, письму и двум-четырем действиям арифметики, в зависимости от знаний преподавателя, а также элементам «компута», в которые входили счет и календарные вычисления на пальцах.

В этот период на украинско-белорусских землях было две академии: одна — иезуитская — в Вильно, другая, образованная в 1661 г. из академической колонии Краковского университета — во Львове. Академическая школа была в Бродах, 14 иезуитских коллегий, православные (братские) школы — во Львове, Виннице, Остроге, Луцке и в некоторых других местах. Было также несколько лютеранских, реформатских и арианских школ. По оценке Лукашевича, число учащихся в этих школах составляло около 5 тыс. чел., из которых на долю местного населения приходилось, вероятно, не более 2 тыс. чел. Лишь в братских, а также православных монастырских и приходских школах контингент учащихся состоял из украинцев и белорусов. Однако число их трудно определить.

Следует полагать, что самый высокий уровень преподавания математики в Польше был в Краковской академии, однако и здесь он был ниже, чем в других западноевропейских университетах этого времени. «... Хотя математические предметы [в Кракове] преподавали несколько профессоров, обучение геометрии ограничивалось «Элементами» Евклида, причем излагались не все книги, арифметика же появлялась в лекционном плане лишь в порядке исключения... Число профессоров математики в Краковском университете было довольно большим, но состояние науки было невысоким, так как не было специальных профессоров математики и геометрии, а профессора философского отдела преподавали эти предметы по очереди. В соответствии со статутом в начале полугодия профессора тянули жребий на предметы, которые им должны были припасть. Такой порядок затруднял специализацию по одной научной дисциплине и принуждал профессоров заниматься различными предметами. Недостатки преподавания и отсутствие самостоятельного творчества в науке были естественным результатом такой системы»⁸.

⁸ I. F r a n k e. Jan Brożek (Broscius) — Akademik Krakowski. 1585—1652. Kraków, 1884, st. 18.

Если в академиях математические предметы обособлялись хотя бы в преподавании, то в других школах не было и этого: арифметика и геометрия входили обычно в курс философии. Объем сообщаемых сведений зависел от знаний самого профессора философии. Если же у профессора не было каких-либо знаний по математике, то математические элементы в состав курса не входили. Даже в низших классах ознакомление учащихся с некоторыми элементами счета, что, естественно, было необходимым, проводилось не везде и не всегда. В частности, арифметика не входила в план низших классов иезуитских школ. Только в 1614 г. генерал ордена иезуитов Клавдио Аквавива разрешил обучать в них элементам арифметики, «ибо неудобно не знать четырех действий», но и то при условии, что для нее не отводилось отдельных уроков.

Учебники, по которым велось преподавание в школах, были те же, что и в XVI в. Однако зачастую уровень школьных математических знаний был ниже уровня учебника. Более точные сведения об этих знаниях дают рукописные студенческие и преподавательские записи.

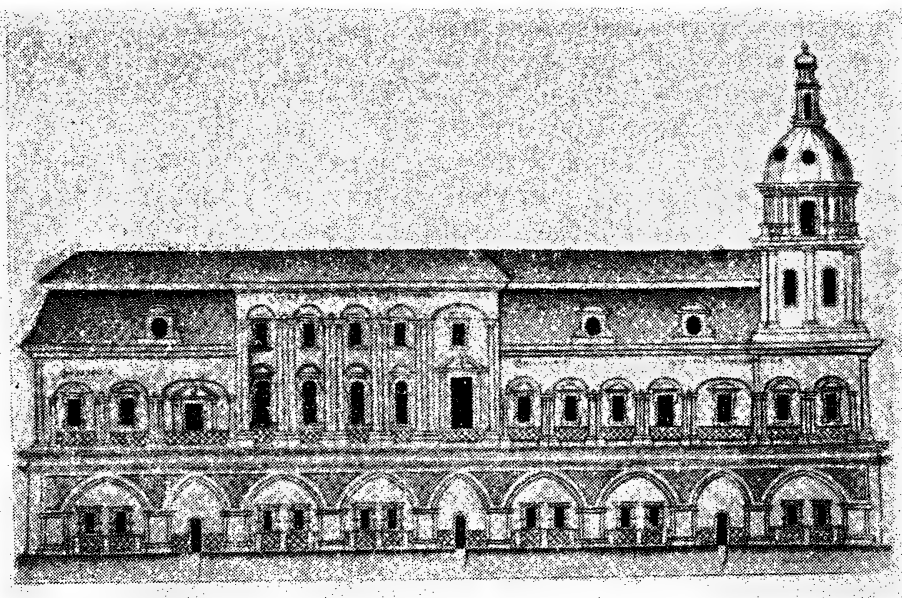
В середине XVII в. во Львовской академической школе математика читалась как отдельный предмет. Курс состоял из арифметики, геометрии и некоторых разделов прикладной математики, которые во второй половине XVIII в. выделились в отдельный предмет, получивший название «смешанная математика».

Раздел арифметики включал ознакомление с нумерацией, первыми четырьмя действиями, понятием об арифметической и геометрической прогрессиях, правилом пропорционального деления, подробное изучение действий с дробями, правила извлечения квадратного и кубического корней, а также целый ряд правил — правила ложного положения, товарищества и др.

Геометрическая часть курса представляла собой ознакомление с началами геометрии, изучение «Элементов» Евклида. Изучали обычно планиметрию, а из стереометрии — лишь некоторые правила, предлагаемые в виде рецептов. Достаточно подробно рассматривали задачи на построение, по-видимому, им придавали не меньшее значение, чем основным теоремам, хотя последние и давались иногда с доказательствами.

После геометрии изучали «компут». Объем математических знаний, которые давала Львовская академия, постепенно увеличивался. Например, курс начала XVIII в. был намного полнее. Кроме названных выше частей в него входила стереометрия, практика действий с логарифмами и основы тригонометрии. В дополнительные разделы были включены основы механики («простые машины»), баллистика, гидравлика, геодезия, катоптрика. Особенно детально проводились астрономические вычисления, для чего, в сущности, и изучались логарифмы и тригонометрия. Эти вычисления обусловили и хорошую постановку обучения действиям с именованными числами.

Значительно меньшим был курс математики в иезуитских школах. В подавляющем большинстве он сводился к изложению основ арифметики до дробей, причем даже без примеров и задач. Правда, и здесь заметно было некоторое увеличение объема учебного материала: отдельные



Здание Киевской академии.

курсы, относимые ко второму десятилетию XVIII в., включали кроме указанных еще некоторые сведения по геометрии (планиметрии) без доказательств, некоторые рецепты из «практической геометрии», например определение расстояний до недоступных объектов и их высот и пр., а также элементарные сведения о космографии в геоцентрическом изложении. В курсе, прочитанном около 1730 г., был даже целый раздел, посвященный некоторым элементам алгебры. Курс математики в Виленской иезуитской академии по объему не превышал, по-видимому, курса Львовской иезуитской школы: он состоял из некоторых элементарных сведений по арифметике, включая действия с дробями, пропорций и отдельные правила решения задач.

Итак, математические знания, которые давали школы Правобережной Украины, были очень ограниченными. Они сводились к арифметике, к правилам решения арифметических задач, и, в лучших случаях, к изложению основ геометрии по Евклиду, но без доказательств. На более высоком уровне находилось преподавание математики во Львовской академии. Здесь в начале XVIII в. учили уже действиям с логарифмами и тригонометрическим вычислениям с целью их практического применения в астрономии. Астрономия, или, скорее, космография, излагались по Птолемею.

Киево-Могилянская коллегия в середине XVII в. оказалась в тяжелом положении: пожар уничтожил почти всю ее библиотеку и имущество, а постоянные распри между гетманами, не признававшими друг друга, лишили ее значительного числа учащихся. Стоял даже вопрос о ее существовании, и, если бы не материальная и моральная поддержка киевского населения, она была бы закрыта.

С 1680 г. началось возрождение коллегии, количество учащихся в ней непрерывно увеличивалось. В 1694 г. коллегия получила царскую

грамоту, приравнивавшую ее к высшим учебным заведениям, а в 1701 г. последовал указ, возводивший ее в ранг академии.

В Киевской академии конца XVII — начала XVIII в. было восемь классов. В шести низших классах читались аналогия, или фара, инфима, грамматика, синтаксима, поэзия, риторика, в двух высших — философия и богословие. Арифметика входила в синтаксиму, но преподавалась опять-таки в зависимости от знаний преподавателя. В старших классах математика входила в «философию» (в «натурфилософию») и состояла из арифметики и геометрии, но читалась также не всегда.

Из руководств, по которым обучали арифметике, М. Булгаков называет только одну сохранившуюся рукопись — «Tractatus de primo ac nobilissimo universae Mathematicae scientia fundamento seu de Arithmetica, 1700 anno» (Трактат об основаниях первой и благороднейшей науки всеобщей математики, или об арифметике). Автор рукописи делит «сию науку» на три части: виды исчисления простого, исчисление пропорций и исчисление вероятностей. Что подразумевал автор под исчислением вероятностей, осталось неизвестным. Можно лишь догадываться, что речь шла о некоторых арифметических правилах.

В первые годы XVIII в. философский курс в Киевской академии читал Феофан Прокопович (1681—1736). Он принадлежал к наиболее выдающимся деятелям русского просвещения начала XVIII в. Родился Прокопович в Киеве. 17-ти лет от роду окончил с успехом курс наук в академии. Не удовлетворившись полученными знаниями, уехал учиться за границу. Чтобы иметь возможность учиться в иезуитской школе, он принял унию и, как лучший ученик Владимиро-Волынской коллегии, был отправлен в Рим в коллегию св. Афанасия, назначением которой было воспитание греков и славян в католическом духе. Благодаря своим блестящим способностям Феофан Прокопович сразу же выделился из среды воспитанников коллегии и получил возможность работать в Ватиканской библиотеке, а также брать частные уроки у начальника коллегии.

В Риме Феофан Прокопович пополнил свое образование по части истории и классической литературы, а также основательно изучил математику и ознакомился с новейшими достижениями естественных наук. Около 1704 г. он возвратился в Киев и был определен преподавателем пиитики в академии.

Из иезуитских школ Феофан Прокопович вынес непримиримую ненависть к католицизму и его мертвящей схоластике. В своем курсе пиитики и риторики он остро высмеивает вычурность стиха, строго разграничивает проповедь и ораторскую речь, советует ученикам быть ближе к жизни, к современности. В 1707—1708 гг. Феофан Прокопович прочел двухгодичный курс философии. Сократив, а частично и просто исключив схоластические рассуждения, он пополнил курс сведениями из разных наук, ввел целые разделы физики, арифметики и геометрии.

В 1709 г. о Феофане Прокоповиче узнал Петр I. В следующем году он уже сопровождал Петра I в Прутском походе. Тогда же Петр I назначил его ректором Киевской академии. Уже будучи ректором, Феофан Прокопович начал читать курс богословия. Здесь он впервые в России

выступил как поборник учения Коперника. «Если, — пишет он в «Богословии», — ученики Коперника и другие ученые, защищающие движение Земли, могут привести в доказательство своего мнения достоверные физические и математические доводы, то тексты св. Писания, в которых говорится о движении Солнца, не могут служить для них препятствием». Поклонник и почитатель Бекона и Декарта, Прокопович резко осуждал преследования, которым подвергался Галилей. «... Зачем, о нечестивый папа, мучишь ты деятельного служителя природы?» — обращается он к служителям римской церкви. Прогрессивные взгляды Феофана Прокоповича ярко выражены и в его полемике с ненавистными ему католическими богословами. Он выступает против слепой веры, в которой строго преследовалось всякое проявление свободной мысли.

С 1716 г. до самой смерти Петра I Феофан Прокопович почти неотлучно находился при нем. Он был убежденным сторонником реформ Петра I, настаивал на необходимости расширения образования. По поручению Петра I он разработал «Духовный регламент». В 1721 г. Прокопович на собственные средства открыл в Петербурге школу для сирот и бедных детей, ставшую одной из лучших школ своего времени. Здесь учили славянскому, русскому, латинскому и греческому языкам, риторике, истории, римским древностям, арифметике, геометрии, рисованию и музыке. В числе учителей были такие ученые, как З. Т. Байер и Г. Ф. Федорович, принятый впоследствии М. В. Ломоносовым в академический университет. Воспитанниками школы были академики А. П. Протасов и С. К. Котельников.

Деятельное участие принимал Феофан Прокопович и в других мероприятиях, направленных на развитие культуры и образования в России, в частности в организации Академии наук. Образованнейший человек своего времени (в его личной библиотеке насчитывалось до 30 тыс. томов различных изданий), он поддерживал тесные связи с передовыми людьми России, нередко оказывал им существенную помощь. Можно предполагать, что не без совета Феофана Прокоповича Ломоносов поехал в Киев для ознакомления с математическими науками, которые в московской академии не преподавались.

Феофан Прокопович оставил большое литературное наследие. Значительная часть его опубликована. Математический трактат (неопубликованный) «Два первых и обширнейших основания математики арифметика и геометрия в пользу учащегося российского юношества в Академии Киево-Могилянской изложенные, 1707 и 1708 гг.» представляет собой лекции по арифметике и геометрии.

Первая часть — арифметика — построена, как и западноевропейские учебники. Однако некоторые разделы, например учение о дробях, пропорции, способы решения задач, изложены более подробно и доходчиво, чем в зарубежных руководствах. Все разделы сопровождаются примерами и решенными задачами. В третьем разделе, названном автором «Арифметика, как специальная часть геометрии», рассмотрено извлечение квадратных и кубических корней, нахождение пропорциональных чисел.

Вторая часть — геометрия — состоит из четырех разделов: о поверхностях, о телах, об измерении длин, высот и глубин, о размерах площадей и твердых тел. По своему характеру эта часть представляет собой «Элементы» Евклида в сокращении, выполненном с большим педагогическим мастерством. Все теоремы даны с доказательствами, задачи на построение доведены до конца и снабжены очень ясными чертежами, составленными, несомненно, самим автором.

В лекциях Феофана Прокоповича есть дополнения к Евклиду (рассмотрены овал, эллипс, парабола, спираль). Некоторой «новизной» отличается и методика подачи материала. Например, трудный для усвоения раздел об извлечении квадратных и кубических корней иллюстрирован чертежами, облегчающими геометрическую трактовку обоих понятий (квадрат, разделенный на квадратики; куб, построенный из кубиков и изображенный в аксонометрии). Значительное место отведено в курсе практическим измерениям на местности и необходимым для этого инструментам.

По сравнению с «Арифметикой» Магницкого, курс Феофана Прокоповича, почти современный ей, отличается более высоким теоретическим уровнем.

В Киевской академии после ухода Феофана Прокоповича некоторое время продолжал оставаться установленный им порядок. Особенно это касается преподавания математики. Правда, арифметику перенесли в пиитический класс, но, по-видимому, в философском классе читался более подробный курс математики, аналогичный курсу Феофана Прокоповича. Об объеме его можно судить по рукописи, составленной в Киевской академии около 1735 г. Курс этот включал арифметику, элементарную и практическую геометрии, «арифметическую астрономию», тригонометрию, астрологию и астрономию. В изложении видно влияние Феофана Прокоповича, некоторые числовые примеры целиком взяты у него, но в целом содержание курса значительно больше и полнее.

Таким образом, в первой четверти XVIII в., благодаря трудам Феофана Прокоповича и его преемников, преподавание математики в академии было улучшено и по объему не уступало преподаванию в западноевропейских университетах. Начиная с первой четверти XVIII в. и на протяжении по крайней мере 75 лет Киевская академия готовила учителей для школ, а также служащих для различных служб, включая медицинскую и аптекарскую.



Феофан Прокопович.

Основание Петербургской академии наук

Петербургская академия наук сыграла большую роль в развитии науки и просвещения в России. С ней связаны многие крупные достижения русской науки XVIII в.

Мысль о создании в России Академии наук принадлежит Петру I. По его замыслу академия должна была быть источником научных знаний в России, научным центром («Академики должны приобрести нам в Европе доверие и честь, доказав на деле, что и у нас работают для науки и что пора перестать считать нас за варваров, пренебрегающих наукой», — писал Петр I), а также школой для подготовки специалистов в различных областях знания. Поэтому при ней были созданы университет и гимназия.

Проект положения об академии был составлен лейб-медиком царя Л. Л. Блюментростом и одобрен на заседании Сената в присутствии Петра I 22 января 1724 г. 28 января 1724 г. Сенат издал указ об учреждении Академии наук, определив на ее содержание 24 912 руб. в год.

В проекте было установлено различие между академией и университетом. Университет определялся как «собрание ученых людей, которые наукам высоким... до какого состояния оные ныне дошли, молодых людей обучают», академия же — как «собрание ученых и искусных людей, которые не только сии науки в своем роде, в том градусе, в котором оные ныне обретаются, но и через новые инвенты оные совершить и умножить тщатся». За границей подобных научных учреждений в то время было немного, если не считать итальянских академий, долго сохранявших характер частных ученых содружеств. Академии наук существовали только в Париже (с 1666 г.), в Лондоне (с 1660 г.) и в Берлине (с 1700 г.). Петербургская академия наук резко отличалась по структуре от западноевропейских учреждений такого рода. Западные европейские академии носили только научно-исследовательский характер. Для России такого рода академия не подходила, так как тогда науки «не скоро в народе расплодятся». Петербургская академия наук была на твердом государственном бюджете, являвшемся серьезным ее преимуществом перед другими академиями. Во Франции, например, не все даже ординарные академики получали жалованье, а Берлинская академия с трудом поддерживала свое существование изданием календарей, устройством лотерей и другими подобными путями. Отличалась Петербургская академия от иностранных академий и составом наук, которые в нее входили. Она делилась на три класса: математический, физический и гуманитарный. Математический класс состоял из четырех кафедр: математики, астрономии, географии и навигации и двух кафедр механики. Физический класс также состоял из четырех кафедр: теоретической и экспериментальной физики; анатомии; химии и ботаники. В гуманитарный класс входили три кафедры: красноречия и древностей; древней и новой истории; права, политики и этики.

Не похож был на западноевропейские и академический универси-

тет. В состав его входили юридический, медицинский и философский факультеты, в то время как в западноевропейских университетах сохранилось еще в значительной мере схоластическое, богословское направление, а протестантские немецкие университеты имели богословский факультет. Петербургская академия наук и ее университет были центром новой, светской науки, свободной от церковного влияния.

Сначала для академии пришлось приглашать ученых различных специальностей из-за границы, причем приглашались только крупные специалисты. Приглашением иностранных ученых занялся, по просьбе академии, немецкий философ и математик Христиан Вольф (1679—1754). Особенно удачным оказался подбор ученых в области математики и механики (многие из них были приглашены по совету выдающегося немецкого ученого Г. Лейбница): математики братья Николай и Даниил Бернулли из Базеля (сыновья И. Бернулли), Я. Герман, Х. Гольдбах, Ф. Майер, физик и механик Г.-Б. Бюльфингер, математик, физик и метеоролог Г.-В. Крафт и величайший математик и механик XVIII в. Л. Эйлер. Из 22 профессоров и адъюнктов, приглашенных в 1725—1727 гг., было восемь математиков и механиков. Из крупных ученых других специальностей были приглашены астроном И. Н. Делиль, оптик и механик И. Г. Лейтман, натуралисты И. Дювернуа, И. Вейтбрехт, И. Г. Гмелин и др.

Первое собрание академической конференции состоялось 13 ноября 1725 г., уже после смерти Петра I. Этот год и считается датой основания Петербургской академии наук.

В отличие от иностранных академий Петербургская академия наук располагала превосходным физическим кабинетом, анатомическим театром, хорошей типографией и граверной палатой, механическими и оптическими мастерскими, библиотекой.

История Библиотеки Академии наук такова. Когда был решен вопрос о перенесении столицы из Москвы в Петербург, по распоряжению Петра I в Петербург были перевезены рукописные и печатные книги, хранившиеся в царском дворце в Москве, а также книги из прибалтийских провинций. Для Библиотеки было отведено помещение в Летнем дворце Петра I. «Библиотекарем и надсмотрителем редкостей и натуралиев» был назначен И. Д. Шумахер. В 1714 г. начались работы по приведению собранных книг в порядок. Этот год считается датой основания Библиотеки Академии наук. В 1718 г. книги и естественно-исторические коллекции были перевезены в дом А. В. Кикина (близ нынешнего Смольного). К 1721—1722 гг. относится попытка комплектования

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS I.
AD ANNUM cdo lxxx xxvi.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cdo lxxx xxviii.

Титульная страница первого
номера первого академического
журнала.



Вид на здания Петербургской академии наук.

Библиотеки иностранными книгами. В эти годы Петр I направил за границу Шумахера, который должен был, кроме выполнения других поручений, «стараться... полную библиотеку промыслить». За границей было куплено всего 517 томов случайного содержания.

После основания Академии наук Библиотека и Кунсткамера были переданы в ее распоряжение. В 1728 г. они были размещены в новом, специально построенном здании на Васильевском острове. Библиотека занимала восточную часть здания, Кунсткамера — западную. В центре здания разместились Астрономическая обсерватория и Анатомический театр. Торжественное открытие Библиотеки и Кунсткамеры состоялось 25 ноября 1728 г.

С этого времени Библиотека обслуживала, главным образом, академиков и других работников Академии наук. Позже основными читателями Библиотеки наравне с академиками были состоявшие при академии переводчики, студенты университета, ученики гимназии. На протяжении всего XVIII в. Библиотека Академии наук оставалась и единственной государственной публичной библиотекой.

Наибольшую ценность представляли рукописи бывшей библиотеки московских царей. Это ценнейшие исторические памятники, в частности древние летописные своды, имеющие первостепенное значение для изучения истории нашей страны, ее культуры, истории языка и пись-

менности. Постепенно Библиотека пополнялась различными частными книжными собраниями. Многие собрания она покупала после смерти их владельцев или получала после конфискации имущества государственных деятелей, подвергшихся опале. Так, в 1718 г. была куплена библиотека А. А. Виниуса, одного из сподвижников Петра I; в следующем году ей были переданы книги лейб-медика Р. Арескина. Перешли в Библиотеку и личные книги Петра I после его смерти, книги царевича Алексея, Я. В. Брюса, П. П. Шафирова. С 1728 г. на Академию наук была возложена роль цензора: она проверяла новые, выходявшие в России, книги и передавала их в Библиотеку. В этом же году при Академии наук была организована Книжная палата, долго остававшаяся единственным центром книжной торговли в Петербурге. Академия наук не только приобретала книги для Библиотеки, но и распространяла свои издания за рубежом.

Большинство книг Библиотеки было доступно только образованным людям, так как они были написаны на латинском и некоторых западноевропейских языках. Этим объясняется не очень большое число ее читателей. По записям 1732—1735 гг., литературу на дом получали в эти годы 85 чел., из них 44 принадлежали к числу ученых и служащих академии. Больше всего книг, до полутора ста томов, брал в эти годы Л. Эйлер.

В 1742 г. был напечатан латинским шрифтом трехтомный каталог Библиотеки, содержащий свыше 15,5 тыс. книг. Это был первый в России печатный каталог большой публичной и научной библиотеки, состоявшей в основном из светской литературы. Почти одновременно с этим каталогом был напечатан русским шрифтом «камерный каталог», содержащий данные о русских печатных и рукописных книгах.

Одним из просветительных учреждений, возникших в первой четверти XVIII в. и впоследствии вошедших в Академию наук, была Кунсткамера. Основанная Петром I в 1714 г., она стала доступной для обозрения фактически с момента перевода в дом Кикина.

Первым крупным поступлением было собрание Аптекарской канцелярии, состоявшее из геологических и анатомических препаратов. В дальнейшем Кунсткамера пополнялась разными коллекциями (зоологическими, ботаническими, минералогическими, археологическими), присылавшимися губернскими канцеляриями в соответствии с правительственными указами.

Большая роль в деле сбора коллекций для музея принадлежала отечественным экспедициям. Много ценнейших экспонатов дала Камчатская экспедиция 1733—1743 гг. Другим источником пополнения Кунсткамеры являлись принесения в дар. Такими были коллекции Петра I, этнографическое собрание Брюса, коллекция животных Северного моря, присланная новгородским архиепископом Феодосием, а также большое количество разных «раритетов». Ценные коллекции, характеризующие природу и культуру зарубежных стран, закупались также на Западе. Особую группу составляли различные инструменты по математике и экспериментальной физике, закупленные по распоряжению Петра I.



Библиотека и Кунсткамера Петербургской академии наук.

во время его зарубежных путешествий, а также собрание математических и физических инструментов физика П. Мушенбрука, которыми было положено начало физическому кабинету Академии наук.

К началу 30-х годов Кунсткамера представляла собой одно из богатейших в мире собраний. Был составлен каталог экспонатов Кунсткамеры. В работе по каталогизации принимали участие лучшие ученые академии — М. В. Ломоносов, Г. Крафт, И. Гмелин, а также некоторые приглашенные специалисты.

Крупнейшим отделом Кунсткамеры была натуркамера. Она состояла из трех подразделов: коллекции из животного царства, включавшей препараты по анатомии человека и млекопитающих, а также собрание «четвероногих», птиц, рыб и насекомых; коллекции растений и коллекции минералов.

Значительное место занимали в Кунсткамере этнографические и археологические коллекции. В физическом кабинете хранились астролябии, квадранты и другие инструменты для измерения высоты звезд, а также Готторпский глобус. Это замечательное сооружение (диаметром 336 см) было одновременно глобусом и планетарием. Глобус наглядно убеждал в правильности гелиоцентрической теории и тем самым опровергал церковно-схоластическую геоцентрическую теорию. В этом же здании находился и мюнцкабинет с богатыми коллекциями по русской и мировой нумизматике. В музее были также акварели, гравюры и картины.

При Академии наук были созданы мастерские по изготовлению научных инструментов и приспособлений, необходимых для выполнения экспериментальных исследований: Оптическая, или, как она тогда еще называлась, «Преспективных трубок и микрошкopies палата», Инструментальная и Слесарная палаты. Академии удалось пригласить одного из наиболее опытных западноевропейских специалистов в области производства научных инструментов И. Лейтмана. Лейтман приехал в Петербург в 1726 г. и сразу получил звание профессора механики и оптики. В этом же году он оборудовал механическую и оптическую мастерскую и начал изготавливать различные научные инструменты: зажигательные стекла, зрительные трубы, микроскопы, зеркальные телескопы, точные пробирные весы и пр. Однако мастерская Лейтмана заметного следа в истории русского приборостроения не оставила. Основателями научного приборостроения в академии (а частично и вообще в России) были мастер «математических инструментов» И. И. Калмыков, мастер оптических инструментов И. Е. Беляев и А. К. Нартов. И. И. Калмыков и его ученик П. О. Голынин систематически изготавливали различные астрономические, геодезические и чертежные инструменты высокого качества для географического департамента, академических экспедиций и различных государственных учреждений. Мастер И. Е. Беляев мог сделать любой из известных в то время оптических инструментов, а также освоил технику изготовления ртутных барометров и термометров.

В 1735 г. академические мастерские возглавил А. К. Нартов. Мастер токарного дела в мастерской Навигацкой школы, впоследствии руководитель придворной токарной мастерской Петра I и технический руководитель всех монетных дворов России, Нартов был крупнейшим специалистом в стране в первой половине XVIII в. Он объединил академические мастерские в одну общую экспедицию лабораторий механических инструментальных наук, добился увеличения ассигнований для этой экспедиции, расширения ее штата, улучшения оборудования.

6

Первые математики в Петербургской академии наук

Яков Герман. Родился в Базеле 16 июля 1678 г. Там же получил степень магистра богословия. Под руководством Якова Бернулли он начал заниматься математикой, которой и посвятил свою научную деятельность. Вскоре Герман становится ученым с европейским именем: его избирают членом Берлинской, а несколько позднее — Болонской академии наук. В 1707 г. Герман занял кафедру математики в Падуанском университете (Италия). В 1713 г. он переезжает в Германию, где возглавляет профессорскую кафедру во Франкфурте-на-Одере и пишет главнейшее из своих сочинений о силах и движении — «Форономию, или о силах и движениях твердых и жидких тел» (*Phoronomia seu de viribus et motibus*

corporum solidorum et fluidorum», 1716). В этом сочинении Герман дает метод интерполирования и отделяет кинематическую геометрию от динамики.

В 1725 г. вместе с Бюльфингером Герман приезжает в Петербург в Академию наук, где получает звание «высоких математических наук первого профессора». На первом собрании академической конференции (13 ноября 1725 г.) Герман прочитал доклад «О сфероидальной фигуре Земли». Свою речь на втором торжественном заседании Академии наук (1 августа 1726 г.) он посвятил происхождению и прогрессу геометрии. В первых шести томах академических «Комментариев» опубликованы статьи Германа по отдельным вопросам анализа, геометрии и механики, интегральному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, о кривых и поверхностях второго порядка, о сферических эпициклоидах, о колебаниях маятника и др. Герман первым в России занимался историей математики.

Рассмотрим более подробно математические работы Германа, написанные им в петербургский период деятельности и напечатанные в первых томах «Комментариев» Петербургской академии наук.

В трех статьях изложены вопросы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Первая из них — «Об интегральном исчислении» («Commentarii», I) — посвящена уравнениям первого порядка в полных дифференциалах. В ней определены простейшие понятия интегрального исчисления. В частности, интеграл $\int R^\lambda dK$ Герман определяет как бесконечную сумму элементов $R^\lambda dK$. Доказаны лемма, утверждающая справедливость соотношения $\int \frac{adx}{x} = \ln x^a$, а также три теоремы:

1) интегралом уравнения $du = R^\lambda dK$ является $u = MR^{\lambda+1}$, где M определяется из уравнения

$$dK = (\lambda + 1)MdR + RdM;$$

2) интегралом уравнения $du = R^\lambda S^\mu dK$ является $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}$, где M определяется из уравнения

$$dK = (\lambda + 1)MSdR + (\mu + 1)MRdS + RSdM;$$

3) интегралом уравнения $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$ является $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}T^{\nu+1}$, где M определяется по уравнению

$$dK = (\lambda + 1)MSTdR + (\mu + 1)MRTdS + (\nu + 1)MRSdT + RSTdM.$$

Полученные результаты иллюстрированы конкретными примерами дифференциальных уравнений:

$$du = ax^m dx; \quad du = mx^{m-1}y^{-n}dx - nx^n dy;$$

$$du = \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad du = x^{n-1}(a + bx^m)^p dx,$$

где m, n, p — рациональные числа,

$$du = \frac{3kdz - lz^2 dz}{z^3 \sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$$

и др.

Вторая статья — «О решении дифференциальных уравнений первого порядка» («Commentarii», II) — представляет особый интерес, так как в ней изложен метод интегрирования уравнений типа уравнения Лагранжа

$$y = P(z)x + Q(z),$$

где $z = \frac{dy}{dx}$. Основным результатом является теорема: если

$$\ln R = \int \frac{dP}{z - P} \quad \text{и} \quad S = \int \frac{dQ}{zR - PR},$$

то решение исходного уравнения записывается в виде

$$x = RS, \quad y = PRS + Q.$$

Это решение Герман получает дифференцированием исходного уравнения в параметрическом виде, как и по методу Лагранжа, причем параметром служит также $z = \frac{dy}{dx}$. Для иллюстрации своего метода он приводит несколько примеров, а также указывает возможность перенесения результата на уравнения вида

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

коэффициенты которых являются функциями от z и $dy = zdx$.

Третья статья («Commentarii», II) посвящена решению дифференциального уравнения первого порядка вида

$$adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy = 0,$$

где a, b, c, f, e, g — постоянные. Герман идет по пути поочередного упрощения этого уравнения с помощью замен: $x = p + b$; $y = q + i$; $q = kp + t$, где p, q, t — переменные, b, i, k — некоторые постоянные, и получает уравнение с разделенными переменными

$$(e - f + l) \frac{dp}{p} + (f - e + l) \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} = 0,$$

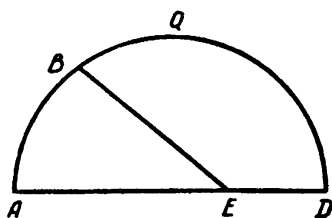
где

$$l = \sqrt{e^2 + 2ef + f^2 - 4cg}; \quad du = \frac{2gt}{pt}.$$

Интегрируя последнее уравнение и возвращаясь к первоначальным переменным x и y , он получает общий интеграл исходного уравнения.

Из других математических работ Германа представляет интерес статья «Два способа деления полуокружности в заданном отношении» («Commentarii», I), в которой решена задача о разделении полукруга AQD прямой BE на части так, что отношение площадей двух образующихся при этом фигур равно заданному числу (см. рисунок). Эта задача имеет важное значение для решения проблемы Кеплера о нахождении пространственных координат планет при заданной временной координате. Герман решает ее с помощью квадратрисы.

В статье «Об определенных геометрических местах точек...» («Commentarii», IV) изложен способ построения эллипса, гиперболы и



Чертеж к работе Германа.

параболы. Рассматривая уравнение конического сечения в виде, разрешенном относительно одной из координат, Герман строит сначала рациональную часть, а затем — иррациональную.

К геометрии относится еще одна работа Германа, напечатанная в пятом томе «Комментариев». В ней речь идет об эллипсе с заданной одной осью, вписанном в заданный угол так, что центр эллипса находится внутри угла в данной точке.

В работах по механике Герман сформулировал различные законы движения тел, вызванного действием переменных сил в среде или вакууме, дал новый вывод формулы для центра колебаний сложного маятника.

Герман принимал участие также в написании учебников по математике и естественным наукам, в частности трехтомного учебника «Сокращение математики...» (*«Abrégé des mathématiques...»*), который был издан в 1728 г. на французском языке. В этом же году вышел в свет русский перевод этого учебника под заглавием «Сокращение математическое. Часть I, содержащая Арифметику, Геометрию и Тригонометрию. Часть III, содержащая фортификацию». В первой части изложены четыре арифметических действия, дано понятие о дробях, пропорциях и т. п., приведены сведения о геометрии и тригонометрии. Вторая часть учебника посвящена астрономии и географии. Ее составителем является профессор астрономии Делиль. В третьей части речь идет об укреплении городов и военных объектов.

В Петербургской академии наук Герман пробыл недолго, немногим более пяти лет. Из-за интриг Шумахера он вынужден был покинуть Россию. 14 января 1731 г. Герман выехал на родину, в Базель. Однако он остался почетным членом Петербургской академии наук. В Базеле он занял кафедру нравственной философии. Умер Герман 11 июля 1733 г.

Христиан Гольдбах. Родился в Кенигсберге 8 марта 1690 г. В 1725 г. приехал в Россию и был назначен профессором математики в Петербургской академии наук. В течение 15 лет (1726—1740) исполнял обязанности конференц-секретаря Академии наук. В 1742 г. перешел на службу в Коллегию иностранных дел, переехал в Москву, где и умер 20 ноября 1764 г.

Математическое творчество Х. Гольдбаха составляют несколько работ, напечатанных в «Комментариях» Петербургской академии наук. Кроме того, известна переписка Гольдбаха с крупными учеными, в том числе с Л. Эйлером, в которой поднимались и решались различные математические проблемы.

Две работы Гольдбаха по интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка напечатаны в первом томе «Комментариев». В первой из них — «О некоторых случаях интегрируемости» — рассматриваются линейное уравнение и уравнение Риккати. В связи с тем, что уравнение Риккати не приводится к более простой

форме, выкладки и результаты Гольдбаха довольно громоздки. Рассматривая уравнение

$$ax^{\frac{4n \pm 2b \pm 4}{-2n \pm 1}} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy,$$

Гольдбах методом неполной математической индукции находит его полиномиальные решения:

$$\text{при } n = 1 \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{a}{b^2};$$

$$\text{при } n = 2 \quad y = -\frac{a}{b}x^2 - \frac{2ax}{b^2} - \frac{2a}{b^3};$$

$$\text{при } n = 3 \quad y = -\frac{a}{b}x^3 - \frac{3a}{b^2}x^2 - \frac{6a}{b^3}x - \frac{6a}{b^4};$$

.....

$$\text{в общем случае } y = -\frac{a}{b}x^n - \frac{an}{b^2}x^{n-1} - \frac{an(n-1)}{b^3}x^{n-2} - \dots$$

Во второй статье — «Метод интегрирования дифференциального уравнения» — Гольдбах интегрирует уравнение

$$adx + bdy + cxdx + exdy + fydx + quydy = 0,$$

приводя его к однородному с помощью линейной замены неизвестной функции.

Особый интерес представляет работа Гольдбаха «О преобразовании рядов», напечатанная во втором томе «Комментариев». Под преобразованием числового ряда (A) Гольдбах понимает нахождение такого ряда (B), что ряд $C = B - A$ имеет нулевую сумму, например:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots; \quad (A)$$

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{24} + \dots + \frac{3}{4n(n+1)} + \dots \quad (B)$$

В работе изложен способ преобразования данного числового ряда путем умножения его на ряд $1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots$, сумма которого равна единице. Приведены примеры. Пусть ряд (A), подлежащий преобразованию, имеет вид

$$1 - m + m^2 - m^3 + \dots$$

Положим

$$\alpha = \frac{m^2 + m - 1}{m + 2};$$

$$\beta = \frac{m^2 + m - 1}{(m + 2)^2} = \frac{\alpha}{m + 2};$$

$$\gamma = \frac{m^2 + m - 1}{(m + 2)^3} = \frac{\beta}{m + 2};$$

.....

Тогда ряд (A) преобразуется в ряд

$$\frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \frac{1}{(m+2)^3} + \dots$$

Если же

$$\alpha = \frac{m^2 - m + 1}{m}, \quad \beta = -\frac{\alpha}{m}, \quad \gamma = -\frac{\beta}{m}, \dots,$$

то ряд (A) преобразуется в ряд

$$1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \dots$$

Теория числовых рядов рассмотрена также в статье «Об общих членах рядов» («Commentarii», III). Эта статья посвящена рядам, общие члены которых заданы различными рекуррентными формулами.

Представляет также интерес геометрическая работа Гольдбаха «О разделении кривых на части, длины хорд которых заданы определенной прогрессией» («Commentarii», II). В ней решается такая проблема: разделить кривую AB на конечное число частей $BD, DE, EI, \dots$ так, чтобы отношения длин соответствующих хорд образовали заданную числовую последовательность $1, e, f, \dots$. При этом считаются заданными длины отрезков AC и BC : $AC = a$, $BC = b$ (см. рисунок). Метод решения проблемы состоит в следующем. Обозначив длину хорды $BD = x$, определяем DF через x , a и b . Если в последнюю формулу вместо a подставить длину отрезка AF , вместо b — найденную длину отрезка DF и вместо x взять ex , то получим выражение длины EG и т. д., пока не дойдем до нулевой ординаты. Приравняв нулю окончательное выражение для этой ординаты и решив соответствующее уравнение относительно x , находим длину первой хорды BD . Тогда $DE = ex$, $EI = = fx$ и т. д.

Гольдбах приводит два конкретных примера решения этой проблемы, когда кривая AB является дугой окружности или параболы. Для дуги окружности радиуса a , при $BC = m$, он получает выражения

$$DF = \frac{(2a^2 - x^2)m \pm x \sqrt{(a^2 - m^2)(4a^2 - x^2)}}{2a^2} = \alpha;$$

$$EG = \frac{(2a^2 - e^2x^2)\alpha \pm ex \sqrt{(a^2 - \alpha^2)(4a^2 - e^2x^2)}}{2a^2} = \beta;$$

$$IK = \frac{(2a^2 - f^2x^2)\beta \pm fx \sqrt{(a^2 - \beta^2)(4a^2 - f^2x^2)}}{2a^2} = \gamma.$$

.....

Если дуга окружности разделяется на две части, то x определяется из уравнения $\beta = 0$, если на три — из уравнения $\gamma = 0$ и т. д.

В истории математики имя Гольдбаха связано со знаменитой «проблемой Гольдбаха» из теории чисел. В одном из писем к Эйлеру в 1742 г. Гольдбах высказал предположение, что всякое целое число, большее единицы, есть сумма не более трех простых чисел. Эту задачу долго никто не мог решить и только в 1937 г. советскому математику академику И. М. Виноградову удалось с достаточной строгостью доказать, что

всякое достаточно большое нечетное число представляется суммой трех простых чисел.

Гольдбах занимался историей Петербургской академии наук (в 1734 г. он написал «Начертание правил для составления истории С.-Петербургской академии наук»), а также принимал участие в выработке проектов устава академии и ее гимназии в 1737 г.

Был членом комиссии по составлению проекта устава гимназии (1737 г.), а также комиссии по составлению устава академии 1747 г., ставшего для нее на многие годы руководящим регламентом.

Николай Бернулли — сын Иоганна Бернулли старшего, знаменитого соратника Лейбница. В трех последовательных поколениях этой семьи было восемь математиков. Пять из них были связаны с Петербургской академией наук: Иоганн старший (отец Николая и Даниила) был почетным членом академии, братья Даниил и Николай — действительными членами академии, один племянник Даниила — Иоганн (1744—1807) — почетным членом, а другой — Яков (1759—1789) — действительным членом академии. Николай Бернулли родился в Базеле 27 января 1695 г. С детства отличался выдающимися способностями, в восемь лет уже говорил по-голландски, по-немецки, по-французски и по-латыни. Окончил гимназию в Базеле, там же поступил в университет и в 1711 г., 16 лет от роду, получил степень магистра философии. Занявшись изучением правоведения, Н. Бернулли в 1715 г. защитил диссертацию на степень лиценциата. Под руководством отца он изучал также математику. В январе 1716 г. Н. Бернулли удалось решить предложенную Лейбницем задачу о прямоугольных траекториях, что принесло ему известность в математическом мире. В 1723 г. он был назначен профессором прав в Базеле, однако с радостью вместе с братом Даниилом принял приглашение Петербургской академии наук, где занял кафедру механики. В Петербург Николай и Даниил Бернулли прибыли 27 октября 1725 г. Однако через восемь месяцев Николай заболел и 29 июля 1726 г. умер.

К петербургскому периоду научной деятельности Николая Бернулли относятся две его статьи, напечатанные в первом томе «Комментариев». Статья «Анализ некоторых дифференциальных уравнений» посвящена интегрированию уравнений Риккати. Рассматривая дифференциальное уравнение

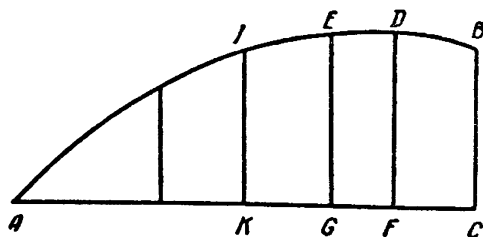
$$ax^my^n dx + bx^py^q dy = dy, \quad (1)$$

Н. Бернулли показывает, что заменой $x^{p+1} = \xi$, где ξ — новая переменная, его можно привести к виду

$$ax^my^n dx + by^q dx = dy, \quad (2)$$

а последнее заменой $y^{-n+1} = \eta$ — к виду

$$ax^m dx + by^n dx = dy. \quad (3)$$



Чертеж к работе Гольдбаха.

Объектом исследования Н. Бернулли является уравнение (3) при $n = 1$ и $n = 2$. Для интегрирования уравнения (3) при $n = 1$ он, по-видимому, впервые вводит подстановку $y = c^{bx}z$, где c — число, логарифм которого равен единице, а z — новая неизвестная функция. Частный интеграл уравнения (3) при $n = 2$ Н. Бернулли находит по методу неопределенных коэффициентов в виде суммы

$$y = \alpha x^n + \beta x^{n+1} + \dots + \delta x^{n+p}.$$

В частности, для уравнения $-ax^{-4} dx + by^2 dx = dy$

$$y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Во второй статье — «О движении тел, вызванном их соударением» — решается такая проблема: при заданных массах двух тел, движущихся навстречу друг другу, и заданных скоростях этих тел до удара найти их скорость после удара. Если обозначить: m, n — массы тел, p, q — скорости тел до удара, u, v — скорости их после удара, то исследование Н. Бернулли заключалось в выводе формул

$$x = \frac{2np + 2nq}{m + n} - p, \quad y = \sqrt{\frac{mp^2 + nq^2 - mx^2}{n}}.$$

Даниил Бернулли. Родился 29 января 1700 г. в Гронингене (Швейцария). В 1716 г. окончил Базельский университет и получил степень магистра философии. Математикой занимался под руководством отца и старшего брата Николая. Рано проявился его яркий научный талант. Лейбниц писал о нем отцу: «Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли и хранит наследственный блеск фамилии».

Первые научные шаги Даниила Бернулли относятся к медицине. Он изучал ее в Базеле, Гейдельберге и Страсбурге. В 1721 г. выдержал в Базеле медицинский экзамен и написал диссертацию «О дыхании» (*De respiratione*), в которой стремился разрешить физиологические вопросы математическим путем. Первым печатным трудом Д. Бернулли были «Математические упражнения» (*«Exercitationes quaedam mathematicae»*, Венеция, 1724 г.). Эту работу он написал в защиту отца и его брата Якова Бернулли от нападок некоторых итальянских ученых. Она содержит также некоторые его собственные исследования, в частности исследования, касающиеся уравнения Риккати и рекуррентных рядов.

Почти одновременно с выходом книги Д. Бернулли получил предложение занять пост президента академии в Генуе, которая только открывалась, и кафедру физиологии в Петербургской академии. Даниил Бернулли отклонил первое предложение и принял второе. Этому решению способствовало, несомненно, приглашение в Петербургскую академию также его брата Николая Бернулли на кафедру механики и математики. В Петербургской академии в течение первых пяти лет Д. Бернулли занимался физиологией, основывая ее изучение на математике. С 1 сентября 1730 г. он занял кафедру чистой математики.



Даниил Бернулли.

Даниил Бернулли и его отец (Иоганн) сыграли большую роль в приглашении в Петербургскую академию наук Леонарда Эйлера. В сентябре 1726 г. президент Петербургской академии Блюментрост писал Иоганну Бернулли: «Вы мне так прекрасно изобразили г-на Эйлера, что я надеюсь, что он окажет добрые услуги Академии».

Из-за начавшихся трений с бюрократическим правителем академической канцелярии Шумахером Даниил Бернулли в 1733 г. уехал из России в Базель. Однако он оставался почетным членом академии, и ему была назначена ежегодная пенсия в 200 руб. Кафедра Д. Бернулли после его отъезда перешла к Эйлеру.

В Базельском университете Д. Бернулли занял в конце 1733 г. кафедру анатомии и ботаники, а с 1750 г. возглавил кафедру опытной физики, которую занимал до последних лет своей жизни. В 1747 г. он был избран членом Берлинской академии наук, в 1748 г. — Парижской

академии и в 1750 г. — Лондонского королевского общества. Парижская академия наук десять раз присуждала ему премии, назначавшиеся за лучшие работы по математике и физике. В 40-х годах Д. Бернулли получил предложение переехать в Берлин в качестве академика Берлинской академии наук, а также вернуться в Петербургскую академию наук. Оба эти предложения были им отклонены. Однако с Петербургской академией наук он поддерживал тесную связь, интересовался ее делами, печатал свои работы, главным образом, в ее изданиях (из опубликованных им за 1721—1780 гг. 75 работ 50 было напечатано в изданиях Петербургской академии наук). Регулярные сведения о делах Петербургской академии он получал от Эйлера, с которым вел постоянную переписку до 1750 г. В 1735 г. Д. Бернулли писал: «...для меня истинное удовольствие всю жизнь состоять в русской императорской службе, все же прочее я считаю за ничто». В 70-х годах его петербургским корреспондентом был Николай Фусс. Умер Даниил Бернулли 17 марта 1782 г.

Все представители фамилии Бернулли, как и все крупные ученые того времени, занимались одновременно самыми разнообразными науками, в том числе и общими вопросами естествознания. Даниил Бернулли был естествоиспытателем в широком смысле этого слова. Математическим аппаратом он пользовался очень мало. Поражает его необыкновенная интуиция при рассмотрении различных задач механики и физики, та «первооснова», на которой он строил свои работы. Все свои теоретические работы он обычно сочетал с экспериментами.

Основными работами Д. Бернулли являются его «Гидродинамика» и труды о главных колебаниях некоторых механических систем и принципе суперпозиции таких колебаний. «Гидродинамику» он начал писать еще в 1728—1729 гг. в Петербурге (написал первый вариант и проверил выдвинутые им положения разнообразными опытами). Издана была книга в Страсбурге в 1738 г.

Наиболее интересны IX, X и XII части этой книги. В IX части впервые вводится понятие работы, которую Д. Бернулли называет «абсолютной мощностью» («абсолютной потенцией»), придавая этому понятию современный смысл. Он пользуется также понятием коэффициента полезного действия, не определяя, однако, его явно.

Следующая часть посвящена статике и динамике сжимаемой жидкости и, главным образом, воздуха. В этой части заложены основы кинетической теории газов, т. е. Д. Бернулли опередил современную ему науку более, чем на столетие. Немного позднее к таким же взглядам на теорию газов пришел М. В. Ломоносов, но, как и Даниил Бернулли, он не имел последователей.

В XII части Д. Бернулли выводит свой знаменитый закон (закон Бернулли). В настоящее время закон Бернулли изучается во всех курсах гидродинамики и гидравлики. Согласно этому закону, при установившемся движении жидкости давление ее обратно пропорционально квадрату скорости течения. Д. Бернулли вывел свой закон, исходя из энергетических соображений, а не интегрируя уравнения движения жидкости, так как эти уравнения не были еще известны.

Дифференциальные уравнения движения жидкости были получены несколько позднее Эйлером. Книга Д. Бернулли положила начало гидродинамике как науке.

Как уже упоминалось, первая математическая работа Д. Бернулли «Математические упражнения» (1724 г.) посвящена исследованию уравнения Риккати и рекуррентных рядов. Он рассматривает уравнение Риккати вида $y' = ax^n + by^2$, где a и b — постоянные, и доказывает, что оно может быть преобразовано в уравнение того же вида заменой n на $-\frac{n}{n+1}$ или $-(n+4)$. При $n=0$ возможно интегрирование данного урав-

нения в квадратурах, если $n = \frac{4m}{1-2m}$, где m — любое целое число. Более 100 лет спустя (1841 г.) Лиувилль доказал, что случаи, указанные Д. Бернулли, и случай $n = -2$ являются единственными, когда уравнение Риккати в форме, рассмотренной Д. Бернулли, интегрируется в конечном виде.

Д. Бернулли принадлежит метод приближенного решения алгебраических уравнений, основанный на применении рекуррентных рядов. Этот метод состоит в следующем. Пусть надо решить уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

и пусть взяты n произвольных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$. Если определить теперь $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$ по рекуррентному закону

$$p_{n+m} + a_1p_{n+m-1} + a_2p_{n+m-2} + \dots + a_np_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

то отношение $\frac{p_{m+1}}{p_m}$ с возрастанием m приближается к наибольшему по абсолютной величине корню уравнения. Этот метод дан Д. Бернулли без доказательств («Commentarii», III, 1732). Метод рекуррентных рядов он применил и к трансцендентным уравнениям вида $y = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ («Commentarii», V, 1738). Л. Эйлер тщательно разработал этот метод и дал его вывод. Методом Бернулли занимался также Лагранж.

В одном из своих исследований (1728 г.) Д. Бернулли заметил, что основание натуральных логарифмов есть, как он выражался, значение $\left(1 + \frac{1}{A}\right)^A$ при $A = \infty$, т. е. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. В письме Гольдбаху (1729 г.) он близко подходит к определению гамма-функции и указывает, что общий член ряда $1 + 2! + 3! + \dots$ имеет вид

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right),$$

где x — номер члена ряда, A — «бесконечное число».

Значительный вклад внес Д. Бернулли в теорию вероятностей, начала которой были сформулированы во второй половине XVII в. П. Ферма, Б. Паскалем, Х. Гюйгенсом и Я. Бернулли. Первой его

работой в этой области является статья «Попытка новой теории вычисления вероятностей случайных величин» («Commentarii», V, 1738). В ней вводится понятие морального ожидания. Это понятие Д. Бернулли противопоставляет понятию математического ожидания, которое ввел Гюйгенс. Новое понятие было применено к задаче, впервые поставленной в 1713 г. Н. Бернулли (1687—1759) и впоследствии получившей название «петербургской игры». Среднее моральное ожидание выигрыша определялось как математическое ожидание величины $b \log \frac{x + a}{a}$, где x — выигрыш (случайная величина), a — капитал выигрывающего. Игра состояла в следующем: если монета упадет вверх гербом впервые после 1, 2, 3, 4, ..., n бросания ее Петром, то Павел уплачивает Петру соответственно 1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1} руб. Спрашивается, какую сумму должен выплатить Петр Павлу перед началом игры за право участия в ней, чтобы игра была безобидной. Парадоксальность решения этой задачи вызвала многочисленные споры. Дело в том, что математическое ожидание Петра оказывается бесконечно большим и для безобидности игры он должен уплатить Павлу за право участия бесконечно большую сумму. Математическое ожидание выигрыша Петра можно выразить формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Введенное Д. Бернулли понятие морального ожидания в науке не удержалось, кстати, и «парадокса» петербургской игры оно не решало. «Парадокс» петербургской игры был разъяснен советским математиком А. Я. Хинчиным в работе «О петербургской игре» (в работе исследуется вопрос о некотором среднем выигрыше за большое число партий).

Д. Бернулли впервые применил в теории вероятностей исчисление бесконечно малых. Основной в этом отношении является его работа «Попытка применения алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей». Точное решение задач теории вероятностей приводило часто к сложным рассуждениям комбинаторного характера. Д. Бернулли предложил заменить их операциями дифференциального исчисления, считая единицу бесконечно малой по сравнению с большими числами, встречающимися в задаче. Применение этих операций значительно упрощало решение задачи и давало приближенные формулы ответа.

В нескольких работах Д. Бернулли применил теорию вероятностей к изучению вопросов о длительности человеческой жизни, о смертности от оспы и действии прививки, о средней продолжительности браков и взаимоотношении числа новорожденных мальчиков и девочек. Особенно оригинальна по замыслу работа, в которой Д. Бернулли рассмотрел вопрос о том, следует ли искать для объяснения различия в наклонениях планетных орбит к эклиптике какие-либо определенные причины.

Д. Бернулли занимался также теорией ошибок наблюдений. В работе «Наиболее вероятное значение среди нескольких расходящихся

между собой наблюдений и устанавливаемое отсюда наиболее близкое к истине заключение» Д. Бернулли рассматривает вопрос о форме кривой распределения и полагает, что такой кривой является полуокружность, радиус которой, т. е. возможный предел ошибок, следует устанавливать из опыта. Однако выбор полуокружности в качестве кривой распределения случайных ошибок не удержался в науке. Впоследствии К-Ф. Гаусс, исходя из более естественных посылок, предложил другую форму кривой распределения ошибок, но некоторые положения, установленные Д. Бернулли, были сохранены. Так, для кривой распределения Д. Бернулли выдвинул пять требований: симметричность, монотонное убывание ординат по обе стороны от оси симметрии; наличие касательной, параллельной оси, на которой откладываются возможные значения ошибок; равенство нулю ординат при достаточном удалении от центра; вертикальность касательной в точке пересечения кривой с осью абсцисс. Сохранил свое значение и предложенный Д. Бернулли прием определения центра, которому соответствует наибольшая плотность вероятности. К сожалению, этот прием не связывается в настоящее время с его именем. Сущность приема состоит в следующем: в правую часть уравнения полуокружности, т. е. кривой распределения $y = f(x)$, вместо x следует подставить разность между каким либо наблюдением из данной серии наблюдений и наименьшим значением из этой серии, а затем найти центр из условия максимума произведений полученных значений $f(x)$. Следовательно, Д. Бернулли первый выдвинул знаменитый ныне метод максимального подобия⁹. Крамер отмечает, что в частных случаях метод восходит к Гауссу, а в общем случае предложен Р. Фишером в 1912 г. Согласно этому методу, при повторной выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ с плотностью вероятностей $f(x, \alpha)$, зависящей от измеряемого параметра α , последний определяется из условия максимума произведения $f(x_1, \alpha) \cdot f(x_2, \alpha) \dots f(x_n, \alpha)$. Д. Бернулли первый применил этот метод для случая

$$f(x, \alpha) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}.$$

Интересовался Д. Бернулли и некоторыми вопросами элементарной геометрии. Еще в работе «Математические этюды» (1724 г.) он вывел условие, которому должны удовлетворять все алгебраические quadriруемые луночки, и добавил уравнение, дающее четвертую quadriруемую луночку.

Особое значение имели работы Д. Бернулли по математической физике. В этой области ему наряду с Даламбером и Эйлером принадлежат весьма важные результаты. Исследования по математической физике Д. Бернулли начал еще в Петербургской академии наук. Исследуя задачу об определении главных колебаний вертикальной невесомой нити, прикрепленной вверху, снабженной n грузами и свободно раскачивающейся на ветру, он дал сначала опытное решение для $n = 2$

⁹ Г. Крамер. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948, стр. 541.

и $n = 3$, а затем доказал его справедливость теоретически («Commentarii», VI, 1738; VII, 1740). Для определения главных колебаний Д. Бернулли составил уравнение, выражающее пропорциональность между силами, действующими на грузы и рассчитанными на единицу массы, и малыми отклонениями этих грузов от вертикальной прямой, которая является положением равновесия. Полученное уравнение

$$-\frac{dy}{dx} - \frac{xd^2y}{dx^2} = \frac{y}{n}$$

($\frac{1}{n}$ — длина соответствующего изохронного маятника) проинтегрировал и нашел решение

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4n^2} - \frac{x^3}{4 \cdot 9n^3} + \dots,$$

выражающееся посредством цилиндрической функции первого рода нулевого порядка $I_0(x)$: $y = I_0\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$. Для определения частот главных колебаний Д. Бернулли нашел корни уравнения $I_0(x) = 0$, применив свой новый способ численного решения уравнений при помощи рекуррентных рядов.

Работы Д. Бернулли о колебаниях стержней, которыми он занимался одновременно с Л. Эйлером, были напечатаны в 1751 г. Рассматривая гармонические колебания стержней, Д. Бернулли получил дифференциальное уравнение четвертого порядка в виде $y^{(IV)} = \frac{1}{f^4} y$, где f — некоторая постоянная, зависящая от упругости стержня. В работах исследуются задачи при различных предельных условиях на концах стержня, описываются опыты, результаты которых автор сопоставлял с формулами, полученными теоретическим путем. Опыты дали значение упругой постоянной, входящей в коэффициент f уравнения.

Д. Бернулли принадлежит ряд работ о колебаниях воздуха в цилиндрических трубах. Первоначальная теория малых колебаний воздуха в трубе была создана почти одновременно Д. Бернулли, Эйлером и Лагранжем. Этому вопросу Д. Бернулли посвятил большую работу «Физические, механические и аналитические исследования о звуках и тонах органных труб, различным образом построенных». В ней он рассматривает колебания воздуха в цилиндрических трубах и связанные с этими колебаниями сгущения и разрежения при различных условиях на концах: зависимость основного тона трубы от того, какой будет труба — закрытой с двух концов, полуоткрытой или открытой с обоих концов. Предположив, что упругость воздуха пропорциональна его плотности, Д. Бернулли получил дифференциальное уравнение основных синхронных колебаний воздуха в цилиндрической трубе:

$$-\frac{d^2\alpha}{dx^2} p = \frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha(x)$ — кривая амплитуд для отклонения поперечного слоя, имеющего абсциссу x в естественном состоянии, p — постоянная, зависящая от упругости воздуха в естественном состоянии, и r — постоянная (длина синхронного маятника). В этой работе он рассматривает трубы переменного сечения, в частности коническую трубу. К исследованию колебаний воздуха в составной трубе с двумя различными цилиндрическими частями примыкает более поздняя работа Д. Бернулли «О колебаниях струн, состоящих из двух частей, неравных между собой как по длине, так и по толщине».

Выдающуюся роль сыграл Д. Бернулли в известном «споре о звучащей струне». Он высказал положения, имевшие важное значение при разработке основных принципов математического анализа в XIX в. Задача о малых поперечных колебаниях бесконечно тонкой однородной струны, имеющей длину l и закрепленной двумя своими концами, была первой задачей математической физики. Впервые ее поставил в 1713 г. Б. Тейлор. В 1715 г. Даламбер привел задачу к дифференциальному уравнению с частными производными $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, называемому ныне волновым, где y — ордината струны; t — время; a — постоянная, связанная с плотностью струны и ее натяжением. Общий интеграл этого уравнения Даламбер выразил с помощью двух произвольных функций. Несколько позднее Д. Бернулли представил общее решение этого уравнения рядом

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi t}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{l} + \dots$$

Между Даламбером и Эйлером разгорелся спор о характере функций, дающих решение задачи о колебании струны; при этом Эйлер и Даламбер термин «функция» понимали по-разному: для Даламбера это было произвольное аналитическое выражение, для Эйлера — произвольно начерченная кривая. В спор между Эйлером и Даламбером включился Д. Бернулли. Анализируя эту задачу, Д. Бернулли опирался на соображения физического характера. Исходя из того, что звук, издаваемый струной, состоит из главного тона и бесчисленного ряда последовательных более слабых обертонов, он представлял себе, что во всякий момент времени форма струны может быть составлена из соответствующих всем этим тонам синусоидальных кривых. В основе решения Бернулли лежало утверждение о возможности разложения любой функции в тригонометрический ряд, но обосновать это математически он не мог. Эйлер подверг взгляды Д. Бернулли критике.

Не вдаваясь в подробности спора о природе функции между Эйлером, Даламбером и Д. Бернулли и не касаясь огромного комплекса математических идей, поднятых этим спором, а также вопроса о расширении средств аналитического представления функций, отметим, что в задаче о колебаниях струны речь шла о представлении функции тригонометрическим рядом на отрезке произвольной, но конечной длины, поэтому в своем утверждении Д. Бернулли был полностью прав. Ясность в спор позднее внесли Фурье, Дирихле и Лобачевский.

Важное значение в математической физике имели идеи Бернулли о представлении общего решения линейных уравнений с частными производными в форме бесконечного ряда, составленного из частных решений.

Георг-Бернгард Бюльфингер. Родился в Канштадте 23 января 1693 г. С 1721 г. был профессором философии в Тюбингенском университете. В 1724 г., по рекомендации Вольфа, Бюльфингер получил приглашение в Петербургскую академию наук на кафедру логики, метафизики и морали и в следующем году приехал в Петербург. В 1726 г. он перешел на кафедру экспериментальной и теоретической физики. Однако проработал Бюльфингер в России недолго: из-за бюрократического режима, установленного в академии Шумахером, и систематической травли неугодных Шумахеру лиц он ушел в 1730 г. из академии. В начале 1731 г. Бюльфингер вернулся в Тюбинген и занял кафедру богословия. Однако до конца своей жизни он оставался почетным членом Петербургской академии наук и поддерживал с ней тесную связь. Умер Бюльфингер 18 февраля 1750 г. в Штутгарте.

В Петербургской академии Бюльфингер занимался преимущественно физикой, механикой, математикой, а также ботаникой. Как философ он был учеником Х. Вольфа и сторонником лейбницево-вольфианской метафизики, как физик — первым представителем в академии картезианской механики и противником ньютонова учения о пространстве и действии сил тяготения. Уже его первое выступление по докладу Я. Германа о фигуре Земли носило явно выраженный антиньютоновский характер. Бюльфингер предложил свою теорию тяготения, встретившую резкую критику со стороны ньютонианцев и явное сочувствие со стороны картезианцев.

Бюльфингер был опытным физиком-экспериментатором. Пользуясь приборами физического отдела Кунсткамеры, он провел ряд интересных экспериментальных исследований по теплоте, усовершенствованию барометров, термометров и воздушных насосов, а также по установлению количественных законов подъема жидкостей в капиллярных трубках. Академия придавала большое значение этим исследованиям Бюльфингера. Фактически он был первым директором физического кабинета при Кунсткамере.

Под руководством Бюльфингера в академии проводились систематические инструментальные метеорологические наблюдения. Бюльфингер выступал с публичными лекциями по экспериментальной физике, преподавал физику в академической гимназии.

В «Комментариях» он поместил 13 статей (большой частью по физике, механике и ботанике на латинском языке). Две из них — «О причине тяжести от движения вихрей» и «Об исправлении барометров» — напечатаны также на русском языке в «Кратком описании Комментариев Академии наук» (1728).

Фридрих-Христофор Майер. Родился в Кирхгейме 9 октября 1697 г. Приехал в Россию вместе со своим учителем Бюльфингером осенью 1725 г. и был зачислен адъюнктом академии. 29 января 1726 г. назначен экстраординарным профессором математики. Умер 24 ноября 1729 г. в Петербурге.

Майер занимался математикой и астрономией. В I—V томах «Комментариев» напечатано 14 его статей. Наиболее ценными из них являются работы по тригонометрии: он улучшил символику тригонометрии, а также ввел в эту науку аналитические методы. Современное аналитическое изложение тригонометрии было создано несколько позднее Л. Эйлером.

В одной из статей, посвященных тригонометрии («Commentarii» II), Майер описывает получение ряда формул для тригонометрических функций суммы, полусуммы, разности и полуразности двух углов, а также рассматривает некоторые задачи решения прямолинейных и криволинейных треугольников.

Статья «О зательливой арифметике и ее приложениях» («Commentarii», III) состоит из трех частей. В первой части Майер разъясняет природу «коллективных» рядов. (Возьмем бесконечный числовой ряд Σa_n , состоящий из одинаковых положительных членов: $a_n = a$ ($n = 1, 2, \dots$). образуем ряд Σb_n , так что $b_1 = b$, где b — заданное число, $b_n = b_{n-1} + a_n$ ($n = 2, 3, \dots$), и назовем его первым коллективным рядом. Построим ряд Σc_n , где $c_1 = c$ (c — заданное число), $c_n = c_{n-1} + b_n$ ($n = 2, 3, \dots$), и назовем его вторым коллективным рядом. Затем построим третий коллективный ряд Σd_n и т. д. Он рассматривает коллективные ряды при различных $a, b, c, \dots$ и выводит формулы для вычисления их общих членов:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a; \\ b_{n+1} &= an + b; \\ c_{n+1} &= an \frac{n+1}{2} + bn + c; \\ d_{n+1} &= an \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} + bn \frac{n+1}{2} + cn + d; \\ &\dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a; \\ b_{n+1} &= an + b; \\ c_{n+1} &= \frac{a}{2} n^2 + \frac{a+2b}{2} n + c; \\ d_{n+1} &= \frac{a}{6} n^3 + \frac{a+b}{2} n^2 + \frac{2a+3b+6c}{6} n + d; \\ &\dots \end{aligned}$$

Вторая часть статьи посвящена суммированию коллективных числовых рядов, а третья — применению этих рядов к решению алгебраических уравнений и выводам формул для выражений вида $(a + b)^n$ при целом положительном n .

В работе «Некоторые положения измерения в круге (Commentarii», III) вычисляется длина хорды AC круга при заданных радиусе BD и длинах хорд AB и BC (см. рисунок). Положив $DE = BD = r$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = x$, Майер находит

$$x = \frac{a \sqrt{4r^2 - b^2} + b \sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}.$$

Положив затем $a = b$, он получает следующие выражения для длин хорд двойной, тройной и т. д. дуг, если дугу AC считать первоначальной:

$$a, a = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{r}, 3a \frac{a^3}{r^3}, \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \sqrt{4r^2 - a^2}, \dots$$

Вычисление коэффициентов этих выражений Майер связывает с нахождением общих членов некоторых коллективных рядов.

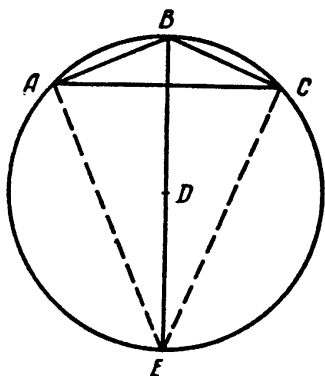
Две работы Майера («Commentarii», IV, V) посвящены сферической тригонометрии. В них рассмотрены различные задачи, являющиеся частными случаями общей проблемы нахождения для данной пары сферических треугольников шести элементов при известных четырех.

Успешно работал Майер и в области астрономии. Он исследовал вопросы о применении интерполяции для определения моментов солнцестояния, положениях планет, равноденствиях и т. д., составил первый (изданный академией) календарь на 1728 г.

Георг-Вольфганг Крафт. Родился в Титлингене 15 июля 1701 г. Получил образование в Тюбингенском университете, там же ему была присуждена степень магистра. В Петербургской академии наук работал с конца 1725 г. 1 января 1731 г. он был назначен профессором математики, а в 1733 г., после Эйлера, занял кафедру теоретической и экспериментальной физики. В 1730—1733 гг. был конференц-секретарем академии. В академии Крафт работал до 29 мая 1744 г. Затем вернулся на родину, в Тюбинген, оставаясь почетным членом Петербургской академии наук. В Тюбингене был избран профессором университета. Умер 16 июля 1754 г.

Научные интересы Г.-В. Крафта, в основном, относились к физике. Большой его заслугой была организация физического кабинета академии. Еще в 1727 г. он начал приводить в порядок физические приборы Кунсткамеры, а к 1740 г. при помощи В. Е. Адодурова и Г. Рихмана ему удалось пополнить физический кабинет большим количеством приборов, машин и инструментов и оборудовать для демонстрации опытов физическую аудиторию. Благодаря усилиям Крафта физический кабинет академии стал одним из лучших в Европе. В нем проводили опыты Л. Эйлер, Д. Бернулли, М. В. Ломоносов.

Исследования Крафта относились к механике, гидродинамике, оптике, акустике, магнетизму, метеорологии, термометрии, капилляр-



Чертеж к статье Майера.



Г.-В. Крафт.

ности и теплоте. Он провел опыты по определению силы притяжения магнитов, силы вытекающей водяной струи, показателя преломления льда, его плотности и других свойств. Крафт работал также над усовершенствованием различных физических приборов, в частности термометров и барометров.

Некоторое время Крафт занимался астрономией под руководством Делиля, помогая ему производить наблюдения. Одновременно с трудами по различным вопросам физики он опубликовал в «Комментариях» ряд астрономических работ и в течение нескольких лет составлял календари. Большую роль сыграл Крафт в популяризации астрономических знаний, в частности гелиоцентрического учения. В «Примечаниях к Санкт-Петербургским ведомостям» было опубликовано много его популярных статей по астрономии.

Значительной была и педагогическая деятельность Крафта. Он читал публичные лекции в университете, преподавал в гимназии.

написал несколько учебников для гимназии — «Введение в математическую и естественную географию, а также об употреблении глобусов и карт» (1739 г.), «Краткое введение в изучение простых машин» (1738 г.), «Краткое введение в геометрию» (1740 г.). Эти учебники сначала были изданы на немецком языке. На русский язык учебник механики перевел В. Е. Адодуров, учебник геометрии — И. И. Голубцов при участии М. В. Ломоносова. Переведенные на русский язык учебники Крафта служили руководствами по математике, физике и механике до начала XIX в.

Жозеф-Никола (Осип Николаевич) Делиль. Родился в Париже 4 апреля 1688 г. С 1706 г. занимался исключительно астрономией. В 1708 г. посещал обсерваторию знаменитого астронома Кассини. В 1714 г. был зачислен адъюнктом Парижской академии. В 1720 г., еще за несколько лет до основания Петербургской академии наук, Петр I поручил Шумахеру пригласить в академию Делиля, который в то время был профессором астрономии в Королевском колледже, членом Парижской и Прусской академий наук и Лондонского королевского общества. 8 июля 1725 г. Делиль был зачислен профессором Петербургской академии и в марте 1726 г. приехал в Петербург.

В Петербурге Делиль проводил систематические астрономические наблюдения, хотя имел в своем распоряжении весьма незначительное количество приборов. Ему принадлежит большая роль в организации Обсерватории Петербургской академии наук.

Значительны и чисто научные достижения Делиля. Он разработал новый метод определения широты места и проверил его при определении широты Петербурга. Большое научное и практическое значение имели его систематические наблюдения над затмениями спутников Юпитера. Таблицы этих затмений являлись в те времена одним из основных средств определения географической долготы места.

Делиль известен также как популяризатор гелиоцентрического учения. Большое внимание уделял он вопросу подготовки русских астрономов и геодезистов. В связи с тем, что в те годы в академии не было русских студентов, к Делилю для обучения сначала были прикомандированы молодые иностранные ученые — Ф. Майер, Г. Крафт, Х. Винсгейм, а позже — русские студенты Морской академии, в частности А. Д. Красильников, ставший впоследствии одним из крупных русских астрономов.

В 1739—1740 гг. Делиль заведовал географическим департаментом при академии. Он разработал картографическую проекцию для составления карт географического атласа России (издан в 1745 г.), а также написал вторую часть «Сокращений математических» (1728 г.), посвященную астрономии и географии.

В январе 1747 г. Делиль возвратился в Париж, где получил место в королевской коллегии. В 1754 г. он был назначен географом-астрономом французского флота. Скончался Делиль 12 сентября 1768 г.



Первая четверть XVIII в. — время больших преобразований в России — для истории отечественной математики и математических знаний является периодом качественного и количественного роста, начавшимся введением преподавания математики в школе и закончившимся основанием Петербургской академии наук и оформлением математики как науки.

В первые годы XVIII в. было издано несколько учебников математического содержания, в том числе «Арифметика» Магницкого, «Геометрия, словенски землемерие», переведенная Я. В. Брюсом, «Сокращения математические», составленные Я. Германом и Ж. Делилем, «Краткое руководство к теоретической геометрии» Г. Крафта.

Своеобразными путями распространялись математические знания на Украине и в Белоруссии. Киевская коллегия, получившая статут академии, являлась в течение этого времени единственным высшим учебным заведением как для восточной Украины, так и для западных ее областей, остававшихся в составе Польского государства. Преподававшийся в ней курс математики состоял из арифметики и элементов геометрии. В виде отдельного предмета геометрию ввел в план академического преподавания выдающийся деятель русского просвещения XVIII в. Феофан Прокопович. Прочитанный им в академии курс геометрии был первым в России и на Украине математическим курсом, имевшим теоретическое направление.

В 1724 г. была открыта Петербургская академия наук с университетом и гимназией. Значение Петербургской академии для развития науки, в частности математики, в России трудно переоценить. Благодаря творческим усилиям ученых академии были заложены основы русской математики как науки, сразу вышедшей на европейскую арену. Дело, начатое ими, продолжил и развил Л. Эйлер.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ В СЕРЕДИНЕ XVIII В. ТРУДЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России во второй четверти XVIII в.

Во второй четверти XVIII в. в России темпы развития торговли, промышленности, науки и культуры были гораздо меньшими, чем в первой четверти. Сказывалась продолжительная Северная война, а также частые дворцовые перевороты, приводившие к власти лиц, которым чужды были национальные интересы страны.

В хозяйстве России постепенно развивались новые явления. Укреплялся и расширялся всероссийский рынок. Углублялась хозяйственная специализация отдельных районов страны (определились хлебные, скотоводческие районы и районы технических культур). В центральных районах страны укрепилась трехпольная система. Развивались крестьянские промыслы, особенно в оброчных районах. И все же основным путем дальнейшего развития сельского хозяйства было освоение новых земель.

В середине XVIII в. помещики с целью повышения своих доходов начали заниматься предпринимательством — открывали промышленные предприятия по переработке сельскохозяйственного сырья. Однако основная масса дворян вела хозяйство по старинке, повышая доходы от своих имений, главным образом, путем жестокой эксплуатации крестьян.

В промышленность все более и более вовлекался купеческий капитал. На основе дальнейшего развития товарного производства происходил рост капиталистической мануфактуры. К 40-м годам в России были уже довольно крупные текстильные и другие предприятия купцов и кулаков-капиталистов, где преобладал наемный труд.

Промышленность развивалась быстрее, чем сельское хозяйство. Продолжалось интенсивное строительство металлургических заводов, в котором большую роль играл частный капитал. Расширялась территория освоения горнорудных богатств на Урале. В отличие от Северного Урала, где в 30-х годах казна построила крупные доменные заводы, Южный Урал развивался как район преимущественно медеплавильный и исключительно частновладельческий. Новые заводы, правда, более мелкие, строились и в центральном металлургическом районе. Начинали осваивать Алтай. К 1750 г. в России насчитывалось около 100 ме-

таллургических заводов (в 1730 г. — 51). Выплавка чугуна в 1725 г. составляла около 800 тыс. пудов, а в 1750 г. — 1 млн. пудов. Выплавка меди за этот же период увеличилась втрое.

Вопрос обеспечения промышленных предприятий рабочей силой был, как и прежде, острым. Поддерживая предпринимателей, правительство разрешило им в 1744 г. покупать крестьян для заводов и фабрик целыми деревнями. На мануфактурных предприятиях того времени как казенных, так и частных машины применялись только на трудоемких и тяжелых операциях, причем механизмы все еще оставались редкостным изобретением немногих высокоталантливых инженеров и умельцев. Для промышленного переворота, который уже начинался в Англии, в России не было еще экономических условий.

Культура России во второй четверти XVIII в. развивалась по пути, наметившемуся в первой четверти века. Из школ, основанных в начале XVIII в., дальнейшее развитие получили только профессиональные школы, готовившие прежде всего военных специалистов. В 1731 г. был открыт Сухопутный шляхетский корпус. Морская академия была преобразована в Морской шляхетский кадетский корпус, Артиллерийская и Инженерная школы — объединены в Артиллерийский и инженерный шляхетский корпус. Из начальных школ сохранились лишь гарнизонные для солдатских детей, школы при горных заводах, при московском госпитале и кое-где цифирные. В 40-х годах, благодаря усилиям М. В. Ломоносова и других русских ученых, оживилась учебная жизнь в гимназии и университете Петербургской академии наук.

Центром научной жизни страны с конца 20-х годов стала Петербургская академия наук, завоевавшая уже в эти годы всемирное признание. В 40-х годах в академии выделился ряд русских ученых, среди которых особенно отличался своей научной энциклопедичностью и многогранностью М. В. Ломоносов. Большую роль в подготовке русских ученых играл университет при академии, совершенно своеобразное учебное заведение, подобных которому не было в Западной Европе. Университету были обязаны своей подготовкой первые русские ученые.

Первым организационным принципом Петербургской академии наук, стимулировавшим развитие русской науки, была обязательная связь научных исследований с практическими потребностями страны. В начале 30-х годов была организована Вторая камчатская экспедиция, обследовавшая северные берега Восточной Сибири и положившая начало освоению Северного морского пути. Русские ученые — М. В. Ломоносов, С. П. Крашенинников (автор книги «Описание земли Камчатки», положившей начало русской этнографии), участники географических экспедиций — В. Беринг, А. Чириков, С. Челюскин, братья Лоптевы и другие своими исследованиями внесли крупный вклад в мировую науку.

В русской литературе второй четверти XVIII в. особенно примечательно поэтическое творчество поэта-сатирика А. Кантемира и М. В. Ломоносова, положившего в ней начало периоду классицизма. Наиболее яркое выражение классицизм получил в трагедиях Сумарокова

Литература, в лице своих лучших представителей, еще не поднялась до критики самодержавия и крепостничества как системы, однако во многих художественных произведениях разоблачались пороки, невежество и паразитизм дворян, жестокость бар и т. п.

В 40-х годах начала утрачивать свои сравнительно простые формы архитектура. Особенно выделился архитектор В. В. Растрелли, излюбленным приемом которого было сочетание монументальности с пышностью и великолепием декоративных деталей. Архитектурные памятники середины XVIII в. (Петергофский дворец, Екатерининский дворец в Царском Селе, церковь Андрея Первозванного в Киеве, ансамбль Смольного монастыря в Петербурге и др.) являются крупным вкладом в развитие мировой архитектуры.

2

Новые задачи математики, обусловленные развитием техники и естествознания

Мануфактурный период капитализма сопровождался созданием технической основы машинного производства. К. Маркс писал: «...Мануфактурный период развивал первые научные и технические элементы крупной промышленности»¹. Дальнейший технический прогресс в XVIII в. был невозможен без развития всего естествознания, а значит, и без развития математических методов. О содержании новых задач и новых трудностей, возникших перед математикой на рубеже XVII—XVIII вв. и в первой половине XVIII в., можно судить по состоянию важнейших отраслей естествознания этого периода.

Основы общей механики были заложены Ньютоном в его знаменитых «Началах натуральной философии». Однако основные достижения Ньютона относятся лишь к механике точки. В механике твердого тела он рассмотрел лишь вращение около неподвижной оси. При исследовании движения тела в неподвижных средах Ньютон ограничился рассмотрением только простейших частных случаев.

Несмотря на то, что в исследованиях Лейбница и Ньютона был завершен первый период развития исчисления бесконечно малых, это исчисление еще только завоевывало признание. Новые алгоритмы позволили получить с поразительной легкостью результаты, недоступные прежним методам, однако споры по вопросам обоснования исчисления бесконечно малых заставили, в частности весьма осторожного в своих публикациях Ньютона, отказаться от применения нового исчисления в ряде публикаций по механике. В работах Ньютона по механике нет «ньютоновских дифференциальных уравнений динамики», хотя в его математических работах и приведен целый ряд результатов исследования

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 23, стр. 388.

методов интегрирования дифференциальных уравнений. Поэтому не удивительно, что в общей механике не было аналитических методов. Создание их являлось одной из важнейших задач математики и механики XVIII в. Основная роль в решении этой задачи принадлежит Леонарду Эйлеру.

В связи с разработкой аналитической механики перед математиками возникли новые задачи в области математического анализа. Создания аналитических методов настоятельно требовали новые задачи самой механики — исследование движения материальной точки в среде с заданной инертностью (движение физического маятника, баллистика), переход в этой задаче от точки к твердому телу и т. п. Особенно необходимым было развитие теории малых колебаний материальной точки, а позднее — системы конечного числа материальных точек при определенных предположениях о сопротивлении среды. Необходимость разработки теории физического маятника выдвигалась развитием гравиметрии и теории фигуры Земли, которое, в свою очередь, стимулировалось, в частности, вопросами изучения движения планет, нуждами мореплавания и высшей геодезии.

Подавляющее большинство работ в области теоретической астрономии, названной П. Лапласом небесной механикой, было связано с изучением следствий закона всемирного тяготения. Возникшие проблемы имели не только теоретическое, но и практическое значение. В частности, теория движения Луны была весьма важной для мореплавания.

И. Кеплер и И. Ньютон установили законы невозмущенного движения планет. К концу второй четверти XVIII в. свойства невозмущенных движений были изучены с достаточной для практики полнотой синтетико-геометрическими методами. Но эти методы заведомо были недостаточны для изучения более сложных законов возмущенного движения. Изучение этих законов было вообще невозможно без общих аналитических методов в динамике. Поэтому встал вопрос о решении некоторых вполне определенных частных задач.

К середине XVIII ст. астрономическими наблюдениями с достаточной определенностью было установлено, что планеты Юпитер и Сатурн не следуют в своем движении законам, установленным Кеплером. Особенно большие отклонения (неравенства) наблюдались в движении Сатурна, когда расстояние между этими двумя планетами становилось кратчайшим. Основная задача состояла в том, чтобы объяснить наблюдаемые отклонения законом всемирного тяготения, учитывая взаимное притяжение этих двух планет.

Одной из самых важных проблем изучения возмущенного движения была проблема изучения движения Луны. В начале 40-х годов XVIII в. было признано, что, несмотря на открытия Ньютона, теория Луны находится в неудовлетворительном состоянии. Знание точного положения Луны в известные моменты времени позволило бы достичь большей точности в определении долгот на море. Поэтому не удивительно, что в 1750 г. была объявлена конкурсная тема: «Показать, согласны ли все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с ньютоновской теорией и какой должна быть истинная теория всех этих неравенств, чтобы по

ней можно было со всей точностью вычислять место Луны для любого момента времени». Неудачные первые попытки А. Клеро и Ж. Даламбера исследовать законы движения лунного перигея привели даже к стремлению ввести в закон тяготения Ньютона эмпирические поправки. Однако в 1749 г. Клеро сообщил Парижской академии, что несоответствие первых результатов исследования движения лунного перигея объясняется недостаточностью первого приближения при решении соответствующего дифференциального уравнения. Уже второе приближение этого решения позволило Клеро достаточно удовлетворительно согласовать теоретические результаты с эмпирическими данными.

Еще Галлей установил (1693 г.) наличие векового ускорения движения Луны. Однако существование такого ускорения означало постепенное приближение Луны к Земле и ставило под угрозу устойчивость нашей планетной системы. Ньютон считал, что сохранение существующего состояния Солнечной системы без вмешательства сверхъестественных сил невозможно и что взаимное притяжение элементов системы должно привести ее в беспорядок. Эйлер также пришел к неправильному заключению. Он считал, что наблюдаемое ускорение в движении Луны объясняется «следствием сопротивления той среды, в которой происходит движение небесных тел». Лишь в 1787 г. Лаплас показал, что вековое ускорение в движении Луны является следствием уменьшения эксцентриситета земной орбиты, а несколько раньше Лагранж установил, что это изменение эксцентриситета носит не вековой, а долгопериодический характер.

Изучение невозмущенных движений привело к классической задаче трех тел. Принципиальные трудности, возникающие при решении системы дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие трех тел, настолько велики, что в самом общем виде задачу нельзя считать решенной и в наши дни.

В первой половине XVIII в. возникла проблема о взаимосвязи между движением и формой небесных тел. Исследование этой проблемы, первые результаты в решении которой принадлежат Ньютону, явилось началом создания теории потенциала. В достаточно общей форме проблему сформулировал Эйлер: «Фигура тела и распределение вещества в нем какие угодно, все частицы этого тела притягиваются некоторой точкой силами, изменяющимися с расстоянием по произвольному закону. Найти результирующую силу, действующую на это тело»².

В решении проблемы о вращении Земли начальные результаты принадлежат Даламберу и Эйлеру. Эйлер дал новую форму уравнений вращательного движения твердого тела, употребляемую и в наше время. Динамические уравнения Эйлера, определяющие движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляют собой нелинейную систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно эйлеровых углов ψ , Θ , φ , как функций времени.

² L. Euler. Recherches des forces dont les corps celestes sont sollicités en tant qu'ils ne sont pas spheriques. — Mém. de l'Acad. d. sci. et bell.-lett. de Berlin. T. 23, 1767, p. 415.

К середине XVIII в. относится зарождение новой области анализа — дифференциальных уравнений в частных производных. Расширение исследований в области математического анализа стимулировалось, главным образом, развитием физики твердой среды и гидродинамики. Принципиальную недостаточность теории обыкновенных дифференциальных уравнений впервые обнаружили Даламбер и Эйлер при изучении малых колебаний струны, закрепленной на концах. Уже в первых исследованиях, связанных с уравнениями нового вида, выяснилось, что при решении таких уравнений возможна значительно большая произвольность, чем при решении любых обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому возник вопрос об удовлетворении решений более сложным дополнительным условиям. Дальнейшие исследования колебаний неоднородных струн, мембран, упругих стержней как Эйлером, так и его современниками требовали нахождения специальных методов для решения простейших смешанных задач для уравнений гиперболического типа второго и даже четвертого порядка.

Проблема звучащей струны имела, как известно, весьма существенное значение для развития всего математического анализа не только в XVIII, но и в XIX в. В длительном споре о характере допустимых «произвольных» функций, входящих в решение уравнения колебания струны, приняли участие почти все самые выдающиеся ученые эпохи: Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли, Лагранж. В этом споре получило существенное развитие одно из самых основных понятий анализа — понятие функции. Наряду с проблемой колебаний струн и мембран стимулирующее влияние на развитие учения об уравнениях в частных производных оказали задачи гидродинамики. В отличие от гидростатики, история которой ведет свое начало от работ Архимеда, гидродинамика как наука сложилась только в середине XVIII в. Необходимость изучения законов движения жидкости диктовалась настоятельными потребностями практики расчетов мощных водяных двигателей, гидротехнических сооружений и возросшими потребностями кораблестроения. Стимулом значительного прогресса гидродинамики, достигнутого в 50-х годах XVIII в., было также развитие аналитических методов динамики материальной точки и системы точек.

Для решения основной задачи о взаимодействии среды с движущимися в ней телами необходимо было сформулировать основные законы движения жидкости. Ученые XVIII в. в этом отношении не имели фактически никакого наследия. Первые попытки Галилея проанализировать сопротивление воздуха с количественной стороны и результаты Ньютона по изучению сопротивления, оказываемого жидкостью движущемуся в ней твердому телу, были совершенно недостаточны. Необходимо было создать аналитические методы теоретической гидродинамики. Решением этой задачи математическое естествознание обязано Д. Бернулли, Даламберу, Эйлеру и Лагранжу. Первый выдающийся результат в этой области принадлежит Д. Бернулли, опубликовавшему в 1738 г. свою знаменитую «Гидродинамику»³. Вслед за

³ Д. Бернулли. Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. Пер. с лат. Изд-во АН СССР, М., 1959.

«Гидродинамикой» Д. Бернулли появился известный трактат Даламбера «О равновесии и движении жидкостей»⁴. Даламбер пришел, в частности, к парадоксальному заключению об отсутствии сопротивления при движении тела в жидкости, явившемуся следствием того, что он не учел значения всего обтекания тела при движении. В обсуждении этого явления вскоре принял участие Эйлер. Дальнейшее изучение «парадокса Даламбера — Эйлера» способствовало привлечению внимания исследователей к важнейшей проблеме гидродинамики — проблеме обтекания тел, движущихся в жидкости.

Основополагающим исследованием, от которого, собственно, и ведет свое начало теоретическая гидродинамика, является сочинение Эйлера «Общие принципы движения жидкостей»⁵. В нем Эйлер впервые вывел основные уравнения гидродинамики для жидкости, лишенной вязкости. В качестве исходной задачи он взял определение в любой момент времени t скорости движения и давления в произвольной точке (x, y, z) пространства, заполненного жидкостью. Этот вывод достаточно хорошо известен. Напомним лишь окончательный вид полученной системы уравнений, пользуясь современными обозначениями. Если обозначить компоненты искомого вектора (скорости) — u, v, w ; проекции внешних сил, отнесенные к единице массы жидкости, — X, Y, Z ; давления в точке (x, y, z) — p и плотность в этой точке, являющуюся функцией p , — ρ , то вместе с уравнением неразрывности, выведенным здесь же Эйлером, эта система записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Нелинейная система основных уравнений гидродинамики не только не принадлежит ни к одному из трех основных типов, изучаемых современной теорией, но и не является системой Ковалевской. Даже в современной теории интегрирование общих уравнений гидродинамики превышает силы анализа.

Итак, исследования колебаний струн, мембран, стержней и важнейшие задачи гидродинамики уже в 50-х годах XVIII в. послужили источником возникновения теории уравнений в частных производных. В области обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлер и его

⁴ J. P. D'Alembert. Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides. Paris, 1744.

⁵ L. Euler. Principes généraux du mouvement des fluides.— Mém. de l'Acad. d. sci. et bell.-letr. de Berlin. T. 11, 1755 (1757).

современники могли использовать результаты, полученные их предшественниками, в новой же области надо было начинать с самого начала. Эйлер был прав, говоря, что в этой новой области анализа нет не только каких-либо приемов решения, но и необходимых обозначений.

В постановке аналитических задач теории уравнений в частных производных решающая роль принадлежала, разумеется, самой физике. Сведение указанных физических задач к чистому анализу сразу же потребовало разыскания первых подступов к этой новой ветви математики. Совершенно ясно, что отправным пунктом здесь могла служить лишь теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, в первых работах о струне Эйлер использовал метод интегрирующего множителя и теорию уравнений в полных дифференциалах, а в более поздних широко применял метод степенных рядов.

Гораздо сложнее оказалась проблема создания новых методов, отвечающих самой природе уравнений нового вида. Ее решение является одним из важнейших вопросов современной математики. На долю исследователей XVIII в. выпало создание основ метода характеристик и метода тригонометрических рядов. Первое выполнил Эйлер, второе начал в своих исследованиях Д. Бернулли. Оба эти метода получили дальнейшее развитие в XIX в. и являются одними из самых сильных в современной теории уравнений в частных производных. Лагранж заложил основы теории сопряженных уравнений, что явилось позже исходным пунктом в разработке известного «метода Римана», в котором существенное значение имеет применение характеристических координат.

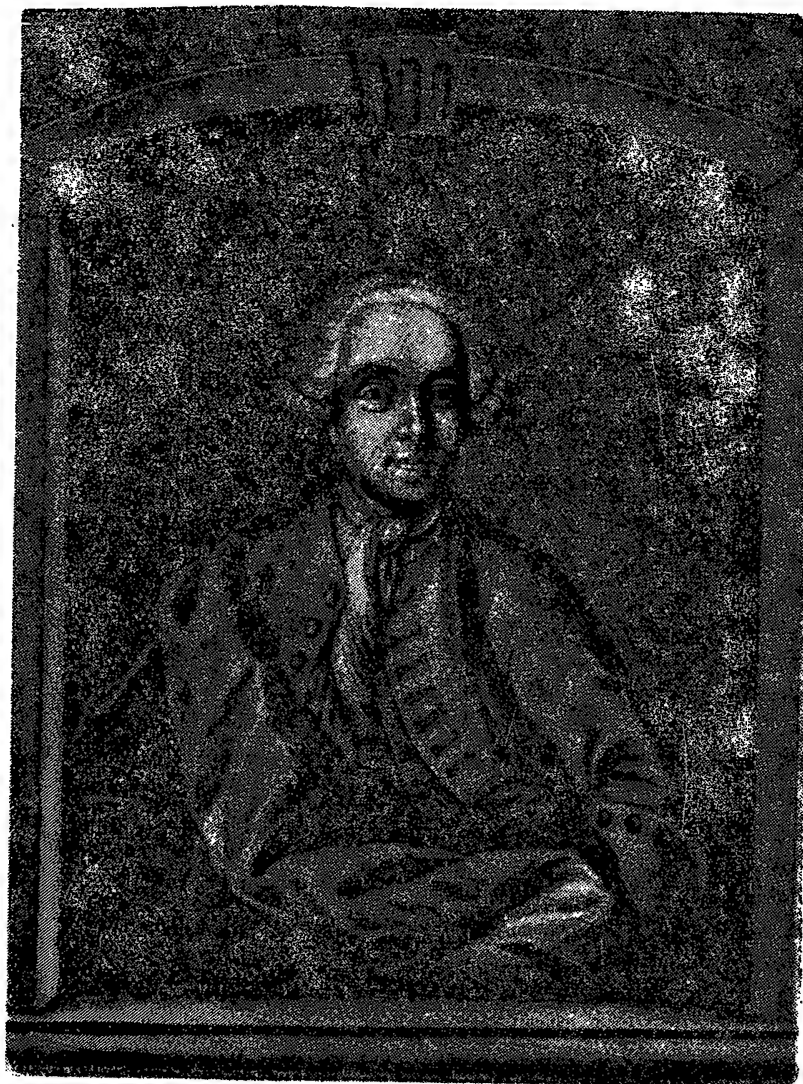
Интерес к математическому анализу усилился постановкой ряда новых геометрических задач в ходе развития дифференциальной геометрии. Решение этих задач приводило к уравнениям в частных производных первого порядка.

Таким образом, к концу рассматриваемого периода в теории дифференциальных уравнений накопилось сравнительно много частных результатов, которые необходимо было систематизировать.

3

Леонард Эйлер

В развитии математики, механики, физики и всего естествознания в России и западноевропейских странах XVIII в. особую роль сыграли труды величайшего математика и механика XVIII в. Леонарда Эйлера. Научной деятельности Эйлер отдал почти 60 лет жизни. Его исследования относятся не только к большинству разделов математики — он работал во многих областях современного ему естествознания, заложил основы целого ряда наук. Эйлер отличался феноменальной трудоспособностью. Известно около 850 его сочинений, в числе которых около двух десятков объемистых монографий. Кроме того, сохранились его письма (около 3 тыс.), представляющие собой в некоторой части краткие научные сообщения. Эйлер был



Л. Эйлер в первые годы пребывания в Петербурге.

не только ученым, но и организатором научных исследований. В этом смысле ему многим обязаны Петербургская и Берлинская академии наук.

Родился Леонард Эйлер 4 (15) апреля 1707 г. в швейцарском городе Базеле. Его отец Пауль Эйлер (1670—1745) был пастором, но любил и ценил математику. Он был учеником известного математика Я. Бернулли и защитил математическую диссертацию.

Начальные знания по математике Эйлер получил от отца. Осенью 1720 г. он поступил в Базельский университет для прохождения младших философских классов. Обладая выдающимися способностями, Эйлер успешно овладевал знаниями. Уже в 1722 г. он получил первую степень «*prima laurea*», соответствующую степени бакалавра. В свободное время он посещал лекции по математике И. Бернулли в университете. И. Бернулли обратил внимание на талантливого юношу и занимался

с ним отдельно. В 1724 г. шестнадцатилетний Эйлер получил степень магистра искусств, причем речь о философии Ньютона и Декарта он произнес на латинском языке.

По настоянию отца Эйлер начал изучать богословие и древние языки, но вскоре перешел исключительно на занятия математикой под руководством И. Бернулли. Он познакомился и подружился с сыновьями И. Бернулли — Николаем и Даниилом, также усердно занимавшимися математикой. Это знакомство сыграло большую роль в его жизни.

Первые оригинальные работы Л. Эйлера относятся к 1725—1727 гг. В 1725 г. он написал статью об изохронных кривых в соприкасающейся среде и опубликовал ее в лейпцигских «Acta eruditorum» за 1726 г. Примерно в это же время Эйлер представил на конкурс, объявленный Парижской академией наук, сочинение о расположении мачт на корабле, удостоенное в 1727 г. почетного отзыва и напечатанное в собрании премированных трудов.

В 1727 г. при содействии братьев Бернулли Эйлер был назначен адъюнктом Петербургской академии наук по математике. Положение Петербургской академии наук в этот период сильно пошатнулось. После смерти Петра I, а затем Екатерины I Россией управляли временщики (Меньшиков, Долгорукие), не понимавшие значения академии и считавшие, что она поглощает большие средства без ощутимой, на их взгляд, пользы. Появилась угроза для самого существования академии. Некоторые ученые, приехавшие из западноевропейских стран, ушли из нее. В это время начальник русского флота адмирал Сиверс предложил Эйлеру перейти на работу во флот. Однако Эйлер не принял это предложение, так как после отъезда Бюльфингера в 1731 г. получил в академии кафедру теоретической и экспериментальной физики, а после отъезда Д. Бернулли, в 1733 г., — кафедру математики.

В работе молодой Петербургской академии было немало организационных и материальных трудностей, но Эйлер и в этих условиях очень быстро рос как ученый. Большое значение для него имела сама возможность публикации работ. Впоследствии он писал, «что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии».

Эйлер принимал самое деятельное участие во всех видах работы академии. Читал лекции студентам академического университета, принимал экзамены в академической гимназии и кадетском корпусе, написал учебник арифметики, консультировал по техническим вопросам, работал в Географическом департаменте.

Но наибольшее значение имела научная деятельность Эйлера. За 14 лет первого петербургского периода жизни он подготовил к печати около 80 и опубликовал свыше 50 трудов. Научные интересы Л. Эйлера были весьма широкими: они касались всех основных областей естествознания, в которых можно было применить математические методы. В 1736 г. вышел в свет двухтомный трактат Эйлера по механике⁶, принесший ему мировую славу. К этому времени относятся много-

⁶ L. E u l e r. *Mechanica sive motus scientia analitice exposita*. Petropoli, 1736.

численные исследования Эйлера в различных областях анализа и его приложений: по вариационному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, степенным рядам, специальными функциям, дифференциальной геометрии, теории чисел, а также по оптике, механике жидкостей, небесной механике, теплоте. В эти же годы он изучил русский язык.

В 1741 г. по приглашению прусского короля Фридриха II Эйлер переезжает в Берлин. Главной причиной, побудившей его покинуть Россию, была неустойчивая политическая обстановка в период регенства Анны Леопольдовны, а также тяжелая обстановка в самой академии, созданная Шумахером. Приглашая в Берлин Эйлера, Фридрих II надеялся укрепить Берлинское научное общество. В 1744 г. это общество было реорганизовано в Берлинскую академию наук и литературы. Эйлер занял в ней пост директора математического отделения и члена правления, а после смерти президента Мопертюи, с 1759 г., фактически руководил всей деятельностью Берлинской академии.

В Берлине Эйлер прожил 25 лет. В этот период его творческая деятельность отличалась особенно большой продуктивностью. Свои труды он публиковал в журнале Берлинской академии наук «*Memoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*» (ежегодно 3—9 мемуаров) и в петербургских «Комментариях» (половину всех своих работ; он состоял почетным членом Петербургской академии). К этому периоду относится серия работ Эйлера по астрономии. Его теоретические изыскания послужили основой для составления таблиц движения Луны. По этим таблицам можно было определять долготу, что имело важное значение для ориентировки корабля в открытом море.

Эйлер заложил фундамент математической физики. В 1744 г. он получил премию от Парижской академии наук за теорию магнетизма. С полным правом его можно считать основоположником механики твердого тела и вместе с Д. Бернулли основоположником гидродинамики и гидравлики как самостоятельных наук (монография «Теория движения твердых тел»⁷ и ряд мемуаров, посвященных механике жидких тел).

Эйлер известен также как инженер-конструктор: он не только создал теорию гидравлических реактивных турбин, но и предложил свой проект новой турбины. Работы по оптике привели его к мысли о возможности построения ахроматических рефракторов, что отрицал Ньютон. Первый такой рефрактор построил в 1758 г. под влиянием работ Эйлера английский оптик Джон Доллонд.

В 1749 г. Петербургская академия наук опубликовала большой двухтомный труд Эйлера по теории корабля «Морская наука» («*Scientia navalis*»). Этот труд был написан Эйлером по особому поручению академии.

В берлинский период своей жизни Эйлер занимался также высшей баллистикой. По просьбе прусского правительства он перевел с английского языка «Новые начала артиллерии» Б. Робинса и снабдил их сво-

⁷ L. Euler. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*... Rostok, 1765.

ими «Добавлениями», представлявшими собой новую теорию полета снаряда.

Наряду с приложением математики к разнообразным отраслям естествознания Эйлер продолжал свои исследования и по самой математике. Он сделал крупный вклад в теоретическую разработку математического анализа и геометрии. В эти годы были изданы его знаменитые монографии обобщающего характера: «Введение в анализ бесконечных» (Лозанна, 1748), «Дифференциальное исчисление» (Берлин, 1755), «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума» (Лозанна, 1744)⁸. Эйлер принимал активное участие в важных научных и философских дискуссиях о природе логарифмов, понятии функции, сущности монад, принципе наименьшего действия.

Поддерживая активную связь с Петербургской академией наук, Эйлер занимался с молодыми ее учеными (С. К. Котельниковым, С. Я. Румовским, М. Софроновым), подбирал для нее кандидатов из лучших иностранных ученых, давал отзывы на сочинения, присылаемые из Петербурга (в частности, дал весьма хороший отзыв об одной из работ Ломоносова), составлял темы для конкурсов, рассматривал присланные на конкурсы работы.

В 1766 г. Эйлер возвратился в Петербургскую академию наук. И этот период своей деятельности в академии он посвятил исключительно науке. В эти годы его жизнь неоднократно подвергалась тяжелым испытаниям. Уже вскоре по приезде, осенью того же года, Эйлер почти полностью потерял зрение. Операция, сделанная в 1771 г. знаменитым венским хирургом Венцелем, вернула ему зрение только на несколько дней. В мае 1771 г. во время пожара сгорел его дом почти со всем имуществом. К счастью, большую часть его рукописей удалось спасти.

Потеря зрения не лишила трудоспособности Эйлера, наоборот, его научная продукция с годами, как это ни трудно было ему, возрастала. В оформлении трудов Эйлеру помогали его старший сын Иоганн-Альбрехт, А. И. Лексель, В.-Л. Крафт, Н. И. Фусс, племянник Ломоносова М. Е. Головин. Были изданы его большие монографии: два тома «Универсальной арифметики» (1768—1769 гг.), три тома «Интегрального исчисления» (1768—1769 гг.), три тома «Диоптрики» (1769—1771 гг.), три тома «Писем к одной немецкой принцессе» (1768—1772 гг.), учебник навигации на французском языке (1773 г., русский перевод М. Е. Головина — 1778 г.) и «Новая теория движения Луны» (1772 г.).

В первое время по приезде в Петербург Л. Эйлер принимал активное участие в академических делах: состоял членом академической комиссии, был деканом и старейшиной академии, экспертом в испытании модели одноарочного моста через Неву. Этот проект был составлен

⁸ Из математических сочинений Эйлера на русский язык переведены следующие: Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечных. Т. 1, 2. Физматгиз, М., 1964; Дифференциальное исчисление. М.—Л., 1949; Интегральное исчисление. Т. 1—3. Гостехиздат, Физматгиз, М., 1956—1958; Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. ГИТТЛ, М.—Л., 1934; Универсальная арифметика. Т. 1, 2. СПб, 1768—1769.

знаменитым русским изобретателем И. П. Кулибиным и получил полное одобрение великого ученого.

До самой смерти Эйлер сохранил всю силу своего дарования. Скончался он от кровоизлияния в мозг 7(18) сентября 1783 г. Похоронен на Смоленском кладбище в Петербурге. Над его могилой в 1837 г. был воздвигнут памятник с надписью : «Leonardo Eulero — Academia Petropolitana». В 1956 г. прах Эйлера был перенесен в Ленинградский Некрополь (бывшая Александро-Невская лавра) и похоронен неподалеку от могилы Ломоносова.

14 января 1785 г. в зале заседаний Петербургской академии наук напротив кресла президента был установлен бюст Эйлера на мраморной колонне. В настоящее время этот бюст установлен в одном из залов здания Президиума Академии наук СССР в Москве.

15 августа 1957 г., в день 250-летия со дня рождения Эйлера, в Ленинграде, на доме, в котором он жил (Набережная лейтенанта Шмидта, 15), была открыта мемориальная доска.

4

Развитие основных понятий математического анализа в XVIII в.

Приступая к характеристике математического творчества Эйлера, прежде всего рассмотрим эволюцию одного из самых основных понятий анализа — понятия функции.

В историко-математической литературе нередко приходится встречаться с выражением «понятие функции в смысле определения XVIII в». Неправомомерность такого выражения становится очевидной уже при первом ознакомлении с историей вопроса. Действительно, в силу ряда причин в XVIII в. не было и не могло быть единого общепринятого определения понятия функциональной зависимости. Содержание этого понятия изменялось под влиянием настоятельных запросов практики, в первую очередь физики, а также самой логики развития математического анализа в широком смысле этого слова, включая развивающуюся теорию рядов и теорию дифференциальных уравнений.

Однако было бы неправильным полагать, что в XVIII в. понятие функции изменялось лишь в смысле его расширения. Основная тенденция введения в анализ все более и более широкого понятия функциональной зависимости встречала сильное сопротивление со стороны отдельных выдающихся математиков эпохи, требовавших ограничить понятие функции более узкими рамками. Наряду с задачей расширения понятия функции уже в первой половине XVIII в. на очередь дня встала задача классификации функций и выделения класса функций, обладающих наиболее простыми и важными свойствами, в частности свойством разложимости их в степенные ряды. Эти вопросы привлекали внимание многих выдающихся математиков, однако главную роль в их решении сыграл Л. Эйлер.

Несмотря на то, что на протяжении предшествующих столетий механика и геометрия действительно ставили перед мыслителями задачи изучения зависимости между переменными величинами, понятие о взаимозависимости таких величин не получило аналитического выражения. Не только у Лейбница, но и у Даламбера понятие зависимости между переменными носило геометрический характер, так как они рассматривали, главным образом, зависимости между отрезками прямых. Введя само слово «функция», Лейбниц начиная с 1692 г. называет им отрезки любых прямых, связанных тем или иным образом с точками определенной кривой. Ньютон неизменно связывал идею функциональной зависимости с механической интерпретацией: аргументом любой переменной величины — флюенты, по его терминологии, служит некоторая равномерно текущая величина, аналогичная времени.

Между тем совокупность отдельных классов функций неуклонно увеличивалась. Существенное значение в этом процессе имело составление таблиц логарифмов, совершенствование таблиц тригонометрических функций, обусловленное, в частности, потребностями геодезии и навигации.

Таким образом, уже на рубеже XVII и XVIII вв. возникла необходимость в выражении понятия функциональной зависимости, свободном от геометрического и механического облачения, и задача выделения важнейших классов функций. Первый значительный шаг в решении этой проблемы сделал в 1718 г. И. Бернулли. Он писал: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Непосредственным развитием определения Бернулли явилась трактовка Эйлером понятия функциональной зависимости в первом томе «Введения в анализ»: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств»⁹.

То, что функция является аналитическим выражением, у И. Бернулли подразумевалось неявно. Принципиальное отличие эйлеровской трактовки состояло в рассмотрении значений аргумента: «Переменное количество охватывает собой решительно все числа, как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные и трансцендентные. Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества»¹⁰.

Итак, эйлерово определение функции — это по сути определение функции комплексного переменного. Однако смысл его становится отчетливым лишь после того, как выясняется содержание понятия «аналитическое выражение». Именно здесь Эйлер и подходит к классификации функций. В качестве допустимой операции при составлении аналитического выражения он указывает сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, решение алгебраических уравнений и интегрирование. Функции, получаемые

⁹ Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечных. Т. 1, стр. 24.

¹⁰ Там же, стр. 24.

в результате этих действий, исключая интегрирование, Эйлер называет алгебраическими и делит их на рациональные (целые и дробные) и иррациональные. Применение названных операций к элементарным трансцендентным функциям e^z , $\ln z$, $\sin z$, $\cos z$ приводит его к трансцендентным функциям ¹¹.

Кроме расширения области значений аргумента Эйлер сделал принципиальный шаг вперед в выяснении важнейших общих свойств функций как аналитических выражений. Функции, заданные единым аналитическим выражением, он называет непрерывными, вкладывая, таким образом, в это понятие смысл, отличный от нашего понимания непрерывности. Разрывными функциями у него называются функции, заданные на разных кусках интервала различными аналитическими выражениями ¹².

Учитывая запас операций, принятый для образования аналитических выражений, нетрудно заметить, что Эйлер должен был получить функции аналитические в современном определении всюду, за исключением изолированных особых точек. В окрестности же этих точек получаемые функции должны были допускать разложение в обобщенный степенной ряд, который мог содержать дробные и отрицательные степени. Таким образом, выделяя класс непрерывных функций, Эйлер по сути выделил класс аналитических функций в смысле современной теории функций комплексного переменного. Именно поэтому установленные Эйлером важнейшие свойства непрерывных функций оказываются основными свойствами аналитических функций в смысле современного определения. Одно из этих свойств — представимость функции степенным рядом.

В четвертой главе «Введения в анализ» Эйлер пишет: «...Если же кто сомневается, что можно было бы выразить функцию посредством бесконечного ряда членов подобного рода (т. е. вида $A + Bz + Cz^2 + \dots$), то это сомнение устранится при развертывании каждой функции. Но для большей ясности этого утверждения следует допустить кроме степеней переменной z с целыми положительными показателями еще какие угодно степени» ¹³. Основанием для этого утверждения Эйлера послужила, как следует из его высказывания, вся математическая практика эпохи. Частные случаи, когда сходящийся ряд из элементарных функций приводил к неаналитической функции, были единичными и не могли привлечь внимание математиков, так как в XVIII в., в силу неизбежной исторической ограниченности общего уровня математических знаний, еще не могла быть поставлена проблема предельного перехода для функциональных последовательностей. Эту ограниченность не смог преодолеть и Лагранж в курсе математического анализа, опубликованном в последние годы XVIII в. Эйлеровский термин «непрерывная функция» Лагранж заменил термином «аналитическая функция», считая,

¹¹ Разделение функций на алгебраические и трансцендентные было, хотя и в менее отчетливой форме, у Даламбера и Лейбница.

¹² В первом томе «Введения в анализ» рассматриваются лишь непрерывные функции.

¹³ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 1, стр. 67.

что ему удалось доказать возможность представимости каждой такой функции (т. е. непрерывной в смысле Эйлера) степенным рядом. Само определение функции у Лагранжа полностью совпадает с определением Эйлера.

В более поздней работе (1767 г.) Эйлер выясняет другое существенное свойство непрерывных функций, состоящее в том, что значения любой функции полностью определяются посредством значения этой функции на сколь угодно малом интервале. Иными словами, любой как угодно малый кусок непрерывной кривой определяет всю эту кривую. Эйлер установил еще два общих свойства непрерывных функций. Они рассмотрены ниже. Из изложенного ясно, что функции разрывные, по Эйлеру, являются либо кусочно-аналитическими в смысле современного определения, либо аналитическими. В дальнейшем эйлерову трактовку понятия функциональной зависимости будем называть трактовкой узкого определения функции. Это понятие он рассматривает во втором томе «Введения в анализ» (1748 г.).

Содержанием второго тома является введение в область геометрических приложений анализа. Исследуя вопросы аналитической геометрии, Эйлер принял условие: не пользоваться «никакими другими вспомогательными средствами, кроме уравнения, выражающего природу каждой кривой линии». Основную задачу он ставит в смысле изучения зависимости между аппликатой (ординатой) и абсциссой, поэтому область изменения аргумента ограничивается лишь полем действительных чисел. Расширению подвергается само понятие функциональной зависимости. Дело в том, что как сама геометрия, так и одна из важнейших проблем математической физики — задача о колебании струны — привела Эйлера к необходимости введения в анализ разрывных функций, т. е. функций, «лишенных закона непрерывности». Действительно, задача колебания струны потребовала изучения «механических» кривых, или кривых, получаемых «свободным влечением руки». Поскольку произвольно малый кусок непрерывной кривой определяет все дальнейшее ее течение, а при механическом построении кривой это свойство заведомо не выполняется, то, как отмечает Эйлер в более поздней работе, «такие кривые (т. е. изображающиеся «свободным влечением руки». — *Ред.*) противостоят указанному выше ряду кривых, определенных законом непрерывности».

Проблема колебания струны оказала принципиальное влияние на развитие математического анализа не только в XVIII, но и в XIX в. В современных обозначениях для струны с закрепленными концами она сводится к нахождению решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(0, x) = f_1(x);$$

$$u_t(0, x) = f_2(x)$$

и краевым условиям

$$u(t, 0) = 0;$$

$$u(t, l) = 0.$$

Впервые эту задачу поставил (в недостаточно четкой форме) Б. Тейлор в 1713 г. После исследований И. Бернулли, опубликованных в 1729 и 1732 гг., она привлекла внимание Д. Бернулли, Даламбера, Эйлера, Лагранжа, а позже Фурье, Римана и др. Однако основополагающими являются первые исследования Даламбера и Эйлера, начатые ими почти одновременно.

Первое исследование Даламбера о колебаниях струны опубликовано в третьем томе «Мемуаров Берлинской академии» в 1749 г.

Аналитическая задача, к которой пришел Даламбер, изучая колебания натянутой струны, состояла в решении уравнений

$$dp = a dt + v ds; \quad (1)$$

$$dq = v dt + a ds, \quad (2)$$

где $p(t, s)$, $q(t, s)$, $a(t, s)$, $v(t, s)$ — неизвестные функции указанных аргументов; t — время; s — длина дуги струны, которая в силу малости колебания может быть заменена абсциссой соответствующей точки. Решение, полученное Даламбером, имеет вид

$$y = \Psi(t + s) + \Gamma(t - s),$$

где Ψ и Γ являются, однако, неизвестными функциями. При выяснении вопроса об определении этих функций Даламбер учитывал условия закрепления струны на концах, предполагая, что при $t = 0$ струна совпадает с осью x . Значение же $\frac{\partial y}{\partial t}$ при $t = 0$ в постановке задачи не указывается.

В 1749 г. была опубликована также первая по этой проблеме работа Эйлера, доложенная Берлинской академии в мае 1748 г. Пользуясь излюбленным методом интегрирующего множителя, Эйлер для несколько более общего уравнения, чем у Даламбера,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (b > 0),$$

получил решение, имеющее в современных обозначениях вид

$$y = f(x + \sqrt{bt}) + \Phi(x - \sqrt{bt}),$$

где f и Φ — функции, подлежащие определению. Он рассматривает частный случай: при $t = 0$ струна произвольно отклонена от положения равновесия и начальный импульс равен нулю.

Существенно то, что Эйлер не накладывает никаких ограничений на кривую, выражающую начальную форму струны, и рассматривает произвольную кривую, которая может быть начерчена механически. Окончательный результат Эйлера таков: если при $t = 0$ форма струны

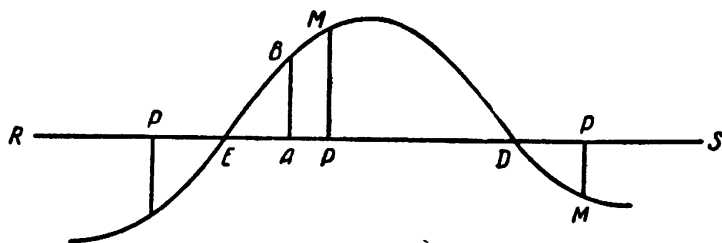
описывается уравнением $y = f(x)$, то решением указанной смешанной задачи является функция

$$y = \frac{1}{2} f(x + \sqrt{et}) + \frac{1}{2} f(x - \sqrt{et}).$$

Этот первый результат Эйлера по проблеме колебания струны достаточно определенно объясняет, почему во втором томе своего «Введения в анализ» он вынужден был расширить совокупность функций, которые следует изучать в анализе. Ограничиться непрерывными функциями было уже невозможно.

Вернемся к рассмотрению трактовки Эйлером понятия функции во втором томе «Введения в анализ». Как уже отмечалось, общая постановка задачи изучения кривых линий ограничивает область изменения аргумента действительными числами. Прежде всего Эйлер стремится показать, что к этому изучению необходим аналитический подход, который заключается в исследовании кривой или прямой линии (на плоскости) как совокупности вершин перпендикуляров, восстановленных в рассматриваемых точках оси x . Одновременно он дает и геометрическую трактовку понятия функции. С достаточной определенностью об этом говорится в § 6 первой главы: «Стало быть, когда указанным образом для всех определенных значений x будут определены соответствующие значения y , а в каждой из точек P прямой RS будем проводить перпендикулярно к ней ординаты PM , выражающие значение функции y , и одни концы этих ординат, P , будут лежать на прямой RS , другие же концы, M , будут находиться либо выше линии RS , когда значения y положительны, либо ниже ее, когда значения y отрицательны, либо же они будут лежать на самой линии RS , когда эти значения равны нулю, как это получается в точках D и E . Таким образом, концы M всех этих ординат представят какую-нибудь линию, прямую или кривую, которая, стало быть, определяется указанным образом функцией y . В силу этого любая функция от x , будучи истолкована геометрически указанным путем, определит некоторую линию, прямую или кривую, природа которой будет зависеть от природы функции y »¹⁴ (см. рисунок).

Как видим, при геометрической трактовке понятия функции Эйлер отнюдь не нуждается в прежнем определении функции как единого



Геометрическая трактовка понятия функции по Эйлеру.

¹⁴ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 2, стр. 21.

аналитического выражения и основывается, в конечном счете, на соответствии точек вида M точкам вида P .

Эйлер стремится показать общность подобного подхода и в следующем параграфе пишет: «А как бы ни была построена кривая линия, из каждой точки ее можно опустить перпендикуляры на прямую RS и получить таким образом отрезки AP , которые представляют значение переменных, а также длины перпендикуляров PM , которые представляют значение функции y . Таким образом, не существует ни одной точки кривой, которая не была бы определена указанным образом с помощью функции y »¹⁵. Последнее утверждение Эйлера, разумеется, справедливо в предположении отсутствия у кривой кусков, параллельных оси ординат.

Далее Эйлер утверждает, что любую кривую можно изучить с помощью изучения соответствующей функции. Здесь же он рассматривает, в частности, кривые, задаваемые механически.

Проблема колебания струны, несомненно, была существенным стимулом расширения классов функций, подлежащих изучению в анализе. Однако нельзя не учитывать и влияния непосредственно геометрии. Целевая установка второго тома «Введения» сама по себе должна была привлечь внимание его автора к изучению различных классов кривых. «Хотя много линий можно вычертить механически непрерывным движением точки, которое сразу наглядно выявляет кривую линию целиком,— пишет Эйлер,— мы будем здесь рассматривать кривые преимущественно как порожденные функциями, поскольку такой подход является более аналитическим и более широким, а также лучше приспособлен для исчисления. Таким образом, любая функция от x будет давать некоторую линию, прямую или кривую; стало быть и обратно, кривые линии можно сводить к функциям»¹⁶.

Рассматривая любые кривые как «порожденные функциями», Эйлер, несомненно, расширяет свое определение понятия функции, данное в первом томе. Однако при постановке вопроса о классификации кривых, а следовательно, и функций неизбежно возникает необходимость учитывать определения непрерывных и разрывных функций в связи с узким понятием функции как аналитического выражения. Все кривые, в соответствии с определениями Эйлера непрерывных и разрывных функций, рассматриваются в таком контексте: «...Непрерывная линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x . Но если кривая линия строится таким образом, что... одна ее часть BM определяется с помощью одной функции, тогда как другая часть MD описывается другой функцией и т. д., то этого рода кривые линии мы будем называть прерывными или смешанными и неправильными (нерегулярными), так как они не образуются на основе единого неизменного закона, а состоят из частей различных непрерывных кривых»¹⁷.

В работах о колебании струны в понятие разрывных линий Эйлер вкладывает значительно более широкий смысл, рассматривая любые

¹⁵ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 2, стр. 21.

¹⁶ Там же.

¹⁷ Там же.

механические кривые, которые могут и не состоять из кусков непрерывных кривых. В частности, в работе «Об использовании разрывных функций в анализе»¹⁸ Эйлер рассматривает кривые, лишенные непрерывности не потому, что их части не соединены между собой, а потому, что они не задаются никаким определенным уравнением.

Оценка нового направления в математической физике, связанного с применением тригонометрических рядов, дана Эйлером в работе о колебании струны, написанной в 1759 г., однако напечатанной лишь в 1766 г.¹⁹ Постановка Эйлера отличается весьма значительной общностью: струне можно задать произвольную нерегулярную начальную форму, а затем внезапно отпустить ее, в результате чего струна будет совершать какое-то движение. Но возникает вопрос, сможет ли теория сравниться в этом случае с задачей. Стремясь выяснить возможности использования тригонометрических рядов, Эйлер приходит к заключению, что для функций $S(x)$ и $U(x)$, выражающих соответственно начальную форму и начальный импульс точек струны, должны выполняться соотношения

$$S(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \dots ;$$

$$U(x) = -\frac{\pi c}{a} \alpha' \sin \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a} \beta' \sin \frac{2\pi x}{a} - \dots$$

Эйлер пытается сначала защитить метод тригонометрических рядов: «Так как значения S и U содержат бесконечно много членов, то кажется, что они содержат все возможные случаи, так что, какова бы ни была фигура струны и движение струны вначале, эти обе величины могут быть учтены». При этом он отмечает, что наличие бесконечного множества коэффициентов позволит заставить кривые, выражаемые рядами, проходить через бесконечное множество заданных точек. Однако далее Эйлер отступает: «Но каким бы убедительным не казался этот аргумент, я могу рассматривать его (найденное решение.— *Ред.*) только как весьма частное». Подтверждением этого, по его мнению, является «невозможность» представления тригонометрическим рядом такой начальной функции, которая на некоторой части интервала своего определения была бы тождественно равна нулю, а на другой являлась непрерывной (по Эйлеру) функцией, отличной от нуля. По-видимому, решающее значение в этом для Эйлера имело соображение о том, что поведение непрерывной (т. е. аналитической) кривой на малом куске интервала своего определения должно определять поведение кривой всюду.

Еще в 1744 г. Эйлер сообщил Гольдбаху формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

¹⁸ L. Euler. De usu functionum discontinuarum in analysi.— Novi Comm. Acad. sci. Petropol., 1765 (1767).

¹⁹ L. Euler. Eclairissements sur le mouvement des cordes vibrantes.— Miscellanea Taurinensia. T. 3, 1762—1763 (1766), p. 1—26.

не делая однако из нее заключения о том, что два аналитических выражения могут совпадать на отрезке, не совпадая при этом всюду²⁰.

Итак, мысль Эйлера остановилась перед принципиальной трудностью в развитии анализа. Следующий фундаментальный результат был получен более чем через 40 лет Фурье. Когда Лагранжу сообщили о полученном Фурье результате представления тригонометрическим рядом даже разрывной функции (в современном смысле), он не поверил этому открытию и пытался выставить ряд возражений.

Открытие Фурье явилось переломным этапом в развитии всего математического анализа. Оно показало, что в случае кривой, являющейся графиком единого аналитического выражения — тригонометрического ряда, нельзя говорить о какой бы то ни было связи между ее кусками, что казалось немыслимым в XVIII в. для функции как аналитического выражения. В то же время стремление выделить класс функций, для которых сохранилось бы указанное свойство, привело в XIX в. к широкому развитию теории аналитических функций в смысле Вейерштрасса. Логическим развитием результата Фурье явилось известное определение функции Лобачевским и Дирихле, основанное лишь на идее взаимно однозначного соответствия двух множеств.

5

Дифференциальное исчисление

1. „Введение в анализ бесконечных“ Л. Эйлера

Первые в истории математики курсы исчисления бесконечно малых были написаны в конце XVII в. — «Анализ бесконечно малых» Г. Лопиталя (1696 г.) и «Лекции по интегральному исчислению» И. Бернулли (1692 г.). Однако уже в первой трети XVIII в. было накоплено много нового как в области дифференциального и интегрального исчисления, так и в области методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Необходимо было обобщить и систематизировать все новое содержание математического анализа.

Заслуга в решении этой исключительной широты и сложности задачи принадлежит Эйлеру. Опубликованные в 1748—1770 гг. его фундаментальные труды составили эпоху в развитии не только математического анализа, но и всей математики. К ним принадлежат два тома «Введения в анализ бесконечных», две книги «Дифференциального исчисления» и три тома «Интегрального исчисления». Эта трилогия Эйлера является энциклопедией математического анализа своего времени. Ее содержание представляет собой в основном достижения самого автора. Классическое богатство новых результатов Эйлера сочетается в ней с замечательной логической последовательностью и систе-

²⁰ Н. Н. Лузин. Функция. — В кн.: Н. Н. Лузин. Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 329.

матичностью изложения. Влияние этих трудов Эйлера на дальнейшее развитие математического анализа и его преподавания переоценить невозможно.

Во «Введении в анализ» Эйлер стремится подготовить читателя к отчетливому восприятию идей нового исчисления: «Я старался не только пространно и отчетливее, чем обычно, изложить все, что безусловно требует анализ бесконечных, но развил также довольно много вопросов, благодаря которым читатели незаметно и как бы сверх ожидания могут освоиться с идеей бесконечного»²¹.

В первом томе он определяет предмет математического анализа: «Весь анализ бесконечных величин заключается в исследовании переменных величин и их функций»²². Эйлер настойчиво стремится облегчить переходный путь читателя от элементарной алгебры к «более высокой науке». Достижение этой цели он считает возможным лишь при обстоятельном освещении круга вопросов, «разрешение которых в элементарной алгебре либо пропускается, либо рассматривается недостаточно обстоятельно»²³. Характерной чертой содержания первого тома является акцентирование на алгоритмической стороне вопроса.

Почти во всех главах Эйлер, развивая учение о функциях, сразу же указывает необходимые вычислительные средства. Основными из них являются разложение в обобщенные степенные ряды, бесконечные произведения и непрерывные дроби. После выяснения понятия функции в смысле аналитического выражения дается общая классификация функций (в современных учебниках анализа она в основном сохранена). Все функции делятся на алгебраические, образующиеся с помощью алгебраических действий (в конечном числе), и трансцендентные, которые «составляются иными способами или же посредством тех же (алгебраических.— *Ред.*) действий, повторяемых много раз»²⁴. Далее детально рассмотрен вопрос о разложении рациональных дробей на простейшие, указаны способы приведения ряда иррациональных выражений к рациональному виду. В частности, здесь содержатся известные «подстановки Эйлера», используемые при интегрировании выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, где R — рациональная функция. Эта же классификация переносится в пятой главе на функции двух и более переменных. Здесь также рассматриваются свойства однородных функций.

В главах VI—VIII дано классическое построение теории трансцендентных функций, выполненное независимо от методов исчисления бесконечно малых. В частности, изложена теория логарифмов комплексных переменных, выведены формула Муавра в ее современном виде, а также знаменитые формулы Эйлера, связывающие экспоненциальные и тригонометрические функции. Впрочем, последние были известны Эйлеру, как уже отмечалось, еще в 1741 г. (см. его переписку

²¹ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 1, стр. 19.

²² Там же.

²³ Там же.

²⁴ Там же.

с Х. Гольдбахом). В 1743 г. он использовал их в сочинении о линейных дифференциальных уравнениях.

Основная идея Эйлера при построении теории трансцендентных функций заключалась в рассмотрении их как функций, возникающих в результате предельного перехода от алгебраических функций. Подобный подход использовали позже О. Коши, Б. Якоби и другие ученые XIX в., развивая дальше теорию аналитических функций.

Одним из самых действенных методов изучения трансцендентных функций для Эйлера оказался метод разложения в ряды. Изучению свойств бесконечных рядов посвящено несколько глав (X, XIII и др.). Эйлер указывает два основных подхода — арифметический и алгебраический. При первом — членами ряда являются числа и требуется его сходимость. При втором — бесконечный ряд рассматривается как формальное выражение, порождаемое заданной функцией. Закону задания функции соответствует закон образования членов ряда. На этом пути и возникают расходящиеся ряды. Именно эти ряды оказались средством для исследования глубоких свойств многих трансцендентных функций. В частности, Эйлер нашел разложение гамма-функции в произведение, функциональные уравнения гамма- и дзета-функций.

Развитие математики в первой половине XX в. заставило вновь вернуться к идеям Эйлера о бесконечных рядах. В X и XV главах «Введения» дана алгебраическая трактовка бесконечных рядов, которая привела Эйлера к блестящим результатам в теории чисел. В частности, он установил глубокую связь дзета-функции

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

со свойствами простых чисел:

$$\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{2^x}\right) \left(1 + \frac{1}{3^x}\right) \left(1 + \frac{1}{5^x}\right) \dots$$

В трех последних главах первого тома «Введения» рассмотрены задачи о представлении заданного целого числа суммой заданных целых чисел, применение бесконечных рядов к отысканию корней уравнений, основные свойства непрерывных дробей.

Во втором томе «Введения в анализ бесконечных» кратко изложены геометрические приложения математического анализа. Иными словами, второй том является довольно полным изложением аналитической геометрии, отвечающим состоянию науки в середине XVIII в. Изложенные в нем результаты в значительной степени принадлежат опять-таки самому Эйлеру. В 22 основных главах рассматривается аналитическая геометрия на плоскости, в шести дополнительных — аналитическая геометрия в пространстве.

Как уже отмечалось, стремление рассматривать возможно более широкую совокупность кривых линий заставило Эйлера расширить прежнее определение функции. Во втором томе «Введения» он рассматривает кривые, заданные на разных кусках интервала определения различными аналитическими выражениями. В соответствии с этим рас-

пируется и класс функций. В силу самой области исследования аргументом функции всюду служит действительная переменная.

После классификации кривых и отвечающих им функций выводится формула преобразования координат, изучается общее уравнение прямой, выясняется вопрос о числе точек пересечения алгебраической кривой n -го порядка с прямой, излагается теория конических сечений и их разделение на три основных класса. Большое внимание уделяется изучению асимптот. Асимптота определяется как прямая линия или «более простая кривая», которая на бесконечности сливается с рассматриваемой кривой.

Таким образом, стремление Эйлера ограничиться всюду лишь средствами элементарной алгебры в данном случае было несколько нарушено. Идея предельного процесса оказалась необходимой по существу. То же самое с неизбежностью возникало и при трактовке понятия касательной (без использования понятия производной или дифференциала). Правило, которое выводит Эйлер для построения касательной к кривой, основано на сохранении членов первого порядка разложения соответствующей функции в окрестности точки касания. Имеется в виду разложение, возникающее для левой части уравнения, которое определяет кривую при подстановке

$$x = p + t, \quad y = q + u,$$

где p и q — координаты фиксированной точки кривой. Представляет интерес и само определение касательной как прямой, или более простой кривой, «которая совпадала бы на очень маленьком протяжении с некоторой частью рассматриваемой кривой»²⁵. Как видим, это определение дано в таком же плане, как и определение асимптоты и в неявном виде также содержит идею предельного перехода.

С помощью аналогичного формально «алгебраического» подхода далее исследуются вопросы о радиусе круга кривизны, об особых точках, точках перегиба, о нахождении кривых, обладающих заданными свойствами.

В главе о диаметрах кривых фактически заложены основы теории симметрии, получившей в XIX в. в связи с запросами кристаллографии широкое развитие. В специальной главе (XXI) Эйлер исследует трансцендентные кривые, указывая, что в этом случае также можно использовать предельный переход. Рассматривая уравнение $y = x^{\sqrt{2}}$, он отмечает: если бы вместо $\sqrt{2}$ мы взяли какую-нибудь из дробей

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{96}{70}, \dots,$$

которые приближенно выражают $\sqrt{2}$, то получили бы соответственно алгебраические кривые 3-го, 7-го, 17-го и т. д. порядков, близко подходящие (proxime accedentes) к искомой линии.

Кривые, определяемые уравнениями с иррациональными показателями, Эйлер называет простейшими трансцендентными. Рассматривая

²⁵ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 2, стр. 158.

кривые, соответствующие логарифмическим и показательным функциям, Эйлер выясняет, в частности, геометрический смысл уравнения $y = \frac{1}{(-x)^x}$: «Эта часть кривой будет состоять только из ряда дискретных точек, сходящихся к оси как к асимптоте»²⁶. И далее отмечает, что в зависимости от того, каким числом окажется x — четным или нечетным, — указанные точки будут располагаться соответственно выше или ниже оси абсцисс.

Особое внимание уделяет Эйлер изучению не только обратных тригонометрических функций, но и различного вида спиралей.

«Приложение о поверхностях» представляет собой первое систематическое изложение аналитической геометрии в пространстве. Метод исследования поверхностей с помощью плоских сечений, вывод общих формул преобразования пространственных координат с помощью «эйлеровых углов», исследование общего уравнения второго порядка с тремя переменными, выделение шести конических видов этих поверхностей второго порядка — таково основное содержание этого заключительного раздела второго тома «Введения в анализ бесконечных».

II. „Дифференциальное исчисление“ Л. Эйлера

В 1755 г. Петербургская академия наук опубликовала «Дифференциальное исчисление» Л. Эйлера. По содержанию, систематичности изложения и последовательности в развитии необходимых новых понятий и алгоритмов это сочинение можно поставить на одно из самых почетных мест во всей истории математического анализа. Весьма сильное влияние оно оказало на развитие и преподавание математики в России.

Как уже отмечалось, в первой половине XVIII в. назрела необходимость освободить основания нового исчисления от механической и геометрической трактовки их. Новое исчисление требовало подхода, свободного от апелляции к физике, механике и геометрии. Таким подходом мог быть только аналитический. «Здесь же все изложение ограничено областью чистого анализа, так что для изложения всех правил этого исчисления не понадобилось ни одного чертежа», — указывает Эйлер в заключительной фразе своего предисловия²⁷.

Роль анализа в познании реальных процессов отчетливо выражена в этом же предисловии: «...Если мы желаем точно решить хотя бы самый простой вопрос, касающийся движения твердых или жидких тел, мы не можем обойтись без помощи анализа бесконечно малых... Можно сказать, что во всех отраслях науки этот высший анализ применяется столь широко, что все, чего можно достичь, не прибегая к нему, можно считать почти за ничто»²⁸.

²⁶ Л. Эйлер. Введение в анализ... Т. 2, стр. 277.

²⁷ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 44.

²⁸ Там же, стр. 43.

Книга состоит из двух частей. В первой части (девять глав) излагается дифференциальное исчисление в собственном смысле слова, во второй (18 глав) — применение дифференциального исчисления, теории рядов и рациональных дробей к решению алгебраических уравнений, вычислению дробей в точках обращения в нуль числителей и знаменателей, нахождению точек максимума и минимума функции одного и двух аргументов. Вопросам приложения дифференциального исчисления к геометрии Эйлер предполагал посвятить третью часть сочинения, но так и не написал ее: из-за занятости другими работами ограничился лишь начальными набросками.

Предмет дифференциального исчисления определяется в предисловии. Предварительно Эйлер дает расширенное определение функции: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер, оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других»²⁹. Рассмотрение во втором томе «Введения в анализ» функциональной зависимости как зависимости между ординатой и абсциссой произвольной механической кривой, несомненно, способствовало появлению у Эйлера этого весьма широкого определения. Впрочем, само содержание книги связано с функциями, заданными аналитическими выражениями. Даже в главе о дифференцировании «непредставимых функций» исходным является задание функции с помощью формул, смысл которых, однако, поясняется в дальнейшем. Примером является выражение вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}.$$

Точно так же «выражение $1 \cdot 2 \dots x$ будет непредставимой функцией x , ибо, если x есть какое угодно число, то значение ее нельзя выразить не только алгебраически, но и с помощью какого-либо определенного ряда трансцендентных функций»³⁰.

Выяснив понятие приращения функции, отвечающего приращению аргумента, Эйлер дает общее определение дифференциального исчисления: «Это есть метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями и когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение»³¹, а также интегрального исчисления как метода, «с помощью которого по известному отношению исчезающих приращений находят те функции, чьими являются эти приращения»³².

В основе дифференциального исчисления Эйлера лежит понятие бесконечно малой величины. В этом отношении он следует первому учебнику анализа бесконечно малых Лопиталя (1696 г.), написанному под большим влиянием И. Бернулли.

²⁹ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 38.

³⁰ Там же, стр. 509.

³¹ Там же, стр. 39.

³² Там же, стр. 91.

Разъясняя понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин, Эйлер стремится отвести упреки относительно пренебрежения в анализе «геометрической строгостью». Однако попытки логического обоснования основных начал анализа Эйлеру не удалось. Существо этих попыток заключалось в построении «исчисления нулей». Прежде всего Эйлер вводит два способа сравнения нулей: арифметический и геометрический. При первом рассматривается разность нулей, при втором — их отношение. И если разность двух нулей равна, конечно, нулю, то с отношением нулей дело обстоит иначе. Исходя из очевидного равенства $0 \cdot 2 = 0 \cdot 1$, Эйлер формально образует пропорцию $\frac{2}{1} = \frac{0}{0}$, из которой заключает, что нуль в числителе правой части должен быть «вдвое больше» нуля в знаменателе. Подобным же образом эта пропорция «приводит» к заключению, что между нулями может выполняться любое соотношение. Отсюда вытекает, по Эйлеру, и необходимость пользования «различными символами, особенно когда требуется определить геометрическое отношение двух равных нулей»³³. А так как «бесконечно малое количество точно равно нулю», то сразу же и возникает понятие бесконечно малых различных порядков. Задачу дифференциального исчисления Эйлер определяет так: «Но в исчислении бесконечно малых ничего больше не делается, как находится отношение между различными бесконечно малыми»³⁴. Заключать, однако, из этого определения, что в основу дифференциального исчисления Эйлер положил понятие производной, а не дифференциала, было бы неправильным: всюду в своем сочинении он вычисляет именно дифференциалы, функций. Термин «производная» принадлежит Лагранжу.

Определяя бесконечно малые количества как чистые нули, Эйлер вынужден полемизировать с Лейбницем, считавшим, что существуют некие последние частицы, называемые «атомами», «монадами» или «простыми сущностями»³⁵.

Вполне естественно возникает вопрос, каким образом удалось Эйлеру в практике дифференциального исчисления избежать каких бы то ни было принципиальных ошибок, допуская рассуждения, основанные на рассмотрении указанных «пропорций». По-видимому, Эйлеру отнюдь не была чужда идея бесконечно малой величины как величины переменной, стремящейся к нулю. Действительно, Эйлер дает и иное определение бесконечно малых, согласно которому они «меньше всякого могущего быть заданным количества»³⁶. Существенно, что это определение он неоднократно и действительно использует. Бесконечно большую величину Эйлер определяет так: «Известно, что значение дроби $\frac{1}{z}$ оказывается тем больше, чем более уменьшается знаменатель z . Поэтому если z становится количеством, меньшим любого могущего быть заданным количества, т. е. бесконечно малым, то

³³ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 91.

³⁴ Там же.

³⁵ Там же, стр. 89.

³⁶ Там же, стр. 91.

значение дроби $\frac{1}{z}$ должно стать больше, чем любое могущее быть заданным количество, т. е. бесконечно большим» ³⁷.

Первые две главы первой части — о конечных разностях и применении разностей к учению о рядах — являются необходимой подготовкой для дальнейших операций с дифференциалами первого и высшего порядков, а также с действиями над рядами, исследуемыми во второй части книги. В третьей главе излагаются понятия бесконечно малой величины и дифференциала, в четвертой — учение о дифференциалах любого порядка. Необходимость рассмотрения последнего была обусловлена прежде всего запросами механики и геометрии. Так, в работе о дифференциальных уравнениях (1728 г.) ³⁸ Эйлер рассматривает классы однородных уравнений второго порядка. К этому же времени относятся его исследования о геодезических линиях. Соответствующее дифференциальное уравнение оказалось также второго порядка. В работе о началах вариационного исчисления (1744 г.) ³⁹ он использует дифференциалы любого порядка, а также понятие функции многих переменных.

В двух следующих главах «Дифференциального исчисления» (V и VI) изложены алгоритмы нахождения дифференциалов алгебраических и трансцендентных функций, в VII и VIII главах — правила дифференцирования функции двух переменных.

В заключительной главе первой части — «О дифференциальных уравнениях» — сформулированы правила дифференцирования функций, заданных неявно, и намечены перспективы дальнейшего развития исчисления бесконечно малых в плане учения о дифференциальных уравнениях. Эйлер достаточно подробно определяет смысл решения дифференциального уравнения: «...Природа дифференциального уравнения будет выяснена, если можно будет представить y в виде такой функции от x , которая указывается дифференциальным уравнением, т. е. которая составлена таким образом, что если повсюду подставить ее вместо y , ее дифференциал вместо dy , ее высшие дифференциалы вместо d^2y , d^3y и т. д., то получится тождественное уравнение» ⁴⁰. Отношение $\frac{dy}{dx}$ он трактует как отношение дифференциалов: «Подобно тому, как конечное уравнение

$$y^2 + Py + Q = 0$$

выражает соотношение между y и x , так дифференциальное уравнение выражает соотношение между dx и dy , т. е. отношение между dy и dx » ⁴¹.

Эйлер рассматривает не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и уравнения вида

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

³⁷ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 93.

³⁸ L. Euler. Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundae gradus... — Comm. Acad. sci. Petropol. T. 3, 1728 (1732), p. 124—137.

³⁹ Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума.

⁴⁰ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 195.

⁴¹ Там же, стр. 188.

где P, Q, R — функции переменных x, y, z . Это уравнение он изучает в смысле нахождения функции трех переменных, полный дифференциал которой совпадает с левой частью уравнения. Как известно, решение уравнений данного вида сводится к решению системы уравнений в частных производных первого порядка.

Содержание последней главы в свое время оказало существенное влияние на развитие теории дифференциальных уравнений.

Вторая часть «Дифференциального исчисления» посвящена, главным образом, учению о бесконечных рядах. С одной стороны, Эйлер много внимания уделяет преобразованиям отдельных бесконечных рядов в другие ряды, обладающие более быстрой сходимостью, с другой — исключительно «беззаботно» производит алгебраические действия с заведомо расходящимися рядами. Например, в § 9 для ряда

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

устанавливается, что его сумма

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Это рассуждение основано на формальном применении формулы суммирования, изложенной в § 3. Если

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + \dots,$$

то

$$S = \frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 a + \dots, \quad (3)$$

где

$$\Delta a = b - a;$$

$$\Delta^2 a = c - b - (b - a) = c - 2b + a;$$

$$\dots \dots \dots$$

Если коэффициенты таковы, что начиная с некоторого значения k все $\Delta^k a$ равны нулю, то S из равенства (3) получает конечное выражение.

Эйлер, разумеется, видел, что для расходящегося ряда понятие суммы теряет смысл. Возможность «суммирования» этих рядов он основывает на расширении самого понятия «сумма»: «Термин «сумма» мы здесь будем понимать в том смысле, который мы ему приписали выше (§ 111 I части), так что суммой мы будем называть значение того конечного выражения, из разложения которого возникает предложенный ряд»⁴².

Далее (гл. II) показано, что преобразования над рядами, суммы которых известны, позволяют найти другие ряды с известными суммами. В главе «О нахождении конечных разностей» конечные разности выражаются через значение функции и ее производных в данной точке. Выражение, найденное для первой разности, есть не что иное, как ряд

⁴² Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 215.

Тейлора. Вывод Эйлера аналогичен выводу Тейлора. В следующей (IV) главе изучаются разложения различных функций в степенные ряды.

Глава V посвящена, в основном, выводу формулы для суммы ряда по общему члену. В частности, впервые доказана общая формула для суммы степеней натуральных чисел. У Я. Бернулли она была дана без доказательства. При выводе ее Эйлер существенно использует «бернуллиевы числа», введенные Я. Бернулли при исследовании этого же вопроса. Полученные результаты он применяет к различным прогрессиям (гл. VI, VII). Поскольку их суммы можно вычислить непосредственно, Эйлер находит суммы многих рядов, коэффициенты которых составлены с помощью бернуллиевых чисел. Далее (гл. VIII) указаны приемы для нахождения сумм бесконечных рядов. Сначала с помощью формального дифференцирования данного степенного ряда находят дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет (формально) сумма этого ряда, затем, для нахождения суммы, применяют метод неопределенных коэффициентов, с помощью которого находят решение полученного уравнения.

Исследуемый далее метод приближенного решения некоторых алгебраических уравнений основан на идее Ньютона о представлении искомого корня в виде ряда, расположенного по степеням разности между искомым значением корня и его грубым приближением.

Излагая методы нахождения максимума и минимума функции одного переменного (гл. X), Эйлер выражает необходимое условие правилом: «Нужно положить дифференциал предложенной функции равным нулю...»⁴³ Для определения характера экстремума он использует дифференциалы второго и высшего порядков.

Исследованию этого же вопроса для функций, заданных неявно, и функций двух переменных посвящена следующая (XI) глава. Однако здесь Эйлер допускает существенную ошибку, считая равенства

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0$$

не только необходимым, но и достаточным условием для наличия экстремума функции $z(x, y)$.

В XII и XIII главах даны оценки числа действительных и мнимых корней, в XIV — снова исследуется вопрос о максимуме и минимуме функции, но предполагается, что первый дифференциал обращается (в критической точке) в нуль. Решение вопроса достигается рассмотрением приращения функции. В XV главе излагается правило нахождения «истинных значений» дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при значениях x , обращающих в нуль числитель и знаменатель. Для Эйлера в соответствии с его «исчислением нулей» это выражение лишь «кажется неопределенным». Действуя по правилу Лопиталя, он фактически доопределяет значение функции по

⁴³ Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление, стр. 388.

непрерывности. Само правило обосновывается довольно просто. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ заменяется на

$$\frac{P(x) + dP}{Q(x) + dQ}.$$

Поскольку $P(a) = Q(a) = 0$, «истинное значение» $\frac{P(x)}{Q(x)} \Big|_{x=a}$ и оказывается равным $\frac{dP(x)}{dQ(x)} \Big|_{x=a}$.

Изучению дифференцирования «непредставимой» функции Эйлер посвящает отдельную главу (XVI). Основная его идея заключается в применении рядов для вычисления приращения функции, отвечающего приращению аргумента, и использовании самого определения дифференциала. Вновь рассматривая вопрос о существовании рядов (гл. XVII), он допускает «интерполирование ряда» в том смысле, что «указываются его члены, отвечающие дробным или даже иррациональным индексам», и существенно использует идею нахождения приращения «непрерывной» функции.

Содержание заключительной (XVIII) главы представляет собой подготовительный материал для изучения раздела интегрирования рациональных дробей. Разность между данной дробью и соответствующей элементарной дробью является выражением, имеющим неопределенность в рассматриваемой точке. Это определение позволило Эйлеру применить метод «раскрытия кажущейся неопределенности» с помощью нахождения дифференциалов числителя и знаменателя.

6

Интегральное исчисление и теория обыкновенных дифференциальных уравнений

В 1768 г. Петербургская академия наук издала первый том «Интегрального исчисления» Л. Эйлера. Второй и третий тома были изданы также в России в 1769 и 1770 гг. Широта содержания, необычайное богатство новых результатов, в подавляющем большинстве принадлежащих самому Эйлеру, проникновение в сложные вопросы теории дифференциальных уравнений, не только обыкновенных, но и в частных производных, — все это определило значение и роль трехтомного сочинения Эйлера в истории математического анализа. Без преувеличения можно сказать, что «Интегральное исчисление» Эйлера составляет эпоху в развитии математического анализа. Этот труд оказал также влияние на дальнейшее развитие ряда математических наук.

Однако, чтобы иметь полное представление о развитии «высших ветвей анализа» в Петербургской академии наук, необходимо учитывать огромное количество принципиальных результатов Эйлера, не включенных ни в один из томов «Интегрального исчисления». Эти результаты

содержатся в его исследованиях по математическому естествознанию. Рассмотрим сначала общее построение «Интегрального исчисления» Эйлера.

В понятие интегрального исчисления Эйлер, как и его современники, включал не только интегрирование функций, но и интегрирование дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных. В связи с этим три тома «Интегрального исчисления» содержат такие разделы: интегрирование функций (т. I, ч. 1), интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (т. I, ч. 2), интегрирование дифференциальных уравнений второго и высшего порядков (т. II, ч. 2), интегрирование уравнений с частными производными (т. III).

В 1794 г. (уже после смерти Эйлера) Петербургская академия наук издала четвертый том «Интегрального исчисления», содержащий дополнения, главным образом, к первым двум томам. В Собрании сочинений Л. Эйлера («Opera omnia») материал четвертого тома распределен по соответствующим томам первой серии этого издания.

Первая часть первого тома состоит из девяти глав, которым предшествуют «предварительные замечания об интегральном исчислении вообще». Определив операцию интегрирования, Эйлер указывает: «Интегральное исчисление должно быть распространено на разыскание функций двух или большего числа переменных, когда задано какое-нибудь соотношение между дифференциалами»⁴⁴. Далее он отмечает, что нахождение функции двух и большего числа переменных по заданному соотношению между их дифференциалами еще нигде не излагалось. Решение этой задачи принесло бы «очень большую пользу в механике и особенно в учении о жидкостях». Таким образом, задача ставится в плане решения любых дифференциальных уравнений, не только обыкновенных, но и в частных производных.

Не удивительно, что Эйлер считает нужным отметить обширность и сложность этой области исследования: «...Из всего нашего сочинения выяснится в гораздо большей степени то, чего еще остается желать, чем то, что уже сделано, ибо первое по сравнению со вторым нужно считать лишь ничтожной частицей»⁴⁵. В этом вступлении указывается, что если интегрирование не удастся, то функцию, которую требуется получить путем интегрирования, следует считать трансцендентной. Выполнимость интегрирования понимается в смысле выражения искомой функции через алгебраические или трансцендентные функции, изученные ранее: если найденные в интегральном исчислении функции «можно свести к логарифмам или углам, мы всегда смотрим на них как на алгебраические»⁴⁶. В этом смысле и понимается возможность или невозможность представления интегралов как «алгебраических».

Далее Эйлер определяет полный и частный интегралы. Понятиями полного и частного интегралов обыкновенных дифференциальных урав-

⁴⁴ Л. Э й л е р. Интегральное исчисление. Т. 1, стр. 12.

⁴⁵ Т а м ж е, стр. 15.

⁴⁶ Т а м ж е, стр. 17.

нений он владел еще в 1738 г., а в своих печатных работах ввел их впервые в 1743 г.

В первой главе первой части рассматривается интегрирование рациональных дробей. Трудности могут возникнуть лишь при нахождении множителей знаменателя, «но тогда, — пишет Эйлер, — мы имеем дело с недостатком, который следует отнести за счет алгебры, а не за счет излагаемого здесь метода интегрирования»⁴⁷.

Во второй главе излагаются методы интегрирования некоторых иррациональных выражений. Основное внимание уделяется интегрированию дифференциальных биномов и выражения вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, где R — рациональная функция. Используя свои подстановки, описанные ранее, Эйлер показывает возможность сведения соответствующих интегралов к интегрированию рациональных дробей. Для интегрирования дифференциальных биномов указываются подстановки для трех известных еще Ньютону возможных случаев интегрирования. «Легко понять, — отмечает Эйлер, — что невозможно придумать другие подстановки для этой цели»⁴⁸. Это его утверждение для случая рациональных показателей было впервые доказано П. Л. Чебышевым.

Третью главу Эйлер посвящает интегрированию с помощью степенных рядов. Все рассуждения он проводит формально, используя при этом обобщенные степенные ряды и прием разложения в ряд данной функции, отличный от обычного. Поясним это на примере.

Требуется разложить в ряд $y = a^x$. Логарифмируя и дифференцируя, Эйлер легко получает уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a.$$

Далее, учитывая, что $y|_{x=0} = 1$, он ищет выражение для y в виде ряда

$$y = 1 + Ax + Bx^2 + \dots,$$

что и приводит к известному выражению

$$y = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \dots$$

Аналогично раскладываются в ряды выражения

$$(x + \sqrt{1 - x^2})^n; \quad (x + \sqrt{1 + x^2})^n.$$

Заменяя в разложении последнего выражения x на $\sqrt{-1} \sin \varphi$, Эйлер получает разложение для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. В задаче 17 впервые появляется уравнение вида

$$\frac{m dy}{\sqrt{a + b^2 y}} = \frac{n dx}{\sqrt{f + g x^2}},$$

которое также решается почленным интегрированием.

⁴⁷ Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. 1, стр. 48.

⁴⁸ Там же, стр. 59.

Интегрированием по частям находятся интегралы

$$\int x \ln x dx; \quad \int aX(x) dx; \quad \int (\ln x)^n dP(x),$$

где $X(x)$ и $P(x)$ — заданные функции частного вида. Применение рядов дало возможность Эйлеру найти «трансцендентные количества»

$$\int \frac{a^x dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{\ln z}; \quad \int x^{nx} dx.$$

Здесь вводится принятое обозначение e для основания системы натуральных логарифмов ⁴⁹. Аналогичными приемами находятся интегралы вида

$$\int X(x) \arcsin x dx,$$

где $\int X(x) dx$ считается известным, а также интегралы от тригонометрических функций вида

$$\int \frac{\sin^m \varphi}{\cos^n \varphi} d\varphi; \quad \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^n \varphi}.$$

При этом используются общие тригонометрические подстановки

$$\cos \varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad \sin \varphi = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Метод интегрирования по частям позволил Эйлеру найти интеграл

$$\int e^{a\varphi} \sin^n \varphi d\varphi$$

и аналогичные ему другие интегралы для натурального n .

Изучая интегрирование с помощью разложения в тригонометрические ряды (гл. VI), основное внимание Эйлер уделит интегрированию выражений

$$\frac{d\varphi}{1+n \cos \varphi}; \quad (1+n \cos \varphi)^m d\varphi,$$

где m — рациональное число. Подобные интегралы встречались в его ранних работах по небесной механике. В данном случае нахождение коэффициентов формального разложения

$$\frac{1}{1+n \cos \varphi} = A - B \cos \varphi + C \cos 2\varphi - D \cos 3\varphi + \dots$$

он проводит на основе обычного разложения

$$\frac{1}{1+n \cos \varphi} = 1 - n \cos \varphi + n^2 \cos^2 \varphi - n^3 \cos^3 \varphi + \dots \quad (4)$$

и формул для степени косинусов; известных еще из первого тома «Введения в анализ». Впрочем, здесь же указан и другой, более простой, прием, суть которого заключается в умножении равенства (4) на $1 + n \cos \varphi$ и применении формулы для произведения косинусов ⁵⁰. Для

⁴⁹ Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. 1, стр. 115.

⁵⁰ Там же, стр. 148.

произвольного рационального m используется разложение по формуле бинома Ньютона, причем отдельно выделяется случай целого m .

Глава VII имеет особо важное значение. В ней изложены методы приближенного вычисления интеграла $\int y(x) dx$ при неявном предположении непрерывности $y = y(x)$. Ставя задачу о приближенном вычислении интеграла $\int y(x) dx$, который при $x = a$ имеет значение b , Эйлер развивает известный метод прямоугольников, не прибегая, однако, ни к какой геометрической интерпретации. Учитывая возможность брать значение $y = y(x)$ не только в начале частного интервала, но и в его конечной точке, он заключает, что можно получить два выражения, значения которых «будут представлять собой как бы границы истинного количества y »⁵¹. Затем отмечает возможность брать большие частные интервалы там, где функция y изменяется мало, а также «непозволительность» применять указанный способ там, где значение y становится бесконечно большим: «Для промежутка от $x = 1 - \omega$ до $x = 1$ нельзя найти интеграл

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

изложенным способом»⁵².

Далее Эйлер стремится усовершенствовать свой метод путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора. Для частного (малого) интервала $(a, a + \alpha)$ конечный результат в обозначениях Эйлера имеет вид

$$y = b + X(x - a) - \frac{1}{2} P(x - a)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} Q(x - a)^3 - \dots,$$

где

$$X = \frac{dy}{dx}; \quad P = \frac{dX}{dx}; \quad Q = \frac{dP}{dx}; \quad \dots$$

Значения этих функций берутся при значении аргумента $x = a + \alpha$. Дальнейшее вычисление состоит в последовательном рассмотрении частных промежутков.

Усовершенствуя этот метод, Эйлер указывает возможность нахождения границ, между которыми заключено истинное значение интегралов, а также среднего арифметического граничных значений. В заключительных пояснениях он отмечает необходимость специального рассмотрения тех интегралов $\int y(x) dx$, для которых в каком-либо промежутке функция y возрастает до бесконечности, когда переменному x придается некое определенное значение, хотя сама величина интеграла $\int y dx$ и не была бы в этом случае бесконечной.

Таким образом, речь идет о вычислении несобственных интегралов, в которых подынтегральная функция обращается в бесконечность в конечных точках интервала. Этот вопрос изучается значительно глубже

⁵¹ Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. 1, стр. 164.

⁵² Там же.

в следующей главе. Сначала вычисляются значения при $x = 1$ интегралов, которые исчезают при $x = 0$ и подынтегральные функции которых обращаются в бесконечность при $x = 1$. Одна из основных задач заключается в установлении рекуррентных соотношений, используемых и в наши дни в любом учебнике интегрального исчисления. Эйлер получает множество формул для вычислений произведения некоторых несобственных интегралов. Примером этих результатов может служить формула⁵³

$$\int \frac{z^{\mu} dz}{\sqrt{1 - 2z^{2\nu}}} \cdot \int \frac{z^{\mu+\nu} dz}{\sqrt{1 - z^{2\nu}}} = \frac{1}{\nu(\mu+1)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

В заключительной (IX) главе первой части описаны способы разложения некоторых несобственных интегралов в бесконечные произведения. Много внимания уделено изучению свойств бета-функции:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Эйлер рассматривает и более общую функцию, обозначив ее символом $\left(\frac{p}{q}\right)$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \int x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} dx,$$

нижний предел интеграла равен нулю, а верхний — единице⁵⁴. В более поздних работах обозначения пределов интегрирования Эйлер вводит явным образом. Функция $B(p, q)$ получается сразу из $\left(\frac{p}{q}\right)$ при $n = 1$.

Одно из выражений этой функции через бесконечное произведение имеет вид

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} dx = \frac{n}{mk} \cdot \frac{2n(m+k)}{(m+n)(k+n)} \cdot \frac{3n(m+k+n)}{(m+2n)(k+2n)} \dots$$

Новый вывод известной формулы Эйлера

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{m\pi}{n}},$$

полученной в предыдущей главе, основан на разложении в произведение

$$\sin \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n} \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \dots,$$

найденном Эйлером в первом томе «Введения в анализ».

Рассмотрим основные направления развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений в XVIII в. Первые же задачи динамики

⁵³ Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. 1, стр. 185.

⁵⁴ Там же, стр. 212.

точки при их аналитической трактовке потребовали методов интегрирования нелинейных уравнений второго порядка и их систем. Напомним, что определение по закону всемирного тяготения движения планеты вокруг Солнца эквивалентно решению задачи с начальными условиями для квазилинейной системы уравнений

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + k \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где k — постоянная, определяемая через массу Солнца и гравитационную постоянную, входящую в выражение закона тяготения. Напомним, далее, что динамические уравнения Эйлера, описывающие движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, образуют нелинейную систему трех уравнений второго порядка (относительно эйлеровских углов ψ , Θ , φ как функций времени t). К нелинейным уравнениям приводили задачи о движении точки в сопротивляющейся среде, экстремальные задачи механики, физики и геометрии, ставшие предметом исследования развивающегося вариационного исчисления. Например, уравнение Эйлера в вариационном исчислении, выражающее необходимое условие экстремума функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

является в общем случае квазилинейным. В частности, к нелинейным уравнениям второго порядка привело важное для практических приложений нахождение геодезических линий на поверхности. Решение задач статики и динамики механических систем со сложными связями требовало интегрирования нелинейных уравнений.

Назревала также потребность в развитии теории линейных уравнений. Это объясняется тем, что в начале XVIII в. приобретала все более серьезное значение теория малых колебаний материальных систем с конечным числом степеней свободы. В связи с конструированием достаточно точных маятниковых часов, необходимых для астрономических наблюдений, а также с первыми гравиметрическими проблемами (определение ускорения силы тяжести в зависимости от широты, выяснение сжатия Земли у полюсов) возникла необходимость в построении аналитической теории математического и физического маятников, являющейся развитием результатов Гюйгенса (конец XVII в.). В первую очередь, требовалось развитие теории малых колебаний в предположении, что отсутствует сопротивление среды. И если в XVII в. при изучении вопроса ограничивались, как правило, условиями, определяющими изохронное движение одной точки, то теперь необходимо было выяснить такие условия для систем, состоящих из любого конечного числа материальных точек. Отсюда берут начало и первые исследования в области колебательных процессов систем с бесконечным числом степеней свободы, связанные, прежде всего, с известной проблемой колебания струны и изучением распространения звука.

Весь этот комплекс вопросов требовал создания теории линейных дифференциальных уравнений, преимущественно второго порядка, а затем и теории систем таких уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Другое направление теории обыкновенных дифференциальных уравнений — численные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений — было обусловлено в значительной степени требованиями небесной механики. Необходимость разработки таких методов вызывалась сложностью возникающих нелинейных систем, исключающей возможность их интегрирования в конечном виде. Уже в середине XVIII в. наряду с усовершенствованием метода степенных рядов получили применение тригонометрические ряды (без исследования вопросов сходимости). Несколько позже теория дифференциальных уравнений обогатилась первым общим методом аппроксимации решения для любых уравнений первого и второго порядков.

Одним из направлений в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений было также изучение особых решений. Оно определялось задачами геометрического содержания, в частности задачами быстро развивавшейся дифференциальной геометрии. Главнейшими из них были задачи о нахождении огибающих и изогональных траекторий семейств кривых (позже — семейств поверхностей). В XVIII в. направление, связанное с изучением семейств плоских кривых, в частности семейств интегральных линий, было наименее значительным. Однако уже в начале второй четверти XIX в. тесно связанная с теорией особых решений проблема единственности решения задач с начальными условиями, а вместе с ней и общая проблема существования решений приобрели в теории обыкновенных дифференциальных уравнений первостепенное значение.

Уровень накопленных к началу XVIII в. знаний о свойствах и способах решений обыкновенных дифференциальных уравнений был совершенно недостаточен для изучения новых сложных задач. Поэтому не удивительно, что уже с начала второй четверти XVIII в. наблюдалось значительное повышение интереса к этой области анализа. В первом же томе «Комментариев» Петербургской академии за 1726 г. были помещены исследования по дифференциальным уравнениям Я. Германа, Х. Гольдбаха, И. Бернулли и его сыновей Николая и Даниила. Весьма значительное развитие в XVIII в. теория дифференциальных уравнений получила в трудах Эйлера, братьев Бернулли, Даламбера, Лагранжа, Лапласа.

Охарактеризуем вкратце некоторые из результатов Эйлера в развитии важнейших направлений этой теории. В работах Эйлера и его современников задача интегрирования дифференциальных уравнений ставилась, как правило, в смысле нахождения «полного» интеграла (т. е. общего, по современному определению). Необходимое частное решение выделялось затем с помощью некоторого выбора значений произвольных постоянных, соответствующих в подавляющем большинстве случаев постановке задачи с начальными условиями.

Из нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка наибольшее внимание Эйлера привлекало уравнение Риккати в его различных формах. Интерес Эйлера к этому уравнению был связан не только с задачами механики и геометрии, но и с важными приложениями в более поздних его исследованиях ряда вопросов гидродинамики и проблемы колебания неоднородной струны. Из нелинейных уравнений второго порядка Эйлер выделил довольно широкий класс уравнений, являющихся, по его определению, «однородными». Из уравнений высшего порядка он исследовал более общие уравнения, чем уравнения Лагранжа, соответственно обобщив прием интегрирования с помощью дифференцирования исходного уравнения по независимому переменному.

Большое количество нелинейных дифференциальных уравнений первого и высшего порядков частного вида Эйлер проинтегрировал, применяя метод интегрирующего множителя. Этому методу Эйлер уделял особенно большое внимание.

7

Методы интегрирования нелинейных уравнений

I. Интегрирование уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей

Работы Эйлера по теории непрерывных дробей изучены в настоящее время не полностью. Более половины этих работ были опубликованы посмертно. В историко-математической литературе первое применение непрерывных дробей к интегрированию дифференциальных уравнений связывается лишь с именем Лагранжа. Часть результатов Эйлера в этой области освещена в известной монографии Перрона⁵⁵. Однако применение Эйлером метода непрерывных дробей к теории уравнения Риккати и здесь не рассмотрено. Две самые ранние работы Эйлера о непрерывных дробях были закончены уже в 1737 и 1739 гг., но опубликованы значительно позже, первая — в 1744 г., вторая — в 1750 г. В этих и последующих работах Эйлер рассматривает весьма широкий круг вопросов. К основным из них относятся развитие различного рода алгоритмов, связанных с непрерывными дробями, суммирование бесконечных рядов с помощью непрерывных дробей, применение непрерывных дробей при исследовании вопросов итерационного исчисления и приближенного решения алгебраических уравнений, методы суммирования непрерывных дробей частного вида. Одним из последних методов и является сведение задачи суммирования непрерывной дроби к интегрированию соответствующего уравнения Риккати.

⁵⁵ O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig u. Berlin, 1913, S. 205—207.

В первой работе — «О непрерывных дробях»⁵⁶ — Эйлер формально показывает, что значение непрерывной дроби

$$q(p) = \frac{a}{p} + \frac{1}{\frac{3a}{p} + \frac{1}{\frac{5a}{p} + \frac{1}{\frac{7a}{p} + \dots}}}$$

должно удовлетворять уравнению $adq + q^2dp = dp$. Этот результат был получен при нахождении дифференциального уравнения, которому формально удовлетворяет бесконечный ряд, эквивалентный данной непрерывной дроби.

В некоторых работах, связанных с применением непрерывных дробей к уравнениям Риккати, Эйлер использует свойство единственности решения задачи с начальными условиями. Вследствие того, что начальная точка оказывается, по современным определениям, особой, справедливость окончательных заключений Эйлера не очевидна. Рассмотрим в связи с этим одну из работ Эйлера, опубликованную посмертно, — «Простой анализ уравнения Риккати с помощью непрерывной дроби»⁵⁷. Исходным в этом исследовании является уравнение вида

$$ady - \frac{bydx}{x} + y^2dx = x^{n-2}dx. \quad (5)$$

В простейшем случае, при $b = 0$ для y Эйлер получает выражение

$$y = a + \frac{x^n}{a(1+n) + \frac{x^n}{a(1+2n) + \frac{x^n}{a(1+3n) + \dots}}} \quad (6)$$

Далее он отмечает, что при $n > 0$ выражение (6) принимает значение a для $x = 0$ (и что это решение для отрицательного n также имеет значение a при $x = \infty$).

На основании выражения (6) Эйлер сделал некоторые выводы о непрерывных дробях. Общая схема его рассуждений представляет самостоятельный интерес. Она основана на уверенности Эйлера в том, что начальные данные решений рассматриваемых уравнений первого порядка определяют эти решения однозначно. Явное использование свойства единственности решения задачи по начальным данным встречается в сравнительно немногих работах Эйлера.

Применение современных теорем единственности показывает, что эта уверенность Эйлера в большинстве случаев оправдана. В рассматриваемой работе прежде всего используется простейший случай интегрируемости уравнения (5) при $n = 2$ и $b = 0$. В уравнении

$$ady + y^2dx = dx$$

⁵⁶ L. Euler. De fractionis continuis.— Comm. Acad. sci. Petropol. T. 9, 1737 (1744).

⁵⁷ L. Euler. Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi.— Mem. de l'Acad. d. sci. de St Petersburg. T. 6, 1813—1814 (1818), p. 12—29.

$$dx = \frac{ady}{1-y^2}, \quad (7)$$

откуда Эйлер легко находит полный интеграл

$$y = \frac{Ce^{\frac{2x}{a}} - 1}{Ce^{\frac{2x}{a}} + 1}. \quad (8)$$

Из соотношения $y = \frac{z}{x}$ и уравнения (5) следует, что решение z уравнения

$$axdz - azdx + z^2dx = x^2dx \quad (9)$$

представляется равенством

$$z = x \frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}, \quad (10)$$

где Δ — произвольная постоянная. Но z вследствие полученного соотношения (6) представляется также в виде непрерывной дроби

$$z = a + \frac{x^2}{3a + \frac{x^2}{5a + \frac{x^2}{7a + \frac{x^2}{9a + \dots}}}} \quad (11)$$

Правая часть этого равенства при $x = 0$ имеет значение, равное a . Далее выясняется, каким следует выбрать значение Δ в равенстве (10), чтобы z при $x = 0$ также было равно a : Δ должно быть равно -1 и, следовательно,

$$z = x \frac{e^{\frac{2x}{a}} + 1}{e^{\frac{2x}{a}} - 1}. \quad (12)$$

При $x = 0$ выражение (12) становится неопределенным. Эйлер стремится устранить эту неопределенность: он считает x бесконечно малым, раскладывает в ряды числитель и знаменатель, пренебрегая всеми членами, содержащими x во второй степени и выше, что приводит к приближенному равенству

$$z \approx x \frac{2 + \frac{2x}{a}}{\frac{2x}{a}} = a + x$$

Но начальные значения выражения (12) и решения, представляемого по формуле (11) непрерывной дробью, одни и те же ($z(0) = a$). Поэтому, заключает Эйлер,

$$z = x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = x \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4^4} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots \right)}{\frac{2x}{a} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots \right)}. \quad (13)$$

Справедливость такого заключения Эйлера не очевидна. Рассматривая уравнение

$$axdz - azdx + z^2dx = x^2dx, \quad (14)$$

он не сомневается в том, что два решения этого уравнения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию $z(0) = a$, тождественно совпадают. Запишем уравнение (14) в виде двух уравнений:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{az + x^2 - z^2}{ax}; \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{ax}{az + x^2 - z^2}. \quad (16)$$

Основная трудность состоит в том, что точка $(0, a)$ является особой: в этой точке не определены правые части уравнений (15) и (16). Поэтому известные теоремы существования и единственности в данном случае неприменимы.

Исследуем характер особой точки $(0, a)$. Подстановка $z = y + a$ приводит уравнения (15) и (16) к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay + x^2 - y^2}{ax}; \quad (15')$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax}{-ay + x^2 - y^2}. \quad (16')$$

Напомним, что в 1922 г. Перрон⁵⁸ доказал следующий результат: если для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M'_x(0, 0)x + M'_y(0, 0)y + O(x^2 + y^2)}{N'_x(0, 0)x + N'_y(0, 0)y + O(x^2 + y^2)}$$

действительные части обеих корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - M'_y(0, 0) & -M'_x(0, 0) \\ -N'_y(0, 0) & \lambda - N'_x(0, 0) \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

отличны от нуля, то на характер поведения интегральных кривых около изолированной особой точки (в данном случае начала координат) члены $O(x^2 + y^2)$ не оказывают никакого влияния. Уравнение (17) в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda + a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = 0,$$

⁵⁸ И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.—Л., 1952, стр. 89.

откуда $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -a$. Это означает, что для уравнений (15') и (16') характер особой точки (0, 0) такой же, как и для уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}.$$

Но в последнем случае для общего интеграла $xy = C$, точка же (0, 0) для этих уравнений седлообразна. Через точку (0, 0) проходит две интегральные линии: $y = 0$ и $x = 0$. Следовательно, через точку (0, a) проходит также две и только две интегральные линии уравнений (15) и (16) или уравнения (14). Поэтому, строго говоря, из одного совпадения начальных условий в данном случае нельзя заключить, как это делает Эйлер, что совпадают и сами решения. Однако одна из интегральных кривых уравнения (14), проходящих через начальную точку (0, a), определяется уравнением $x = 0$. Если же это тривиальное решение задачи не рассматривать, как делает Эйлер, то из приведенных здесь соображений следует, что два любых других решения, удовлетворяющие начальному условию $z(0) = a$, действительно должны совпадать. Поэтому в данном случае уверенность Эйлера в совпадении решений, удовлетворяющих этому начальному условию, оправдана (с точностью до интегральной кривой $x = 0$). Однако в некоторых других случаях аналогичные рассуждения Эйлера оказываются необоснованными, так как начальная точка оказывается не седлообразной, а узловой.

Вернемся к заключительной части рассматриваемой работы. Эйлер отмечает быструю сходимость непрерывной дроби, возникающей из равенства (11) при $x = 1$ и $a = 1$:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \dots}}} = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}.$$

Для пояснения быстроты сходимости он выписывает подходящие дроби

$$1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{21}{16}, \quad \frac{151}{115}, \quad \frac{1380}{1051}, \dots$$

и затем разности соседних членов:

$$-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 16}, \quad -\frac{1}{16 \cdot 115}, \quad \frac{1}{115 \cdot 1051}, \dots$$

Отсюда заключает: если взять значение дроби, равное $\frac{1380}{1051}$, то ошибка будет меньше $\frac{1}{1051 \cdot 11676}$. Заменяя t на $t\sqrt{-1}$ и применив формулы, связывающие показательные и тригонометрические функции, Эйлер из найденного результата сразу же получает равенство

$$\frac{t}{\operatorname{tg} \frac{t}{a}} = a - \frac{t^2}{3a - \frac{t^2}{5a - \frac{t^2}{7a - \dots}}}.$$

При этом он опять учитывает, что левая часть равенства (после «раскрытия неопределенности»), как и правая часть, при $t = 0$ принимает значение a .

II. Методы понижения порядка

Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений представляет, как хорошо известно, особенно большие трудности. Даже в настоящее время более или менее полная теория развита лишь для некоторых классов таких уравнений. Поэтому казалось бы, что в историческом развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений изучение уравнений, во всяком случае второго и высших порядков, должно было начинаться с класса линейных проблем. Однако ознакомление уже с первыми работами Эйлера по дифференциальным уравнениям показывает, что наука далеко не всегда следовала «естественному» пути с точки зрения логического содержания современной теории.

Новые задачи естествознания и, в первую очередь, механики обуславливали в самом начале XVIII в. попытки решения как линейных, так и нелинейных задач. Однако потребовался значительный запас сведений об интегрировании нелинейных уравнений, прежде чем Эйлеру удалось найти истинный путь развития теории линейных уравнений высшего порядка ⁵⁹.

В первой работе о дифференциальных уравнениях — «Новый метод решения дифференциальных уравнений 2-го порядка» ⁶⁰ — Эйлер предлагает метод, позволяющий осуществлять понижение порядка «для бесчисленного количества дифференциальных уравнений второго порядка».

Поставленную задачу Эйлер решает для четырех типов уравнений второго порядка. Прежде всего он рассматривает сравнительно простое уравнение

$$ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y, \quad (18)$$

или, в более привычной для нас записи,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^{p-2} = ax^m y^{-n}.$$

Проводя подробно все вычисления, Эйлер показывает, что для понижения порядка этого уравнения сначала следует применить преобразование обеих переменных по формулам

$$x = e^{\alpha v}; \quad y = e^v t,$$

⁵⁹ Отражение этого исторического процесса сохранилось во всей учебной литературе. Почти в любом современном руководстве по дифференциальным уравнениям изложению теории линейных уравнений высшего порядка предшествует рассмотрение частных классов нелинейных уравнений, решение которых сводится к квадратурам.

⁶⁰ L. Euler. Nova methodus innumerabilis aequationes differentiales secunda gradus... — Comm. Acad. sci. Petropol. T. 3, 1728 (1732), p. 124—137.

где

$$\alpha = \frac{n+p-1}{m+p};$$

v — новая независимая переменная и t — новая неизвестная функция⁶¹, и затем положить $dv = zdt$.

Далее рассматривается уравнение более сложного вида

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = d^2y. \quad (19)$$

Легко видеть, что если считать x , y , dx , dy , d^2y имеющими одинаковые измерения, то уравнение (19) является однородным. Приведение его к уравнению первого порядка достигается преобразованиями

$$x = e^v; \quad y = e^v t.$$

В качестве примера уравнений третьего порядка рассматривается уравнение

$$Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m+2-b} = dx^m d^2y, \quad (20)$$

где P и Q предполагаются зависящими от неизвестной функции y . В этом случае преобразование несколько изменяется. Сначала полагается по-прежнему $x = e^v$, следовательно, $dx = e^v dv$ и, так как x — независимая переменная,

$$0 = d^2x = e^v (d^2v + dv^2).$$

Поэтому $d^2v = -dv^2$. Вследствие того что уравнение (20) является однородным m -го измерения относительно x и dx , его можно сократить на множитель e^{mv} и после упрощения оно принимает вид

$$\frac{d^2y}{dv^2} = Q(y) \left(\frac{dy}{dv} \right)^{m+2-b} + P(y) \left(\frac{dy}{dv} \right)^{m+2}.$$

Отсутствие в этом уравнении независимой переменной вне знаков дифференциалов позволяет применить теперь обычную подстановку

$$\frac{dy}{dv} = z;$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dv} = z \frac{dz}{dy}$$

и получить уравнение

$$z \frac{dz}{dy} = Q(y) z^{m+2-b} + P(y) \left(\frac{dy}{dv} \right)^{m+2}.$$

Однако Эйлер указывает иную подстановку, $dv = zdy$, дающую в окончательном результате

$$Pdy + Qz^b dy = -z^{m+1} dy z^{m-1} dz.$$

⁶¹ Уравнение принимает вид

$$ae^{\alpha v(m+p)apdv} = e^{(n+p-1)v} t^n (dt + t dv)^{p-2} d^2t + 2dt dv + (1-\alpha) t dv^2.$$

Число α выбирается таким, чтобы его можно было сократить на показательный множитель. Вместо e в этой работе Эйлер всюду пишет c .

Четвертый случай представляет уравнение

$$Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m-b+1} = dx^{m-1} d^2x, \quad (21)$$

где P и Q по-прежнему зависят от y . Очевидно, что это уравнение является однородным относительно неизвестной функции x и ее дифференциалов. Поэтому для понижения его порядка следует положить, как и выше, $x = e^v$ и в полученном уравнении ввести новую неизвестную функцию $z = \frac{dv}{dy}$.

Случай, представленный у Эйлера уравнением (20), обычно не рассматривается в учебной литературе. Действительно, в силу произвольности функций $P(y)$ и $Q(y)$ уравнение (20) не принадлежит ни к одному типу «обобщенно-однородных» уравнений, так как ничего не известно об однородности его членов относительно неизвестной функции.

Подход Эйлера к одному из трудных вопросов теории был настолько нов, что воспринимался с большим трудом даже самыми выдающимися современниками. В частности, Эйлер вынужден был в письмах к И. Бернулли три раза разъяснять свое определение «однородности» для уравнений второго порядка.

Удивительная полнота первого теоретического исследования Эйлера очевидна. Однако значение этой работы можно оценить, лишь выяснив ее роль в открытии Эйлером классического метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами. К вопросу об интегрировании обобщенно-однородных уравнений второго порядка Эйлер возвращается в третьей главе второго тома «Интегрального исчисления»⁶². Отправным пунктом здесь является представление уравнения второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка. Не приводя общего аналитического выражения, Эйлер указывает, что уравнение второго порядка должно связывать четыре переменные: x, y, p и q , из которых p и q определены соотношениями $dy = p dx$; $dp = q dx$. Принимая дифференциалы dx, dy, d^2y имеющими измерение, равное единице, он заключает, что величине p надлежит сопоставить нулевое измерение, а величине q — измерение, равное -1 . Поэтому уравнение является однородным в том случае, если все члены в нем одного измерения, p имеет нулевое измерение, а q — измерение -1 . Из определения сразу же следует, что подстановки $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$ приводят уравнение к такому виду, где все члены содержат x в одной и той же степени, вследствие чего x можно исключить из уравнения. Поскольку обратное положение также справедливо, Эйлер сразу же формулирует «критерий однородности»: четыре переменные x, y, p, q должны входить в уравнение так, чтобы подстановки $y = ux$ и $q = \frac{v}{x}$ исключали x из исчисления.

⁶² В первых двух главах рассматриваются простейшие нелинейные уравнения второго порядка $q=Y(y)$; $q=P(p)$; $f(x,p,q)=0$; $f(y,p,q)=0$; $p=\frac{dy}{dx}$; $q=\frac{dp}{dx}$, для которых решение строится в параметрическом виде так, как это делается и в настоящее время.

Далее трактуется метод интегрирования более общих уравнений, которые становятся однородными, если одна из переменных считается имеющей измерение, равное определенному числу.

Появление первых работ Эйлера о нелинейных дифференциальных уравнениях было обусловлено непосредственно потребностями практики в широком смысле, при создании же «Интегрального исчисления» для Эйлера весьма существенной была проблема логической систематизации всех полученных результатов. Поэтому в первом томе «Интегрального исчисления» сначала рассматриваются отдельные типы нелинейных уравнений первого порядка. Некоторые из этих результатов Эйлера не освещаются в современных курсах и справочниках.

III. Метод интегрирующего множителя

В работе «О дифференциальных уравнениях второго порядка»⁶³ Эйлер впервые в теории дифференциальных уравнений ставит задачу о частичном интегрировании уравнений второго порядка, т. е. задачу о нахождении, по современной терминологии, первых интегралов. Для ее решения он использует метод интегрирующего множителя.

Основным содержанием работы является нахождение первых интегралов с помощью интегрирующих множителей различного вида. Предварительно указаны общие формы дифференциальных уравнений различных порядков и сделана попытка классифицировать интегрирующие множители. Выражения, приведенные Эйлером (впервые в теории дифференциальных уравнений), совпадают с нормальной формой уравнений, по современным определениям. Например, в качестве общей формы уравнения второго порядка он указывает уравнения

$$q = f(x, y, p); \quad dy = p dx; \quad dp = q dx.$$

Схема классификации интегрирующих множителей такова: если P , Q и R обозначают некоторые функции x и y , то множителем первого порядка является P , второго порядка — $P dx + Q dy$, третьего порядка — $P dx^2 + Q dx dy + R dy^2$.

Приведем некоторые из результатов этой работы.

Теорема 1. Уравнение

$$ad^2y - \frac{amy^2}{y} + y^n dx^2 (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

при произвольных постоянных n , m , α , β , γ становится интегрируемым, если обе его части умножить на

$$\frac{(\beta + \gamma x) dx}{(m-1) y^{2m-1}} + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma^2) dx}{y^{2m}}.$$

При $u = 2$ можно взять множитель не второго, а первого порядка.

⁶³ L. Euler. De aequationibus differentialis secundi gradus. — Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 7, 1756—1759 (1761), p. 165—202.

Теорема 2. Уравнение

$$d^2y + \frac{ay^{m+1}dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2 + cy^2)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

интегрируется с помощью множителя

$$-ydx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2).$$

Для уравнения

$$d^2y + \frac{mdy^2}{y} - \frac{axdx^2}{y^2} = 0$$

дается построение интегрирующего множителя третьего порядка.

Решение обратной задачи, относящейся к случаю линейного уравнения, заключается в следующем. Найти уравнение

$$d^2y + Pdx dy + Qy dx^2 = 0,$$

допускающее интегрирующий множитель вида $Mydx + Ndy$, где P, Q, M, N — функции от x .

Сделав подстановку $y = R(x)u$, Эйлер замечает, что заданная форма множителя приобретает выражение $S(x)du$, а искомое уравнение можно записать в виде

$$d^2u + Pdx du + \frac{U(u)}{S} dx^2 = 0.$$

Умножив это уравнение на Sdu и учитывая первое и третье слагаемые в левой части уравнения

$$Sdu d^2u + PSdx du^2 + Udx^2 du = 0,$$

Эйлер ищет первый интеграл в виде

$$\frac{1}{2} Sdu^2 + dx^2 \int Udu = \frac{1}{2} Cdx^2,$$

что приводит к очевидному необходимому условию

$$\frac{1}{2} dSdu^2 = PSdx du^2; \quad Pdx = \frac{dS}{2S}.$$

Итак, при произвольных функциях $S(x)$ и $U(x)$ интегрирующим множителем уравнения

$$d^2u + \frac{1}{2} \cdot \frac{dSdu}{S} + \frac{Udx^2}{S} = 0$$

является Sdu и один из первых интегралов уравнения определяется равенством

$$Sdu = dx^2 \left(C - 2 \int Udx \right).$$

Отсюда Эйлер легко получает следствие: уравнение

$$Rd^2y - yd^2R + \frac{dx^2}{R^2} f\left(\frac{y}{R}\right) = 0$$

при произвольных функциях $R = R(x)$ и $f = f\left(\frac{y}{R}\right)$ допускает интегрирующий множитель $Rdy - ydR$. Это, в свою очередь, позволяет установить, что уравнение

$$d^2y + \frac{V\left(\frac{y}{R}\right)}{R^3} dx^2 = 0,$$

где

$$R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$$

(α, β, γ — постоянные), допускает интегрирующий множитель

$$\mu = (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2) dy - (\beta + \gamma x) y dx.$$

8

Теория линейных дифференциальных уравнений

В работах Эйлера по теории линейных дифференциальных уравнений особенно отчетливо проявилась характерная черта его творчества — единство теории и практики. Для Эйлера исследование линейных задач механики и физики было важнейшим стимулом в развитии теории линейных уравнений, а новые результаты в его прикладных работах развивали эту теорию. В частности, в работах о распространении колебаний в упругой среде содержатся результаты об интегрировании линейных систем с постоянными коэффициентами, не вошедшие в специальные сочинения Эйлера о дифференциальных уравнениях. В работах же о распространении звука Эйлер решает некоторые линейные системы в частных производных второго порядка.

Достижения предшественников Эйлера в области изучения линейных уравнений были весьма скромными и относились, главным образом, к уравнениям первого порядка. Исследования Эйлера в этой области представлены, в основном, четырьмя циклами работ. Первый цикл — это многочисленные работы, содержащие решения разнообразнейших линейных задач механики и физики. Большая часть их приходится на вторую четверть XVIII в. Особое внимание в этих работах Эйлер уделяет проблеме малых колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы.

Вслед за двумя томами «Механики»⁶⁴, где впервые даны аналитические методы динамики точки и, в частности, рассмотрены колебательные движения в сопротивляющейся среде, следует серия работ о колебаниях сложных маятников, колебаниях тяжелой нити, морских приливах и отливах, распространении колебаний в упругой среде.

⁶⁴ L. E u l e r. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Т. 1, 2. Petropoli, 1736.

В этих исследованиях Эйлер приходит к методам интегрирования не только однородных и неоднородных линейных уравнений второго порядка, но и линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Второй цикл составляют первые теоретические работы Эйлера о линейных уравнениях с переменными коэффициентами, выполненные, в основном, до 1743 г.

Третий цикл — специальные работы о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами. Это в первую очередь основной мемуар Эйлера «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков»⁶⁵ и работа «О распространении колебаний упругой средой»⁶⁶, в которой он обобщает свой классический метод на случай линейных систем.

Работы четвертого цикла посвящены дальнейшему исследованию линейных уравнений с переменными коэффициентами. Начинается этот цикл мемуаром «Метод дифференциальных уравнений высших порядков»⁶⁷ и заканчивается работами о сопряженных уравнениях, представляющими собой развитие результатов Лагранжа.

Рассмотрим исследования Эйлера по теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Особенно важную роль в развитии этой теории сыграл его мемуар «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков». Заслуга Эйлера состоит в том, что он нашел действительно основной путь развития этой отрасли математики.

Впервые об интегрировании однородных линейных уравнений высшего порядка с помощью решения соответствующего алгебраического уравнения Эйлер сообщил И. Бернулли в письме от 15 сентября 1739 г. Однако И. Бернулли, как следует из его письма (декабрь 1739 г. и апрель 1740 г.), не смог должным образом оценить силу этого нового метода. Значение эйлеровского мемуара не ограничивается рамками теории линейных уравнений. Уже в самом начале сочинения впервые вводятся такие принципиально важные понятия всей теории дифференциальных уравнений, как «полный интеграл», или «полное интегральное уравнение» (*aequatio integralis completa*), и «частный интеграл», или «частное интегральное уравнение» (*aequatio integralis particula*). Учитывая важность этих понятий, а также то, что они вводятся впервые, Эйлер весьма тщательно разъясняет их смысл и дополняет определения множеством примеров.

Приступая к изучению уравнения

$$0 = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots,$$

Эйлер прежде всего выясняет вопрос о числе произвольных постоянных, которые могут входить в решение: «Если бы мы имели уравнение порядка n ,

⁶⁵ L. Euler. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. — *Miscelanea Berolinensia*. V. 7, 1743, p. 193—242.

⁶⁶ L. Euler. De propagatione pulsuum per medium elasticum. — *Novi Comm. Acad. sci. Petropol.* T. 1, 1747—1748 (1750), p. 67—105.

⁶⁷ L. Euler. Methodus aequationes differentiales altiorum graduum. — *Novi Comm. Acad. sci. Petropol.* T. 3, 1750—1751 (1753), p. 3—35.

то его последний член был бы $N \frac{d^2 y}{dx^n}$, посредством одной интеграции оно сводится к уравнению порядка $n - 1$ и т. д. После интегрирований приходим, следовательно, к интегральному уравнению». Отсюда и следует определение: полное интегральное уравнение должно заключать такое число новых постоянных, которому равен порядок уравнения; если же постоянных меньше, то это частный интеграл.

Один из поясняющих эти определения примеров Эйлер использовал значительно позже в первом томе «Интегрального исчисления»:

$$a^2 dy + y^2 dx = (a^2 + x^2) dx.$$

Это уравнение удовлетворяется при $y = x$, и так как решение не зависит ни от постоянной, имеющейся в уравнении, ни от новой постоянной, то оно не является полным интегралом. Не приводя вычислений, Эйлер находит полный интеграл

$$y = x + \frac{a^2 b e^{-\frac{x^2}{a^2}}}{a^2 + b \int e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx},$$

из которого при $b = 0$ получает частный интеграл $y = x$. Весьма характерно, что он называет $y = x$ частным интегралом лишь тогда когда показано, что это решение возникает из полного интеграла при частном значении произвольной постоянной. Позже, в «Интегральном, исчислении», при рассмотрении особых решений (по современной терминологии) он уточняет свое определение частного интеграла, требуя, чтобы «конечное уравнение» $y = \varphi(x)$ не только удовлетворяло дифференциальному уравнению, но и получалось из полного интеграла.

Основы своего метода Эйлер излагает в § 12 мемуара, отмечая предварительно, что исходным пунктом для него послужил метод понижения порядка, изложенный им в работе 1728 г. Он приводит выражения последовательных производных для $y = e^{\int p dx}$. После подстановки $y = e^{\int p dx}$ и сокращения на $e^{\int p dx}$ получает уравнение порядка $n - 1$. Но если принять, что p — постоянное, — пишет Эйлер, — то его дифференциалы исчезнут и, следовательно, при этом предположении получится такое алгебраическое уравнение:

$$0 = A + Bp + Cp^2 + \dots + Np^n.$$

Если отсюда найти p , то сразу будем иметь частное решение $y = e^{px}$.

Прежде чем перейти к реализации этого результата для построения полного интеграла, Эйлер как бы стремится подчеркнуть алгоритмичность метода и замечает, что из алгебраического уравнения $0 = A + Bz + Cz^2 + \dots$, в свою очередь, возникает дифференциальное уравнение, если только вместо z^0 берется y , вместо z — $\frac{dy}{dx}$ и вместо

$z^k - \frac{d^k y}{dx^k}$. Поэтому для каждого множителя алгебраического уравнения можно получить дифференциальное уравнение, которое необходимо содержится в исходном дифференциальном уравнении.

Далее исследуется множество конкретных уравнений второго порядка. Специально рассматриваются случаи мнимых и кратных корней. Так, исходя из алгебраического двучлена $(p - qz)^2$, являющегося по предположению «делителем алгебраического уравнения», Эйлер сначала строит отвечающее этому делителю дифференциальное уравнение

$$p^2 y - \frac{2pq dy}{dx} + \frac{q^2 d^2 y}{dx^2} = 0,$$

а затем, следуя своему методу вариации постоянных, полагает $y = e^{\frac{px}{q}} u$. В результате он приходит к уравнению $d^2 u = 0$, откуда и получает решение для случая кратных корней в виде

$$y = (\alpha + \beta x) e^{\frac{px}{q}}.$$

В качестве «проблемы 1» Эйлер излагает построение общего (по его терминологии, полного) интеграла для уравнения n -го порядка

$$0 = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + N \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Случай кратных корней он исследует, подобно предыдущему случаю для $n = 2$. Для k -кратного множителя $(q - pz)^k$ Эйлер строит соответствующее дифференциальное уравнение с неизвестной функцией y , полагая $y = e^{\frac{qx}{p}} u$. Функцию u он находит из уравнения $u^{(k)} = 0$, что и дает искомое решение

$$y = e^{\frac{qx}{p}} (\alpha + \beta x + \dots + \kappa x^{k-1}).$$

Исследование случая комплексных корней имело исключительно важное значение для развития всего анализа, так как в нем Эйлер детально рассматривает соотношения между тригонометрическими и показательными функциями

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

вошедшие в науку как формулы Эйлера.

Случай комплексных корней рассматривается сначала также для $n = 2$. Пары комплексно-сопряженных корней трехчлена $p + qz + rz^2$ ставится в соответствие трехчлен

$$p - 2z \sqrt{pr \cos \varphi} + rz^2,$$

где

$$-\cos \varphi = \frac{q}{2\sqrt{pr}}.$$

В силу комплексности корней, $q^2 < 4pr$ и, следовательно, $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$.
Этому трехчлену, в свою очередь, ставится в соответствие дифференциальное уравнение

$$0 = py - 2\sqrt{pr} \cos \varphi \frac{dy}{dx} - r \frac{d^2y}{dx^2},$$

которое интегрируется сначала с помощью подстановки $y = e^{fx \cos \varphi} u$, где $f = \sqrt{\frac{p}{r}}$ (выбор подстановки определен требованием обращения в нуль коэффициента при u). В результате этой замены получается уравнение относительно u :

$$ru'' + p(1 - \cos^2 \varphi)u = 0, \text{ или } d^2u + f^2 u dx^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Умножение полученного уравнения на $2du$ и интегрирование приводит к уравнению первого порядка

$$f^2 u^2 dx^2 \sin^2 \varphi + du^2 = \alpha^2 f^2 dx^2 \sin^2 \varphi$$

(правая часть введена как произвольная постоянная, так как $\varphi = \text{const}$). Отсюда

$$f dx \sin \varphi = \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}};$$

$$fx \sin \varphi + \beta = \arcsin \frac{u}{\alpha} \quad (\beta = \text{const}).$$

Следовательно,

$$u = \alpha \sin (fx \sin \varphi + \beta);$$

$$y = \alpha e^{fx \cos \varphi} \sin (fx \sin \varphi + \beta),$$

где α и β — произвольные постоянные.

Далее (§ 22) Эйлер решает это же уравнение с помощью корней характеристического уравнения

$$0 = p - 2z\sqrt{pr} \cos \varphi + rz^2;$$

$$z = f \cos \varphi \pm \sqrt{f^2 \cos^2 \varphi - f^2},$$

или

$$z = f \cos \varphi \pm if \sin \varphi.$$

Но отсюда сразу же следует, что

$$y = e^{fx \cos \varphi + if \sin \varphi},$$

$$y = e^{fx \cos \varphi - if \sin \varphi},$$

или

$$y = e^{fx \cos \varphi} (\eta e^{if \sin \varphi} + \vartheta e^{-if \sin \varphi}),$$

где η и ϑ — произвольные постоянные. Множители при η и ϑ можно разложить в сходящиеся ряды:

$$y = e^{fx \cos \varphi} \left[(\eta + \vartheta) \left(1 - \frac{f^2 x^2 \sin^2 \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{f^4 x^4 \sin^4 \varphi}{4!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + i (\eta - \vartheta) \left(fx \sin \varphi - \frac{f^3 x^3 \sin^3 \varphi}{3!} + \dots \right) \right].$$

Полагая $\eta + \vartheta = \alpha$, $(\eta - \vartheta) i = \beta$ и беря суммы рядов, Эйлер получает решение

$$y = e^{fx \cos \varphi} [\alpha \cos (fx \sin \varphi) + \beta \sin (fx \sin \varphi)],$$

которое легко сводится к решению, найденному выше. В § 23 даны ссылка на этот результат и общая формула

$$e^{ifx \sin \varphi} \eta + e^{-ifx \sin \varphi} \vartheta = \alpha \cos (fx \sin \varphi) + \beta \sin (fx \sin \varphi).$$

В частности, если $\vartheta = 0$ и $\eta = 1$, то $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и, следовательно,

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

где $k = f \sin \varphi$. В этом и следующем параграфах изучаются случаи кратных комплексных корней.

Все дальнейшее содержание связано с рассмотрением частных случаев уравнения n -го порядка

$$0 = y - \frac{d^m y}{dx^m}; \quad 0 = y + \frac{2bd^m y}{dx^m} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}, \dots$$

Новая идея в изучении теории линейных уравнений с переменными коэффициентами развита Эйлером в работе об интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка⁶⁸. Она заключается в нахождении решений уравнений второго порядка в виде определенных интегралов, подынтегральная функция которых зависит от одного или нескольких параметров. Этот метод Эйлера нашел широкое применение в XIX в. в математической физике.

Предметом изучения в этой работе Эйлера является довольно общее линейное уравнение

$$Aydu^2 + (B + Cu) du dy + (D + Eu + Fu^2) d^2 y = 0. \quad (22)$$

Решение строится в виде определенного интеграла, зависящего от параметра u . Пределы интегрирования, как и почти всюду у Эйлера, у знака интеграла не ставятся, их значения указываются дополнительно. В данном случае нахождение этих пределов является, по сути, основной задачей.

Сначала Эйлер, желая подчеркнуть общность уравнения (22), сводит его подстановкой $y = e^{\int z dx}$ к уравнению первого порядка

$$dz + \frac{(B - Cu) z du}{D + Eu + Fu^2} + z^2 du + \frac{A du}{D + Eu + Fu^2} = 0$$

⁶⁸ L. Euler. Constructio aequationis differentio-differentialis...— Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 8, 1760—1761 (1763), p. 150.

и отмечает, что частным случаем полученного уравнения является уравнение Риккати. Однако все дальнейшее исследование он проводит для первоначального уравнения (22).

Неизвестную функцию Эйлер ищет в виде интеграла (определенного)

$$y = \int P(x) (u + x)^n dx,$$

где пределы интегрирования не зависят от u . Определение этих пределов и нахождение функции $P(x)$ является основным содержанием работы.

Метод параметрических интегралов Эйлер детально иллюстрирует на примере уравнения

$$(a^2 - u^2) \frac{d^2 y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} - 2y = 0,$$

напоминающего при $a = 1$ уравнение Лежандра.

Дальнейшее развитие этот метод получил во втором томе «Интегрального исчисления», где Эйлер дает, в частности, четыре варианта решения весьма нетривиальной задачи: найти решение уравнения

$$(a + bx^n) x^2 y'' + (c + ex^n) xy' + (f + gx^n) y = 0$$

в виде определенного интеграла, зависящего от параметров.

9

Методы приближенного решения дифференциальных уравнений

В работах Эйлера по небесной механике получил дальнейшее развитие метод бесконечных рядов. Наряду с разложениями по степеням независимого переменного Эйлер применил разложение по степеням малого параметра, а вместе со степенными рядами для приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений — тригонометрические ряды. В специальной и историко-математической литературе проблема разложения заданных функций в тригонометрические ряды связывается обычно лишь с задачами математической физики, главным образом с задачей о колебаниях струны. Менее известно, что в двух работах, посвященных определению коэффициентов разложения заданной функции в неполные тригонометрические ряды, Эйлер указывает важность этой проблемы для теоретической астрономии.

Создание методов приближенного анализа стимулировала также математическая физика. Проблема колебаний различных механических систем с бесконечным числом степеней свободы способствовала не только развитию теории гиперболических уравнений, но и получению первых результатов в решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. К этим результатам относится, в частности, метод,



Л. Эйлер.

предложенный Эйлером для приближенного определения первых корней цилиндрической функции нулевого порядка первого рода.

Классический метод ломаных Эйлера общеизвестен. Однако совокупность его результатов, относящихся к усовершенствованию этого метода, известна значительно меньше. Основной результат изложен в первом томе «Интегрального исчисления».

Для заданного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = V$, где V — некоторая функция x и y , Эйлер находит приближенно полный интеграл. Ставя вопрос о нахождении общего метода, дающего приближенное решение задачи с произвольными начальными условиями, он предвосхищает постановку Коши задачи с начальными условиями как одной из основных задач теории. Решение дается по «методу ломаных». Эйлер указывает, что этот метод распространяется на уравнения второго порядка, и дает фактически схему применения его для любой системы вида

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2); \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Существенным результатом Эйлера является применение разложений по степеням малого параметра. Этот метод был подсказан самим

содержанием задач небесной механики, в которых эксцентриситеты планетных орбит, наклоны орбит к плоскости эклиптик и действия сил тяготения соседних планет представляют собой весьма малые величины. В работе «Новый метод определения движений планет»⁶⁹ Эйлер, выбирая наиболее удобную систему прямоугольных координат с началом в центре Солнца при исследовании планетарного движения, приходит после упрощения к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} - n^2(1+x^2) &= \frac{-n^2(1+x)}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{-n^2y}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где x и y — декартовы координаты планеты в момент t ; $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$; a — среднее расстояние планеты от Солнца. В выбранной системе координат y^2 весьма мало по сравнению с $1+x^2$.

Приближенное интегрирование Эйлер проводит таким образом: сначала раскладывает в ряд общий множитель правых частей уравнений (23)

$$\frac{1}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}},$$

затем раскладывает члены

$$\frac{1}{(1+x)^2}; \quad \frac{1}{(1+x)^5}; \quad \dots$$

и, заменяя nt на ξ , сохраняет в правых частях преобразованных уравнений члены до шестого порядка.

Приближенное решение полученной довольно сложной системы уравнений Эйлер строит в виде разложения неизвестных функций x и t по степеням малого параметра, которым в данном случае является эксцентриситет орбиты e (в самих уравнениях системы e отсутствует):

$$x = eP + e^2Q + e^3R + \dots;$$

$$y = ep + e^2q + e^3r + \dots,$$

где $P, p, Q, q, R, r, \dots$ — неизвестные функции от ξ , подлежащие определению. Эти функции он определяет с точностью до порядка максимальной степени e . Сохраняя члены только первого и второго порядков, Эйлер при помощи метода неопределенных коэффициентов получает линейную систему

$$\frac{d^2P}{d\xi^2} - \frac{2dp}{d\xi} = 3P,$$

⁶⁹ L. Euler. Nova methodus motum planetarum determinandi. — Acta Acad. sci. Petropol. T. 2, 1778 (1781), p. 277—302.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p}{d\xi^2} + \frac{2dP}{d\xi} &= 0, \\ \frac{d^2 Q}{d\xi^2} - \frac{2dq}{d\xi} &= 3Q - 3P^2 + \frac{3}{2} p^2, \\ \frac{d^2 q}{d\xi^2} + \frac{2dQ}{d\xi} &= 3Pp.\end{aligned}$$

Первые два уравнения образуют довольно простую самостоятельную систему. Аналогичные системы он последовательно выписывает при учете членов до шестого порядка включительно и затем дает алгоритмический способ последовательного решения всех систем. С этой целью Эйлер решает «общую проблему», заключающуюся в интегрировании системы

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Z}{d\xi^2} - 2 \frac{dz}{d\xi} &= 3Z - M(\xi), \\ \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2 \frac{dZ}{d\xi} &= N(\xi),\end{aligned}$$

где $M(\xi)$ и $N(\xi)$ — известные функции.

Необходимость решения ряда вопросов теоретической астрономии и математической физики привела Эйлера к применению для приближенного решения дифференциальных уравнений тригонометрических рядов. В работе «Простой метод получения рядов...»⁷⁰ он писал, что в теоретической астрономии все аналитические выражения представляются такими рядами, члены которых суть синусы или косинусы кратных углов. При изучении регулярного движения планет, указывал далее Эйлер, расстояние планеты от Солнца $S = \frac{b}{1 + e \cos \varphi}$ и время ее движения, выражаемое интегралом $\int \frac{d\varphi}{1 + e \cos^2 \varphi}$, следует представить тригонометрическим рядом

$$A + B \cos \varphi + C \cos 2\varphi + D \cos 3\varphi + \dots,$$

а при изучении нерегулярного движения планет в подобные ряды следует раскладывать и более сложные выражения, в частности $(1 + a \cos \varphi)^{-3/2}$, $(1 + a \cos \varphi)^{-5/2}$ и т. д.

Содержание некоторых астрономических работ Эйлера показывает, что в его время задача о разложении заданной функции в тригонометрический ряд была актуальной в связи с решением задач теоретической астрономии.

В мемуаре, посвященном вопросу определения коэффициентов тригонометрических разложений, Эйлер дает способ приближенного определения этих коэффициентов, основанный на идее тригонометрического интерполирования. Суть способа заключается в следующем. Пусть

$$\Gamma(\varphi) = A + B \cos \varphi + C \cos 2\varphi + D \cos 3\varphi + \dots$$

⁷⁰ L. Euler. Methodus facilis inveniendi series...— Nova Acta Acad. sci. Petropol. T. 11, 1793 (1798), p. 94—113.

Определив $\Gamma(0)$, $\Gamma(\pi)$ и $\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$, Эйлер получает равенство

$$\frac{1}{4}\Gamma(0) + \frac{1}{4}\Gamma(\pi) + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = A + E + I + N + \dots,$$

на основании которого делает вывод, что значение A становится известным, если пренебречь значениями E, I, N ... Скачок от A до E можно увеличить, если воспользоваться равенством

$$\frac{1}{8}[\Gamma(0) + \Gamma(\pi)] + \frac{1}{4}\left[\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) + \Gamma\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = A + I + R + \dots$$

Поскольку, заключает далее Эйлер, он пренебрегает меньшими членами, то значение A в этом случае будет определено более точно, чем раньше.

Вслед за этим мемуаром была опубликована работа Эйлера, содержащая интегральные представления коэффициентов тригонометрических рядов. Основная теорема сформулирована так: если функция Φ некоторого угла φ представляется рядом

$$\Phi = A + B \cos \varphi + C \cos 2\varphi + D \cos 3\varphi + \dots,$$

то количества $A, B, C, \dots$ определяются интегральными формулами

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi d\varphi; \quad B = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi \cos \varphi d\varphi; \quad C = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi \cos 2\varphi d\varphi \text{ и т. д.}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично современному, на основе свойства ортогональности системы функций

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \dots$$

Сходимость найденного ряда Эйлер не исследует.

10

Элементы теории особых решений

Известно, что вопрос об особых точках решения дифференциальных уравнений и особых решениях этих уравнений — один из самых сложных в современной теории. Сложность в значительной степени связана с проблемой единственности решения задачи с начальными условиями.

При первом ознакомлении с изложением вопроса у Эйлера может возникнуть недоумение. Есть основания утверждать, что в его произведениях нет термина «особое решение». Но изучение некоторых работ Эйлера по механике и его исследований частных интегралов дифференциальных уравнений показывает, что в них изучаются не только некоторые решения, являющиеся особыми, по современной терминологии,

но и случаи нарушения в отдельных точках единственности решения задач с начальными условиями. Важнейшие результаты Эйлера по этой проблеме изложены во втором томе его «Механики», в мемуаре «Размышления о парадоксах интегрального исчисления» и в первом томе «Интегрального исчисления».

Решение одной из задач динамики точки привело Эйлера к задаче с начальным условием $u(0) = 0$ для уравнения

$$(k^2 + 1) dx - k^2 du = \frac{\sqrt{a^2 x (1 + k^2) - k^2 u}}{\sqrt{u}} du,$$

где k — постоянная; a — параметр ($a > 0$). Решив это уравнение относительно $\frac{du}{dx}$, получим

$$\frac{du}{dx} = \frac{(k^2 + 1) \sqrt{u}}{\sqrt{a^2 x (1 + k^2) - k^2 u} + k^2 \sqrt{u}}.$$

Точка $(0, 0)$ является, по современному определению, особой. Характер ее зависит от параметра a .

Для случая $a < 1$ Эйлер получил решение задачи в виде

$$C (\sqrt{a^2 (k^2 + 1) x - k^2 u} + A \sqrt{u})^{-\pi} = (\sqrt{a^2 (k^2 + 1) x - k^2 u} + B \sqrt{u})^{\rho},$$

где A, B и $\rho > 0$; $\pi < 0$, на основании которого сделал вывод, что начальное условие $u(0) = 0$ удовлетворяется при любом значении произвольной постоянной C . Установив наличие бесконечного количества решений, он указал, что для получения однозначного решения необходимо дополнительно уточнить постановку самой механической задачи.

Особый интерес представляет детальное исследование Эйлером случая, который приводит к двум решениям этой же задачи:

$$u_1 = x; \quad u_2 = \frac{k^2 + 1}{k^2} x.$$

Решение u_2 , отмечает Эйлер, возникает из «интегрального уравнения» (термин «полный интеграл» введен Эйлером позже). Действительно, при $a = 1$ уравнение приобретает вид

$$\frac{(k^2 + 1) dx - k^2 du}{\sqrt{(k^2 + 1) x - k^2 u}} = \frac{du}{\sqrt{u}}$$

и приводит к полному (т. е. общему) интегралу,

$$\sqrt{(k^2 + 1) x - k^2 u} = \sqrt{u} + C,$$

который при начальном условии $u(0) = 0$ дает лишь частное решение $u_1 = x$. К решению $u_2 = \frac{k^2 + 1}{k^2} x$ Эйлер приходит обходным, громоздким и не строгим путем: сначала находит решение, соответствующее значению $a > 1$, а затем принимает в этом решении $a = 1$. Он отмечает механическое содержание обоих решений задачи с начальным условием. Решение u_2 , как легко заметить, является особым, по современному определению. На основании этого результата Эйлер делает некоторое обобщение и фактически дает один из способов нахождения

особых решений. Пусть дано уравнение $\frac{dt}{T} = Vdu$, где $T = T(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, а V — заданная функция от u . Эйлер указывает, что наряду с интегралом

$$\int \frac{dt}{T} = \int Vdu$$

уравнение удовлетворяется решением $t \equiv 0$, которое не может быть найдено из полного интеграла.

Наличие дифференциальных уравнений, полные интегралы которых не исчерпывают всех решений этих уравнений, казалось Эйлеру одним из «парадоксов интегрального исчисления». Другим парадоксом этого исчисления он считал метод решения дифференциальных уравнений при помощи известного приема дифференцирования, примененного раньше А. Клеро. Эти вопросы были предметом указанного исследования Эйлера «Размышления о некоторых парадоксах интегрального исчисления». В нем рассмотрены задачи геометрического характера, которые сводятся к решению уравнений Клеро. Эйлер определяет особые решения всех этих уравнений, но не отмечает, что они представляют собой огибающие семейств прямых, образующих полный интеграл. При этом он не скрывает своего удивления, что «полный интеграл» не всегда оказывается «полным», и даже считает, что возможность подобных случаев противоречит обычным представлениям о самих принципах анализа.

Эйлер стремится защитить анализ от упреков в несовершенстве, но полностью это сделать ему не удастся. Его попытки сводятся к строгому разделению частных и особых решений, по современной терминологии. В понятие «полного интеграла», или «полного интегрального уравнения», он включает лишь решения, получающиеся в процессе интегрирования, при определенных значениях произвольных постоянных. Эйлер указывает, что в своей «Механике» он дал надежное правило для нахождения решения, которое не получается из «интегрального уравнения».

Предыдущий результат теперь можно сформулировать в несколько более общей форме. Пусть $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $V = V(x, y)$, $z = z(x, y)$ — заданные функции указанных аргументов и дано дифференциальное уравнение

$$Vdz = z(Pdx + Qdy).$$

Если z найдено из уравнения $Z(z) = 0$, то оно, очевидно, удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и не может быть, вообще говоря, получено из полного интеграла.

В первом томе «Интегрального исчисления» Эйлер развил этот вопрос. Ему удалось установить первый, сравнительно общий, критерий различия частных и особых интегралов⁷¹. В основе этого исследования лежит идея применения расходящихся несобственных интегралов, используемая и в современной теории дифференциальных уравнений.

⁷¹ Н. И. С и м о н о в. О научном наследии Эйлера в области дифференциальных уравнений. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954, стр. 513—595.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ТРУДЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ГЕОМЕТРИИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1

Теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Зарождение теории дифференциальных уравнений в частных производных и начальный этап ее развития как самостоятельного раздела математического анализа были обусловлены потребностями естествознания и геометрии.

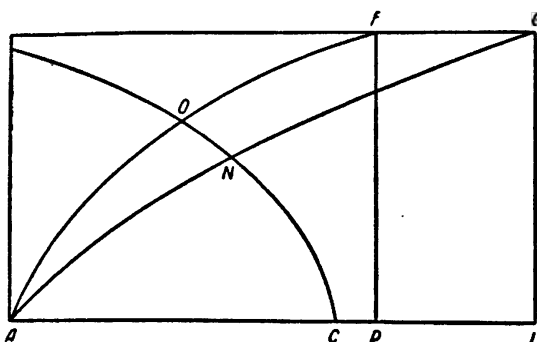
Первые исследования интегрирования простейших уравнений в частных производных первого порядка у Эйлера связаны с изучением однопараметрических систем плоских кривых. В «Комментариях» Петербургской академии наук (т. 7, 1740) напечатаны две статьи Эйлера — «О бесконечном количестве кривых одного и того же вида» и «Дополнения к исследованию о кривых одного и того же вида», — сыгравшие существенную роль в развитии анализа в узком смысле слова, а также в развитии метода интегрирующего множителя. В них дана постановка, правда еще в нечеткой форме, простейших задач с частными производными первого порядка.

Чтобы выяснить источники основных аналитических задач, рассмотренных Эйлером в этих статьях, проанализируем некоторые его труды о спрямлении дуг эллипсов. В одном из них¹ поставлена следующая задача. В плоскости задано однопараметрическое семейство эллипсов. Параметром является одна из их осей, другая ось фиксирована. Найти такую кривую, чтобы отрезки дуг эллипсов, которые отсекаются ею от вершины A этих эллипсов, были равны между собой: $AO = AN$ (см. рисунок).

Обозначив параметр (модуль, по Эйлеру) семейства через a , фиксированную полуось — через c и используя уравнение семейства эллипсов, а также выражение для дифференциала длины дуги эллипса, Эйлер получил «модулярное» уравнение, являющееся дифференциальным уравнением второго порядка относительно ординаты z этой кривой, как функции параметра a :

$$\frac{dz^2}{da^2} = \frac{z}{a^2 - c^2} - \frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)a} \cdot \frac{dz}{da}.$$

¹ L. Euler. *Solutio problematum rectificationem...* — *Comm. Acad. sci. Petropol.* T. 8, 1736 (1741), p. 98.



Чертеж к задаче о спрямлении дуг эллипсов.

Это уравнение он свел своими подстановками к уравнению Рикати.

Общую задачу Эйлер решает так: «Если я придаю модулю a определенное значение, то возникает уравнение $dz = Pdx$, для которого существует множество кривых, получающихся одним и тем же способом при других значениях a . Но если на этих кривых должны быть выделены точки в зависимости от рассматриваемой проблемы, то уравнение

$z = \int Pdx$ недостаточно и требует уравнения со знаком суммирования (т. е. со знаком интеграла), которое включает количество a не только алгебраически, но и со знаком дифференциала»². Отсюда вытекает основное определение Эйлера: «Поэтому из данного дифференциального уравнения для одной кривой $dz = Pdx$, в котором a рассматривается как постоянное, надо найти дифференциальное уравнение, в котором a было бы переменным и таким, чтобы оно (т. е. дифференциальное уравнение. — *Ред.*) было модулярным».

Эйлер начинает рассуждения простейшим случаем $P = P(x, a)$ и формулирует задачу, используя понятие дифференциала: «Итак, находим теперь дифференциал выражения $\int Pdx$, если a трактуется переменным и нахождение dx равнозначно установлению модулярного уравнения.

Однако дифференциал dz имеет форму $Pdx + Qda$; отсюда следует, что модулярное уравнение будет $dz = Pdx + Qda$, если значение Q станет известным. При этом для построения модулярного дифференциального уравнения относительно z , как функции параметра a , наряду с уравнением $dz = Pdx + Qda$, следует учитывать заданную зависимость между неизвестными кривыми и кривыми однопараметрического семейства, заданного (исходным) уравнением (т. е. уравнением $dz = P(x, a)dx + Q(x, a)da$). При этом следует x заменить на такую функцию $x = x(a)$, которая определена характером задачи».

Следовательно, основной аналитической задачей является нахождение полного дифференциала dz , если z задано уравнением $z = \int Pdx$, где P — заданная функция от x и a . Решая эту задачу, Эйлер выводит «очевидную» формулу

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \int \frac{\partial P}{\partial a} dx.$$

Для этого он обосновывает предыдущую теорему о независимости результата повторного дифференцирования от порядка дифференцирования,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial a} = \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial x},$$

² L. Euler. Solutio problematum rectificationem..., p.99.

и приводит доказательство, «основанное на природе дифференциала» (под дифференциалом он понимает приращение функции).

Чтобы найти полный дифференциал dz для $z = \int P(x, a) dx$, Эйлер рассуждает так. По определению, дифференциал dz имеет вид $Pdx + Qda$, где Q — неизвестная функция от x и a . Пусть теперь

$$dP = Adx + Bda; \quad (1)$$

$$dQ = Cdx + Dda. \quad (2)$$

Дифференцируя z при постоянном x , он получает выражения Qda , дифференциал которого по x при постоянном a равен, согласно выражению (2), $Cdadx$. Дифференцируя z сначала по x , а затем по a , согласно выражению (1), — получает $Bdadx$. Согласно теореме о независимости результата от порядка дифференцирования, $B = C$, следовательно, $dQ = Bdx + Dda$, откуда $Q = \int Bdx$, если в этом интеграле a рассматривается как постоянная. Но B находится из заданного выражения P , так как, согласно выражению (1), $B = \frac{\partial P}{\partial a}$. Частные производные Эйлер обозначает скобками:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \left(\frac{dP}{da} \right).$$

Следовательно,

$$dz = Pdx + Qda = Pdx + \int Bdx = Pdx + \int \frac{\partial P}{\partial a} dx.$$

Это означает, что доказана формула дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{\partial}{\partial a} \int P(x, a) dx = \int \frac{\partial P}{\partial a} dx.$$

В работе «Дополнения к исследованиям о кривых одного и того же вида» Эйлер ставит и решает задачи, относящиеся к уравнениям в частных производных первого порядка. В предыдущей работе исходным было соотношение $z = \int P(x, a) dx$ при заданной функции $P(x, a)$, здесь же постановка задачи изменена.

Пусть

$$dz = P(x, a) dx - P(x, a) \frac{x}{a} da,$$

где $P(x, a)$ — неизвестная функция. Задача заключается в отыскании «максимально общего значения P », при котором правая часть уравнения интегрируется, иными словами — в отыскании общего выражения интегрирующего множителя для

$$dx - \frac{x}{a} da.$$

Прежде всего Эйлер замечает, что выражение $dx - \frac{x}{a}da$ становится интегрируемым после умножения на $\frac{1}{a}$, его интеграл равен $\frac{x}{a} + c$, где c — постоянная, не зависящая от a . Действительно,

$$\frac{dx}{a} - x \frac{da}{a^2} = \frac{adx - xda}{a^2} = d\left(\frac{x}{a} + c\right).$$

Поэтому он делает вывод: если $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ обозначает какую-нибудь функцию от $\frac{x}{a} + c$, то выражение $dx - \frac{x}{a}da$ будет интегрируемым при умножении его на $\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$. Следовательно, общее значение будет $P = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ и $Q = \frac{Px}{a}$ (Q — коэффициент при da).

Таким образом, при заданном $Q = -P\frac{x}{a}$, где P — интегрирующий множитель выражения $dx - x\frac{da}{a}$, Эйлер определяет общие выражения $Q = \frac{\partial z}{\partial a}$ и $P = \frac{\partial z}{\partial x}$, а также $z = z(x, a)$. Действительно, при найденных P и Q

$$dz = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)dx - \frac{1}{a^2}f\left(\frac{x}{a} + c\right)xda = d\left[\frac{1}{a}F\left(\frac{x}{a} + c\right)\right],$$

если

$$F'\left(\frac{x}{a} + c\right) = f\left(\frac{x}{a} + c\right);$$

поэтому

$$z = \frac{1}{a}F\left(\frac{x}{a} + c\right).$$

Следовательно, $z = z(x, a)$ является решением дифференциального уравнения

$$dz = P(x, a)\left(dx - \frac{x}{a}da\right),$$

эквивалентного двум уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, a);$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -P(x, a)\frac{x}{a},$$

где $P(x, a)$ — наиболее общий интегрирующий множитель выражения $dx - \frac{x}{a}da$. Эти результаты показывают, что постановка *простейших* задач, которые приводили к уравнению в частных производных, была связана с изучением задач геометрии и развитием метода интегрирующего множителя. Последнее и привело Эйлера к введению в ана-

лиз уравнений в частных производных первого порядка и разработке методов интегрирования этих уравнений.

В 1757 г. был опубликован классический труд Эйлера «Общие принципы движения жидкости», от которого ведет начало теоретическая гидродинамика. В нем дан вывод основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости, составляющих, как известно, нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно четырех неизвестных функций. Изучение других работ Эйлера по гидродинамике и анализу показывает, что его интерес к уравнениям в частных производных первого порядка постепенно возрастал. Отдельные задачи для линейных уравнений этого типа Эйлер решал непосредственно в гидродинамических работах.

Особенно интересным является мемуар Эйлера по гидродинамике жидкости, опубликованный в «Новых Комментариях» Петербургской академии наук (т. 14, 1769). В нем исследуется общее уравнение неразрывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \frac{\partial (qv)}{\partial y} + \frac{\partial (qw)}{\partial z} = 0,$$

которое Эйлер рассматривал еще в 1755 г. для случая несжимаемой жидкости. В данном случае аналитическая задача заключается в нахождении общих решений уравнения при дополнительных предположениях о характере функций q, u, v, w , зависящих от x, y, z, t . Необычность ее обусловлена наличием четырех неизвестных функций, которые должны удовлетворять лишь одному уравнению. Однако следует учитывать и остальные основные уравнения гидродинамики.

О сложности нелинейной системы этих уравнений свидетельствует тот факт, что Эйлер посвятил специальный мемуар интегрированию одного уравнения неразрывности. Решение этого уравнения он ищет при допущении, что все неизвестные функции зависят только от x . В этом простейшем случае уравнение непосредственно сводится к уравнению $\frac{dp}{dx} = 0$ и, таким образом, $P = \text{const}$ представляет его полный интеграл. Допущение же, что функции зависят от x и y , приводит к уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

В этом случае решение зависит от трех произвольных функций

$$R = R(x, y); \quad \Gamma = \Gamma(y); \quad \Delta = \Delta(x).$$

Если дифференциал функции $R(x, y)$ имеет вид

$$dR = K(x, y) dx + L(x, y) dy,$$

то решение уравнения (3) определяется формулами

$$P = L + \Gamma; \quad Q = -K + \Delta.$$

Аналогично решается уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

В этом же мемуаре Эйлер рассмотрел другую важную проблему — решение уравнения неразрывности, когда проекции вектора скорости u , v , w находятся в постоянных отношениях между собой. В случае равенств

$$u = \alpha\omega; \quad v = \beta\omega; \quad w = \gamma\omega,$$

где ω — неизвестная функция, а α , β и γ — заданные постоянные, возникает простейшее линейное уравнение с одной неизвестной ω :

$$\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Подставляя значение $\alpha \frac{d\omega}{dx}$, найденное из данного уравнения, в выражение

$$\alpha d\omega = \alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz \right),$$

Эйлер получил соотношение

$$\alpha d\omega = (\alpha dy - \beta dx) \frac{\partial \omega}{\partial y} + (\alpha dz - \gamma dx) \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

т. е. решение определяется формулой (запись Эйлера)

$$\omega = \text{funct} \left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right), \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} \right) \right] + \Gamma(t).$$

В заключительной части мемуара решается более сложная задача, если

$$u = T(\alpha y - \beta z); \quad v = T(\gamma z - \alpha x); \quad w = T(\beta x - \gamma y),$$

где T — неизвестная функция, а α , β , γ — заданные постоянные. Аналогичным путем Эйлеру удастся найти решение линейного уравнения с переменными коэффициентами

$$(\alpha y - \beta z) \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma z - \alpha x) \frac{\partial T}{\partial y} + (\beta x - \gamma y) \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

в виде

$$T' = T [(\alpha y - \beta z)^2 + (\gamma z - \alpha x)^2 + (\beta x - \gamma y)^2].$$

Как видим, работа Эйлера об уравнении неразрывности требовала развития теории линейных уравнений в частных производных первого порядка не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами. Этот вопрос почти не освещен в историко-математической литературе.

Задачи геометрии, физики, гидродинамики стимулировали появление в 60-х годах XVIII в. специальных работ по интегрированию уравнений в частных производных. Первой такой работой Эйлера было «Нахождение функций по данным дифференциальным условиям»³. Во вступлении Эйлер указывает, что к задаче нахождения функции $V = V(x, y)$, которая удовлетворяет заданному соотношению между V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, приводят две проблемы — колебания струны и движения жидкости. Он подчеркивает не только необычность таких исследований, но и необходимость введения специальных обозначений⁴.

В этой работе Эйлер развивает свои результаты о «модулярных» уравнениях. Он начинает исследование с постановки задачи для обыкновенных уравнений, рассмотренной в его ранних работах о методе интегрирующего множителя. Если дифференциал некоторой функции V двух переменных x и y имеет вид

$$dV = Pdx + Qdy,$$

то для функций P и Q справедливо соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Необходимо найти V , если между

$$P = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}$$

задано соотношение, отличное от обычного условия интегрируемости. Дальнейшие рассуждения показывают, что речь идет о соотношениях между величинами x , y , V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, т. е. об общем дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка.

Далее Эйлер уточняет свою постановку задачи интегрирования такого уравнения. Для отдельных случаев функции $V = V(x, y)$ условие $\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}$ имеет также специальную форму. В случае однородной функции нулевого измерения $V = V\left(\frac{x}{y}\right)$ это условие записывается в виде $Px + Qy = 0$, для однородной функции n -го измерения — в виде $Px + Qy = nV$.

Установление связи между задачами интегрирования уравнений

$$\Phi\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$$

и теорией уравнений в полных дифференциалах необходимо было Эйлеру для того, чтобы в новой области можно было опереться на результаты, полученные (в значительной мере им самим) в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Развивая метод интегрирования отдельных классов уравнений в частных производных, он использует методы

³ L. Euler. Investigatio functionum...— Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 9, 1762—1763, p. 170—212.

⁴ В первых работах Даламбера и Эйлера о колебании струны нет записи уравнений в частных производных второго порядка.

решения уравнений в полных дифференциалах и ссылается на возможность двух случаев при $dV = R dS$: R — функция S и S — функция R . Иногда (в разных трудах) Эйлер учитывает и возможность параметрического представления этих функций.

Применяя свой излюбленный метод интегрирующего множителя, Эйлер решает простейшие уравнения в частных производных первого порядка. Для пояснения рассмотрим интегрирование уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} p(x, y) + t(x, y),$$

где p и t — заданные функции двух переменных. Поскольку всегда

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy,$$

то

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \left[\frac{\partial V}{\partial x} p(x, y) + t(x, y) \right] dy = \frac{\partial V}{\partial x} (dx + p dy) + t dy.$$

Затем при помощи соотношения

$$q(dx + p dy) = ds,$$

где q — соответственно подобранный интегрирующий множитель для выражения $dx + p(x, y)dy$, Эйлер вводит новую переменную s . Тогда $dV = \frac{p}{q} ds + t dy$. Обозначив через $T = T(x, y)$ интеграл $\int t dy$, взятый при постоянном x , и через Φ — функцию s , он на основании последнего выражения делает вывод, что $V = T + \Phi$.

Аналогично Эйлер исследует и некоторые простейшие нелинейные уравнения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 = a^2; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varphi \left(x, \frac{V}{x} \right);$$

$$V = \varphi \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

Уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F(x, y, V)$$

он интегрирует как обыкновенное, вводя вместо произвольной постоянной интегрирования произвольную функцию.

В рассматриваемой работе не освещен вопрос о характере введенных функций, хотя в предыдущих исследованиях Эйлера о колебании струны четко объяснены возможность и необходимость введения более общих функций по сравнению с использованными в анализе. Разумеется, здесь нет какой-либо попытки систематизировать уравнения в частных производных первого порядка, допускающие интегрирование указанным способом. Возможность такой систематизации исключается чрезвычайной

ограниченностью результатов, впервые полученных в этой новой области анализа. Лишь через шесть лет, в третьем томе «Интегрального исчисления», Эйлер изложил в сравнительно систематическом виде некоторые методы решения уравнений в частных производных, причем не только первого, но и высших порядков.

В «Интегральном исчислении» интегрирование уравнений в частных производных первого порядка Эйлер стремится свести к интегрированию соответствующих уравнений в полных дифференциалах. Поэтому вопрос об интегрировании уравнения

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad (4)$$

являющегося обобщением простейшего уравнения

$$Mdx + Ndy = 0,$$

приобрел для него особое значение.

При таком подходе решение некоторых нелинейных уравнений оказывается проще, чем интегрирование линейных уравнений с переменными коэффициентами. Поэтому все построение этой эйлеровской книги своеобразно с точки зрения современной теории.

В первом разделе третьего тома «Интегрального исчисления» рассматриваются уравнение (4), обобщение понятия полного дифференциала и необходимые подготовительные вопросы. Во втором разделе излагается интегрирование уравнений вида

$$p = \varphi(x, y, z); \quad q = \psi(x, y, z),$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

В третьем — описываются способы интегрирования уравнений типа $\varphi(p, q) = 0$ и, как частный случай, исследуется линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\alpha p + \beta q = \gamma.$$

Четвертый раздел посвящен интегрированию уравнений вида

$$\varphi(x, p, q) = 0; \quad \varphi(y, p, q) = 0.$$

Анализ этих результатов показывает, что здесь впервые появляются решения типа общего интеграла (по современным определениям). Однако геометрический смысл исключения параметра из уравнения семейства поверхностей и результата дифференцирования такого уравнения по параметру Эйлером не выяснен.

В пятом разделе указаны способы построения полного интеграла для уравнений вида $\varphi(x, y, p, q) = 0$. В частности, рассмотрены линейное уравнение

$$y = V(p, q)x + U(p, q)$$

и «уравнение с разделенными переменными»

$$P(x, p) = Q(y, q).$$

В шестом — исследованы отдельные типы уравнений:

$$\begin{aligned} Z(z) &= pX(x) + qY(y); & q &= T(x, y) + V(x, z); \\ z &= M(x, y)p + N(x, y)q; & Z(z) &= pP(x, y) + qQ(x, y). \end{aligned}$$

В дополнительном разделе метод интегрирования линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами обобщается на случай трех независимых переменных. Однако Эйлер ставит задачу отыскания интегральных многообразий только двух измерений.

Естественно, что достижения Эйлера, первые в огромной новой области анализа, не могли быть достаточно общими и завершенными. Теорию уравнений в частных производных развил дальше Ж. Лагранж. Анализ его исследований показывает преимущество эйлеровых результатов. Начало нового периода в развитии теории уравнений в частных производных не только первого, но и высшего порядков связано с работами Г. Монжа. Этот период характеризуется существенным проникновением в теорию дифференциальных уравнений в частных производных новых геометрических идей. Дальнейшее развитие геометрическая теория уравнений в частных производных получила в трудах геометров XIX в. История теории дифференциальных уравнений в частных производных второго и высших порядков представляет собой в значительной степени историю теории дифференциальных уравнений математической физики.

2

Теория уравнений математической физики

Многие, но далеко не все результаты Эйлера в области интегрирования дифференциальных уравнений математической физики содержатся во второй части третьего тома его «Интегрального исчисления». Основное внимание он уделяет уравнениям в частных производных второго порядка, преимущественно гиперболического типа (по современной терминологии). Выбор Эйлером именно этого класса уравнений математической физики не случаен. К таким уравнениям его приводили не только задачи о колебаниях струны, мембран, упругих стержней, но и многие задачи, связанные с распространением звука. Физическое содержание их определило и направление исследований Эйлером уравнений этого типа как в «Интегральном исчислении», так и в других работах.

При первоначальном ознакомлении с содержанием третьего тома «Интегрального исчисления» может показаться, что окончательной целью Эйлера является построение полных интегралов дифференциальных уравнений как решений, зависящих от произвольных функций,

число которых равно порядку уравнения. В самом деле, рассматривая уравнения в частных производных второго порядка, Эйлер стремится путем соответствующей замены независимых переменных, а иногда и линейной замены неизвестной функции преобразовать уравнение к виду, для которого возможно найти полный интеграл. В тех же случаях, когда нет способа построения такого интеграла, хотя решение и обладает какими-либо признаками произвольности, он не считает его окончательным. И тем не менее нетрудно заметить, что основными Эйлер считает именно те задачи, которые определяются самим физическим содержанием исходной проблемы.

В третьем томе «Интегрального исчисления» Эйлер указывает постановку задачи с начальными условиями, в ряде же других работ рассматривает смешанные задачи. В первой главе второй части третьего тома «Интегрального исчисления», посвященной изложению методов интегрирования простейших уравнений второго порядка, он, найдя решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P(x, y)$$

в виде

$$z = \int dx \int P(x, y) dx + xf(y) + F(y),$$

где $f(y)$ и $F(y)$ — произвольные функции, формулирует задачу с начальными условиями следующим образом: «Задача, приводящая к такому уравнению, всегда такова, что при заданном значении $x = a$ задается значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ вместе с z в виде некоторых определенных функций от y . Поэтому если интегралы $\int P(x, y) dx$ и $\int dx \int P(x, y) dx$ при $x = a$ равны нулю, то при $x = a$ получают $\frac{\partial z}{\partial x} = f(y)$, $z = af(y) + F(y)$ и обе функции будут определены природой задачи. Поэтому мы должны при всех таких задачах искать полный интеграл»⁵. В исследованиях смешанных задач для некоторых гиперболических уравнений нахождение полных интегралов имело аналогичный смысл.

Не следует забывать об исторически неизбежной ограниченности первых шагов в новой области как Эйлера, так и его современников. Основные усилия Эйлера в решении задачи с начальными условиями для уравнений в частных производных второго порядка были направлены фактически лишь на один из возможных путей решения — выделение нужного решения из «полного интеграла». Несомненно, что этот путь был заимствован из области обыкновенных дифференциальных уравнений и не отражал своеобразия уравнений нового вида. Тем не менее результаты, полученные Эйлером на этом пути, подготовили создание одного из самых сильных методов современной теории дифференциальных уравнений — метода характеристик. Рассмотрим основные результаты Эйлера в развитии этого метода.

⁵ Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. 3, стр. 133, 134.

В работе о колебаниях натянутой струны, закрепленной на концах (1747 г.), Эйлер указывает, что кривая, выражающая начальную форму струны, может быть не только регулярной, но и «нерегулярной или начерченной механически». Начальный импульс предполагается равным нулю. Недостаток решения Даламбера Эйлер видит именно в неправомерном требовании от функций, выражающих начальное состояние струны, «регулярности». В другой работе о колебаниях струны (1762 — 1765 гг.)⁶ Эйлер особенно отчетливо указывает на необходимость рассмотрения «нерегулярных» функций: «Струне можно задать произвольную нерегулярную начальную форму, а затем внезапно отпустить: в результате струна будет совершать какое-то движение. Но возникает вопрос, — сможет ли теория справиться в этом случае с задачей».

Второй физической проблемой, потребовавшей введения произвольных функций, была проблема распространения звука. Во введении к работе по этому вопросу (1766 г.) Эйлер, рассматривая скорость частички воздуха, удаленной на некоторое расстояние от источника звука, отмечает, что скорость не может представляться «регулярной» функцией, так как сначала она равна нулю, затем «имеет конечное значение» и затем снова равна нулю.

Говоря о «разрывных», или «нерегулярных», функциях, Эйлер имеет в виду непрерывные, в нашем смысле, функции, заданные на разных кусках интервала определения различными аналитическими выражениями. Однако в одной из работ о звуке Эйлер вводит функцию, разрывную в современном смысле (см. гл. VII).

Уже в первой работе о колебании струны в промежуточных построениях Эйлер использует характеристические координаты, но возможность приведения исходного уравнения при помощи таких координат к простейшей форме здесь еще не привлекает его внимания. Основные результаты указанных исследований содержатся в третьем томе «Интегрального исчисления». Характерно, что изложение всего раздела об уравнениях в частных производных Эйлер начинает с рассмотрения общего преобразования независимых переменных для общего линейного уравнения в частных производных второго порядка⁷. Не ограничиваясь выводом окончательных формул для коэффициентов преобразованного уравнения, он решает далее задачу нахождения производной для случая линейной замены независимых переменных. Полученные формулы преобразования линейных уравнений Эйлер широко применяет в дальнейшем изложении «Интегрального исчисления». Почти во всех случаях он стремится преобразовать исходное уравнение к такому виду, в котором группа старших членов состоит лишь из смешанной производной. Именно в этом случае ему удается найти полные интегралы ряда линейных гиперболических уравнений не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами. Однако в случае переменных коэффициентов Эйлер дополнительно требует обращения в нуль

⁶ L. Euler. *Eclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes.*— *Miscellanea Taurin.* V. 3, 1762—1765 (1766), p. 1—26.

⁷ Такой порядок изложения методов математической физики принят и в некоторых современных курсах.

коэффициента при одной из частных производных первого порядка. Этот прием применяется, в частности, для интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P^2(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

соответствующего уравнению колебания неоднородной струны. Многие приложения метода характеристик к уравнениям второго порядка, указанные Эйлером в «Интегральном исчислении», рассмотрены в статье Ф. И. Франкля⁸.

Наряду с методом характеристик в «Интегральном исчислении» Эйлер применяет метод рядов, которым он широко пользовался ранее для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, представление дифференциального оператора второго порядка в виде «квазипроизведения» таких операторов и другие приемы. Особенно важное значение имеет исследование линейного преобразования неизвестной функции. Рассматривая общее линейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Rz + S = 0$$

с переменными коэффициентами, Эйлер при помощи замены $z = e^v V$, где V — новая неизвестная функция, а v — соответственно выбранная функция от x и y , показал, что при выполнении соотношения

$$R = PQ + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

указанное уравнение интегрируемо. Этот результат является основой известного «метода каскадов», развитого позже Лапласом. В специальной главе Эйлер рассматривает класс линейных уравнений с постоянными коэффициентами, однородных по порядку дифференцирования. Более общий результат получен в дальнейших его работах.

В работе «О преобразовании функций двух переменных»⁹ Эйлер стремится развить метод характеристик для уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Однако получить принципиально новые результаты ему не удастся. По сравнению с результатами, изложенными в третьем томе «Интегрального исчисления», достигается лишь некоторое упрощение в построении интегралов для уравнений частного вида, например для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

В работе, опубликованной в 1806 г.¹⁰, Эйлер рассматривает весьма существенный для теории того времени вопрос о построении полного интеграла линейного уравнения при помощи суперпозиции частных

⁸ Ф. И. Франкль. Об исследованиях Л. Эйлера... — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954, стр. 506—625.

⁹ L. Euler. De transformatione functionum, duas variables involventium. — Mem. de l'Acad. d. sci. de St Petersburg. T. 3, 1809—1810 (1811), p. 43—56.

¹⁰ L. Euler. — Opera omnia. Ser. 1. V. 23, 1938, p. 407—413.

решений. Предметом исследования служит самое общее линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$0 = AV + B \frac{\partial V}{\partial z} + C \frac{\partial V}{\partial y} + \dots + E \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + F \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \\ + G \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} + \dots + L \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + M \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \dots \quad (5)$$

Уравнение удовлетворяется, если положить

$$V = e^{\alpha z + \beta y + \gamma x + \dots} \quad (6)$$

Дифференцирование этого соотношения и подстановка в уравнение (5) приводят к алгебраическому уравнению, названному Эйлером «замещающим»,

$$0 = A + B\alpha + C\beta + D\gamma + \dots + E\alpha^2 + F\beta^2 + G\gamma^2 + H\alpha\beta + \dots + \\ + L\alpha^3 + M\beta^3 + N\gamma^3 + \dots$$

Эйлер указывает, что одно из «количеств», например α , можно определить через остальные «количества» $\beta, \gamma, \dots$, взятые произвольно. Относительно α он получает уравнение той же степени, каков порядок исходного уравнения, и далее заключает, что если учесть все возможные значения величин $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ и взять сумму выражений (6), умноженных на произвольные множители, то «получим наиболее общее возможное решение, т. е. полный интеграл». Рассмотрение приведенных в работе частных случаев показывает, что Эйлер имеет в виду представление произвольных аналитических функций разложениями, которыми представляются найденные частные решения вида (6).

В 1766 г. Эйлер опубликовал три большие работы о распространении звука: «О распространении звука», «Добавление к исследованию о распространении звука», «Продолжение исследований о распространении звука»¹¹. Особый интерес в данном случае представляет вторая из них, посвященная распространению звука в плоскости. Аналитическая задача, к которой пришел Эйлер, изучая компоненты отклонения частицы воздуха $x = x(X, Y, t), y = y(X, Y, t)$ от состояния равновесия, заключается прежде всего в интегрировании линейной системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} \\ \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial X \partial Y} \end{aligned} \right\}$$

где g и h — постоянные. Вводя вспомогательную функцию

$$v = \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y},$$

¹¹ L. Euler. De la propagation du son. Supplement aux recherches sur la propagation du son. Continuation des recherches sur la propagation du son. — Mem. de l'Acad. d. sci. de Berlin. T. 15, 1759 (1766), p. 185—209; 210—240; 241—264.

он записывает исходную систему в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial v}{\partial Y} \end{aligned} \right\}$$

и доказывает, что вспомогательная функция v должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}.$$

Используя тождество

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 v}{\partial Y \partial X},$$

Эйлер получает уравнения относительно X и Y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2} - t \frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial Y}; \\ \frac{1}{2gh} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + t \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{\partial N}{\partial X}. \end{aligned}$$

Рассмотрим результат Эйлера, представляющий особый интерес для истории развития понятия о функциональной зависимости. Приступая к исследованию распространения звука на плоскости, Эйлер задает начальное состояние среды в возможно более простом виде. Постановка задачи: при $t = 0$ функции x и y должны удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} x &= \Gamma; \quad y = \Delta; \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \sqrt{2gh} \Lambda; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{2gh} \Psi. \end{aligned}$$

Недостаток общности подстановки задачи заключается в том, что «произвольные функции» Γ и Λ предполагаются зависящими только от X , а функции Δ и Ψ — только от Y . При помощи равенств

$$x = \Phi(X + t\sqrt{2gh}) + \Psi(X - t\sqrt{2gh});$$

$$y = \Sigma(Y + t\sqrt{2gh}) + \Theta(Y - t\sqrt{2gh})$$

Эйлер находит искомое решение в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \Gamma(X + kt) + \frac{1}{2} \Lambda(X + kt) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma(X - kt) - \frac{1}{2} \Lambda(X - kt); \\ y &= \frac{1}{2} \Delta(Y + kt) + \frac{1}{2} \Psi(Y + kt) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta(Y - kt) - \frac{1}{2} \Psi(Y - kt), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $k = \sqrt{2gh}$.

Наибольший интерес представляет частный случай, в котором, указывает Эйлер, предполагается, что функции $\Gamma(u)$, $\Lambda(u)$, $\Delta(u)$ и $\Psi(u)$ всегда равны нулю, за исключением случая, когда $u=0$ и их значениями (при $u=0$) являются бесконечно малые α , β , γ , δ . Нет сомнения, что Эйлер имеет в виду определенные численные значения, *достаточно малые* по сравнению с единицей. В дальнейшем, уточняя вопрос, он указывает, что значения функций при $u=0$ должны быть «квазибесконечно малыми». При таком предположении о начальных функциях из решения (7) сразу же следуют равенства

$$x\Big|_{\substack{t=0 \\ X=0}} = \alpha; \quad y\Big|_{\substack{t=0 \\ Y=0}} = \gamma; \quad x_t\Big|_{\substack{t=0 \\ X=0}} = \beta; \quad y_t\Big|_{\substack{t=0 \\ Y=0}} = \delta.$$

На основании рассмотрения этого простейшего случая начальных условий Эйлер устанавливает, что при всех сделанных предположениях начальное возмущение распространяется в направлениях, параллельных осям координат, со скоростью $\sqrt{2gh}$. Применение Эйлером в математической физике функций, отличных от нуля в одной точке, в историко-математической литературе не рассмотрено.

В третьей из указанных работ изучается распространение звука в пространстве, исследуется линейная система уравнений второго порядка с тремя пространственными координатами.

Малозамеченным осталось и данное Эйлером в исследованиях по теории картографии решение некоторых эллиптических систем первого порядка. В работе «Об отображении поверхности на плоскость»¹² аналитическая задача эквивалентна решению системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Положительность характеристического детерминанта системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\cos u} & -\beta \\ \beta & \frac{\alpha}{\cos u} \end{vmatrix}$$

определяет ее эллиптичность (разумеется, в современном смысле).

3

Вариационное исчисление

Уже в XVII в. некоторые задачи геометрии, механики и физики требовали для своего решения приемов, отличных от основных методов исчисления бесконечно малых. Однако как самостоятельная математическая область анализа вариационное исчисление

¹² L. Euler. De representatione superficiei super plano.— Acta Acad. sci. Petropol. V. 1, 1777 (1778), p. 107—132.

ведет свое начало от исследований Л. Эйлера, выполненных в первой половине XVIII в. Само название «вариационное исчисление» было впервые введено Эйлером в 1764 г.

Источником нового исчисления являются задачи об экстремальных свойствах соответствующих кривых или поверхностей. В течение весьма длительного исторического периода, начиная с античной древности, внимание математиков привлекали так называемые изопериметрические задачи (например: среди всех замкнутых кривых заданной длины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь). В середине XVII в., как и ранее, в эпоху Возрождения, изопериметрические фигуры и тела изучались с помощью частных геометрических приемов. В «Диалогах» Галилея сравниваются, в частности, поверхности цилиндров, имеющих равные объемы, и объемы изоповерхностных цилиндров. Изучение законов падения тел привело Галилея к принципиально новой задаче о кривой линии, падая по которой материальная точка быстрее всего опустится из одной точки в другую. Эту задачу о брахистохроне — линии наибыстрейшего ската — Галилей исследовал лишь частично: он доказал, что, двигаясь по дуге окружности, точка пройдет путь быстрее, чем двигаясь по соответствующей хорде. Однако он ошибочно утверждал, что дуга окружности и является искомой линией наибыстрейшего ската.

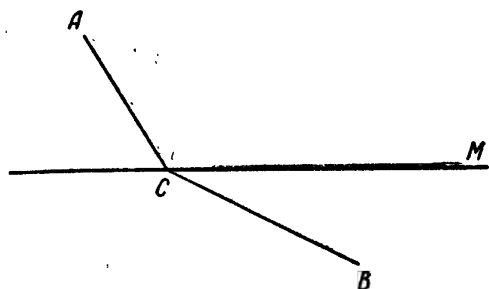
Под влиянием запросов механики интерес к вариационным задачам резко возрос во второй половине XVII в. Весьма существенную роль в этом сыграли алгоритмы исчисления бесконечно малых, развитые Ньютоном и Лейбницем. Одной из важнейших новых вариационных задач была рассмотренная Ньютоном задача о нахождении тела вращения, которое при движении в жидкости испытывает наименее возможное сопротивление среди всех тел вращения, описанных на той же длине и имеющих одну и ту же наибольшую ширину. Сила сопротивления частичек однородной среды предполагалась при этом пропорциональной изменению количества движения частиц, столкнувшихся с телом за единицу времени. Полученная Ньютоном пропорция (способ ее нахождения не был указан) для искомой меридиональной кривой по сути представляла собой дифференциальное уравнение этой кривой. В самом конце XVII в. эту задачу решили иными способами Лопиталь и И. Бернулли.

Другой вариационной задачей, имевшей принципиальное значение для развития вариационного исчисления, была упомянутая задача о брахистохроне. Ее решили Иоганн и Яков Бернулли, Лейбниц, Ньютон и Лопиталь. Одно из двух решений И. Бернулли получил на основе аналогии между поставленной механической задачей и задачей определения кратчайшего времени распространения светового луча в средах различной плотности. «Атомистический» подход Лейбница к сущности всей математики определил его путь решения: он предварительно решает задачу о нахождении такой точки C на горизонтальной прямой M , чтобы падающая точка пробегала ломаную ACB в кратчайшее время (см. рисунок). Я. Бернулли заметил, что при решении задачи следует варьировать две последовательные ординаты кривой.

Он высказал важный принцип: каждый бесконечно малый элемент экстремальной кривой должен обладать тем же экстремальным свойством, каким обладает вся кривая. Я. Бернулли принадлежит также постановка задачи о брахистохроне с подвижным концом.

В конце XVII в. внимание геометров привлекла третья вариационная задача — о нахождении на выпуклой поверхности кратчайшей кривой, соединяющей две заданные точки. Она была поставлена в 1697 г. И. Бернулли. В частном случае (для поверхностей вращения) задачу решил в 1698 г. Я. Бернулли.

Исследование всех этих задач явилось, разумеется, лишь необходимой предпосылкой для создания основ новой математической науки.



Чертеж к лейбницеvu решению задачи о брахистохроне.

Для разработки этих основ требовалось введение новых математических понятий, нового математического аппарата, аналитической формулировки основных задач нового исчисления, выяснение условий их разрешимости, развитие достаточно общих методов решения. Значительная часть этой огромной работы была выполнена Эйлером и Лагранжем.

Почти 15 лет предварительных исследований Эйлера предшествовали опубликованию им в 1744 г. капитального сочинения «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума». В этом сочинении впервые в истории анализа вариационная задача ставится в общем виде — в смысле разыскания экстремального значения «неопределенной величины»

$$W = \int z(x, y, y', y'', \dots) dx,$$

где y — варьируемая функция x , z — заданная функция и интеграл является определенным. В отчетливой форме ставится задача о нахождении кривой, для которой W достигает максимального значения по сравнению со значениями для любых других кривых, определенных на том же интервале. Здесь же Эйлер указывает общую постановку изопериметрической задачи, соответствующую тем случаям, когда варьируемая кривая должна удовлетворять дополнительным условиям, например иметь заданную длину. Уже сама постановка вариационной задачи в общей форме свидетельствует о глубине эйлеровского обобщения всех, в том числе и собственных, предыдущих результатов, относящихся к частным вариационным задачам.

В этом же сочинении Эйлер развивает общий метод решения вариационных задач. Решение основной задачи нового исчисления он стремится свести к решению обычной задачи дифференциального исчисления о нахождении экстремума функции нескольких переменных. Иными словами, Эйлер развивает один из прямых методов вариационного исчисления. Интерес к этим методам особенно возрос в последнее время в современной математике.

Основная задача Эйлера состоит в нахождении экстремального значения функционала

$$\int_a^b Z(x, y, y') dx.$$

Исходным является построение, приведенное на рисунке, частичные интервалы на оси x берутся одинаковыми и равными dx . Вместо взятой кривой фактически рассматривается ломаная с вершинами построенных ординат $\dots, y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, y_{l+2}, \dots$, однако чертежа самой ломаной нет.

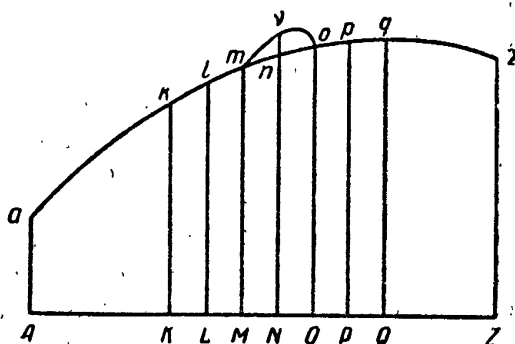
Значения производной $p = \frac{dy}{dx}$ неизвестной функции $y(x)$ в точках разбиения заменяются (приближенно) соответствующими разделенными разностями

$$p = \frac{N_n - M_m}{dx} = \frac{y' - y}{dx},$$

$$p' = \frac{y'' - y'}{dx}, \dots \text{ и т. д.};$$

$$p_l = \frac{y - y_l}{dx}, \dots \left(p' = \frac{dy}{dx} \Big|_N \right),$$

$$p_l = \frac{dy}{dx} \Big|_L, \dots \text{ и т. д.}.$$



Чертеж к основной задаче вариационного исчисления.

Это позволяет приближенно заменить интеграл суммой:

$$\int Z dx \approx Z dx + Z' dx + \dots + Z_l dx + Z_{l+1} dx + \dots = S.$$

Эйлер варьирует лишь одну ординату — N_n (считая, что все остальные ординаты остаются неизменными), которая получает приращение nv . В этом случае сумма является функцией лишь одного независимого переменного, что дает возможность воспользоваться необходимым условием $dS = 0$. Действительно, при указанной вариации лишь dZ и dZ' отличны от нуля, так как только они зависят от изменяющихся величин y' , p , p' . Полагая

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp, \quad dZ' = M'dx + N'dy + P'dp'$$

и заменяя дифференциалы dy , dp , dp' соответствующими приращениями, Эйлер на основании указанного необходимого условия получает равенство

$$nv(P + N'dx - P') = 0$$

и, после замены N' на N , итоговый результат

$$Ndx - dP = 0.$$

Произвольность проварьированной ординаты дает Эйлеру основания сделать обратный переход и заключить, что если есть решение задачи, определяемое функцией $y(x)$, то эта функция должна удовлетво-

рядь уравнению $N - \frac{dP}{dx} = 0$, которое является основным уравнением вариационного исчисления («уравнением Эйлера»). Учет произвольных постоянных, входящих в решение этого уравнения, позволяет ему указать соответствующие краевые условия для $y(x)$ даже для того случая, когда в подинтегральное выражение входят производные любого порядка варьируемой функции.

В некоторых историко-математических работах уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{\partial z}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

соответствующее рассмотренному случаю, необоснованно связывается лишь с именем Пауссона. Разумеется, результаты Эйлера не лишены и некоторой ограниченности, обусловленной историческим процессом развития математики. Он совсем не затрагивает вопроса о возможности предельного перехода, не классифицирует экстремумы, у него нет постановки проблемы существования решения в классе допустимых функций, постановки вопроса о достаточных условиях экстремума, весьма громоздок весь примененный им математический аппарат. Последнее в значительной степени объясняется тем, что Эйлер в данном случае стремился решить задачу, поставленную им же самим в явной аналитической форме, лишь геометрическими методами.

Новый аналитический алгоритм, отвечающий самой природе новой области анализа, блестяще развил Лагранж. Он направил свои усилия на разработку правил действий с вариациями функционалов и в результате развил исчисление вариаций, подобное исчислению дифференциалов. Уже первые результаты в этом направлении, полученные 24-летним Лагранжем, были чрезвычайно высоко оценены Эйлером (в ответном письме Лагранжу, сообщившему о своих исследованиях).

К концу XVIII в. класс решенных вариационных задач значительно расширился. Эйлер и Лагранж изучали экстремальные свойства пространственных кривых, задачи для кривых с подвижными концами, экстремальные свойства поверхностей. В частности, уравнение Эйлера было получено самим Эйлером для функционала

$$\iint f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

(в предположении, что варьируемые функции $z(x, y)$ определены в прямоугольнике). В приложении к третьему тому «Интегрального исчисления» («О вариационном исчислении») Эйлер пришел даже к нелинейному эллиптическому уравнению

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}{a},$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad a = \text{const.}$$

При замене правой части нулем получается известное уравнение минимальных поверхностей, ставшее позднее предметом изучения Менье, Монжа, Лежандра, Дарбу, а также математиков нашего столетия. Первые общие результаты в классификации экстремумов принадлежат Лежандру.

4

Геометрия

В математическом творчестве Эйлера геометрические работы занимают гораздо меньше места, чем работы по анализу и теории чисел. Однако достижения Эйлера и в геометрии являются вполне достойными его великого дарования. Продолжив исследования Лейбница и Ньютона по аналитической геометрии, он создал теорию поверхностей второго порядка, в дифференциальной геометрии вместе с Монжем заложил основы теории поверхностей, привел в систему сферическую тригонометрию, от его исследований берет свое начало топология, ряд интересных результатов принадлежит ему и в элементарной геометрии. Рассмотрим работы Эйлера в указанных областях геометрии.

В 1748 г. вышел в свет второй том «Введения в анализ бесконечных» Эйлера, поднявший аналитическую геометрию на более высокую ступень (в нем аналитическая геометрия в основном приняла уже современную форму). Этот труд представляет собой первое полное изложение аналитической геометрии на плоскости с подробным исследованием линий второго порядка. В обширном же «Приложении о поверхностях» впервые последовательно рассмотрена аналитическая геометрия в пространстве и, в частности, впервые дана классификация поверхностей второго порядка. Это был первый курс аналитической геометрии в современном смысле слова.

В I главе курса вводятся декартовы координаты (прямоугольные и косоугольные), устанавливается связь между линией и ее уравнением, дается классификация линий. II глава посвящена преобразованию прямоугольных и косоугольных координат. В частности, приводятся в общем виде формулы преобразования декартовых прямоугольных координат:

$$x = p \sin \Theta + q \cos \Theta + f;$$

$$y = p \cos \Theta - q \sin \Theta + g,$$

причем рассматривается параллельный перенос и поворот осей координат. В этой же главе исследуется общее уравнение прямой. В III главе («О разделении алгебраических линий на порядки») Эйлер впервые средствами алгебры классифицирует кривые по их порядкам, а затем в следующей главе («Об основных свойствах линий любого порядка») выясняет, сколько точек пересечения с прямой может иметь

алгебраическая кривая n -го порядка и сколько коэффициентов содержит ее общее уравнение.

Главы V и VI посвящены классификации линий второго порядка на основе их уравнения $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Эйлер различает три вида кривых в зависимости от их поведения на бесконечности и исходит из знака при γ . Исследование он начинает с эллипса, причем как частный случай эллипса упоминает и окружность. Парабола получается из эллипса, у которого один из главных диаметров стремится к бесконечности. Гипербола соответствует случаю, когда $\gamma > 0$.

В VII и VIII главах дается оригинальный метод исследования асимптот кривых и на его основе классификация алгебраических линий. Асимптоты Эйлер исследует путем разложения на линейные множители выражений, составленных из членов n -й степени уравнения кривой, затем $(n - 1)$ -й и т. д. степеней. В IX—XI главах Эйлер исследует кривые третьего и четвертого порядков и дает их полную классификацию на основе поведения на бесконечности.

Следующие три главы (XII—XIV) содержат исследование формы кривой по ее уравнению, поведения кривой в окрестности точки, учение о касательных без использования понятия производной. Эйлер вводит также понятия кривизны, радиуса кривизны, круга кривизны, классифицирует особые точки.

В XV главе развивается теория диаметров кривых линий. У Эйлера она становится теорией симметрии на плоскости — первым разделом новой геометрической дисциплины, которая сформировалась лишь в следующем столетии в связи с развитием кристаллографии и теории групп. В главах XVI и XVII изучаются кривые по их свойствам. Примененные для конических сечений методы Эйлер использует при рассмотрении кривых, записанных уравнениями

$$y^2 + Py + Q = 0;$$

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

Затем эти же вопросы он трактует с помощью уравнений, записанных в полярных координатах.

Специальную главу (XVIII) Эйлер посвящает геометрическим преобразованиям подобия и аффинности. Аффинными он называет кривые, координаты которых заданы уравнениями $x = \frac{X}{m}$, $y = \frac{Y}{n}$. Это определение совпадает с современным.

В последних четырех главах Эйлер рассматривает пересечение кривых, графическое решение уравнений, трансцендентные кривые (логарифмическую и тригонометрические кривые, эпициклоиды и гипоциклоиды, линию $x^y = y^x$ и спирали; исследование этих кривых имело принципиальное значение, так как до Эйлера при изложении аналитической геометрии ограничивались только теорией алгебраических кривых), а также решение тригонометрических уравнений.

В довольно обширном приложении к тому («Приложении о поверхностях») Эйлер исследует восемь октантов, группу отражений в коор-

динатных плоскостях, поверхности (методом плоских сечений, применяя его к поверхностям вращения, цилиндрическим и коническим поверхностям, к круговому и эллиптическому цилиндру, к круговому конусу и шару; уравнения первых трех поверхностей впервые были выведены Эйлером в 1728 г.), преобразование прямоугольных координат в пространстве (при помощи известных «углов Эйлера»), общее уравнение второго порядка с тремя переменными, выводит условия, при которых оно представляет ту или иную поверхность, так же, как и на плоскости, по членам высшего измерения изучает поведение его на бесконечности, проектирование пространственных кривых. Это исследование Эйлера является первым в истории математики изучением всех видов невырожденных поверхностей второго порядка.

Второй том «Введения в анализ» остался незавершенным. Эйлер предполагал написать третью часть «Дифференциального исчисления», в которой были бы изложены геометрические применения анализа бесконечно малых и которая явилась бы продолжением второго тома «Введения в анализ». Однако осуществить этот замысел Эйлеру не удалось: были написаны только первые параграфы книги, напечатанные впервые только в 1862 г. Тем не менее значение второго тома «Введения в анализ» очень велико. В этом труде Эйлера аналитическая геометрия оформилась как самостоятельная математическая дисциплина, он послужил образцом для создания последующих ее курсов.

Вопросы приложения анализа к геометрии были в поле зрения Эйлера всю жизнь, начиная с работы о параллельных кривых на плоскости и кривых, пересекающихся под постоянным углом (1727 г.), и кончая работой по дифференциальной геометрии пространственных кривых (1782 г.). Первые его результаты в области дифференциальной геометрии были изложены в статьях о геодезических линиях на поверхности (1728—1732 гг.), о натуральных координатах (1736 г.), о некоторых интересных свойствах кривых (1744 г.), о трактрисе и др. Однако первой работой Эйлера, содержащей существенно новые результаты в теории поверхностей, является «Исследование о кривизне поверхностей» (1760 г.). В ней дана знаменитая его теорема о кривизне поверхности, представляемая (в обозначениях Эйлера) формулой

$$r = \frac{2fg}{f + g + (f - g) \cos 2\alpha},$$

где f и g — экстремальные значения радиуса кривизны r нормального сечения, а α — угол между этим нормальным сечением и одним из нормальных сечений экстремальной кривизны. (Кстати, понятие главного направления («главного сечения») и теорема о перпендикулярности двух сечений экстремальной кривизны принадлежат также Эйлеру.) Эйлер показал, что, несмотря на все разнообразие поверхностей, искривленность регулярных поверхностей в точке может быть всего лишь нескольких вполне определенных типов.

Следующая важная работа Эйлера о поверхностях — «О телах, поверхность которых может быть развернута в плоскость» (1771 г.). Эта работа относится к внутренней геометрии поверхностей. В ней Эйлер

впервые вводит линейный элемент — важнейшее понятие внутренней геометрии поверхностей, — которым систематически пользуется в последующих работах, впервые задает поверхность в параметрической форме, доказывает известную теорему о разворачивающихся поверхностях. Теорема состоит в том, что всякая поверхность, которая может быть развернута на плоскость, является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью, образованной касательными к пространственной кривой. При этом Эйлер указывает на совпадение линейных элементов разворачивающейся поверхности и плоскости как условие наложимости этой поверхности на плоскость.

Одной из важных работ Эйлера является исследование «Элементы тригонометрии сфероида, выведенные из метода максимумов и минимумов» (1753 г.), относящееся к геометрии сжатого эллипсоида вращения. Эйлеру принадлежит также много работ по изучению свойств плоских и пространственных кривых. Одна из них, исследование радиусов кривизны плоских линий, — «Легкий метод нахождения радиуса соприкасающегося круга, выведенный из принципа максимумов и минимумов» (1789 г.).

Эйлеру принадлежит классический (ныне аналитический) способ изложения теории пространственных кривых, данный им в работе «Легкий метод исследовать все свойства кривой, не лежащей в одной плоскости» (1786 г.). В этой же работе приведена и первая из тех формул, которые впоследствии были названы именем Френе (1847 г.).

Работы Эйлера в рассматриваемой области оказали сильное влияние на творчество Г. Монжа. Эйлер и Монж являются основоположниками теории поверхностей.

Весьма существен вклад Эйлера в развитие теории геометрических преобразований. Его исследования посвящены самым разнообразным видам геометрических преобразований — преобразованиям координат, преобразованиям подобия, аффинным преобразованиям, движению и симметрии на плоскости, движению в пространстве, теории движения твердых и жестких тел. Он по существу нашел с помощью кватернионов представление группы вращений пространства — группы ортогональных матриц третьего порядка (см. его работу «Алгебраическая задача о совершенно замечательных свойствах», 1770 г.).

Исследовал Эйлер и конформные преобразования, в частности круговые, совпадающие с дробно-линейными. В теории конформных преобразований важную роль играют функции комплексного переменного. Основы теории этих функций заложены Эйлером. В неявном виде идея геометрической интерпретации комплексных чисел встречается у него в XV главе второго тома «Введения в анализ». Ее можно проследить и в работе «Продолжение исследований по теории движения жидкостей» (1757 г.). Совершенно отчетливо она выступает в исследовании «Рассуждения об ортогональных траекториях» («*Considerationes de trajectoryis orthogonalibus*», 1769 г.), в котором каждой точке плоскости ставится в соответствие комплексное число. Эйлер ищет кривые некоторого семейства, пересекающие линии данного семейства под прямым углом, и решает задачу посредством функций комплексного переменного. Осу-

шестивленное преобразование является конформным. В конце работы он доказывает, что дробно-линейная функция комплексного переменного преобразует прямые в окружности.

В «Рассуждениях об ортогональных траекториях» Эйлер сделал множество открытий по конформным отображениям: вывел общие формулы конформного отображения, установил изотермические параметры, дал теоремы о дробно-линейных функциях, указал интересные случаи принципа отражения. Полученные конформные отображения он применяет в работах по картографии. Так, в статье «Об изображении сферической поверхности на плоскости» (1777 г.) Эйлер дает общий способ нахождения произвольного конформного отображения и применяет его для решения практических вопросов. Здесь же он впервые доказывает теорему, согласно которой никакой кусок сферы невозможно конгруэнтно отобразить на плоскость, отдельно рассматривает конформные отображения с сохранением площадей.

В работе «О географической проекции сферической поверхности» (1777 г.) Эйлер изучает стереографическую проекцию сферы на плоскость, дает ее конформное отображение в плоскости посредством функции комплексного переменного и показывает, что для того, чтобы меридианы и параллели переходили в окружности (или прямые), функция отображения должна быть дробно-линейной. Так он получает косые стереографические проекции.

Работа «О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи» (1777 г.) представляет собой подробное исследование проекции Делиля, ее достоинств и недостатков.

Л. Эйлера можно также считать основоположником топологии. Первой в истории математики теоремой, относящейся к топологии, является известная теорема Эйлера, устанавливающая соотношение между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Она рассмотрена в двух работах: «Началах учения о телах» (1752 г.) и «Доказательстве некоторых замечательных свойств, которыми обладают тела, ограниченные плоскими гранями» (1752 г.).

В первой работе Эйлер формулирует теорему: «У всякого тела, ограниченного плоскими гранями, сумма числа телесных углов и числа граней превышает на два число ребер». Иными словами, если S — число телесных углов (вершин), H — число граней и A — число ребер, то $S + H - A = 2$. Затем проверяет справедливость найденного соотношения для любой пирамиды, для общего призматоида, правильных многогранников и некоторых других видов многогранников.

Считая теорему обоснованной, он выводит несколько следствий:

$$1) A + 6 \leq 3S, \quad A + 6 \leq 3H;$$

$$2) H + 4 \leq 2S, \quad S + 4 \leq 2H;$$

3) всякий многогранник имеет хотя бы одну треугольную, четырех- или пятиугольную грань и хоть один треугольный, четырех- или пятиугольный телесный угол;

4) сумма всех плоских углов всех граней многогранника равна $4Sd - 8d$, где S — число вершин, $d = 90^\circ$.

Используя первое и второе следствия, Эйлер вычисляет таблицы верхних и нижних границ для возможного числа вершин или ребер, если дано число граней, и такие же таблицы границ для числа граней и вершин, если дано число ребер. Эти таблицы представляют собой по сути начала морфологии многогранников. Затем он вычисляет таблицу, указывающую, каково может быть число граней и ребер многогранника, если задано число его вершин.

Во второй работе Эйлер доказывает свою теорему. Доказательство состоит в удалении граней многогранника, примыкающих к одной из его вершин, и замене их гранями, вершинами которых являются остальные вершины удаленных граней. При этом удаляются одна вершина и равное число граней и ребер, а добавляются грани и ребра. Число добавляемых граней на единицу больше числа добавляемых ребер, так что в этом процессе число $S + H - A$ не изменяется (S уменьшается на единицу). Поступая так $S - 4$ раза, Эйлер доходит до тетраэдра, у которого избыток числа ребер по сравнению с числом граней равен двум. Выпуклость многогранника, вероятно, предполагалась. Однако, поскольку это Эйлером не отмечено, его доказательство нельзя считать строгим.

Теорема Эйлера остается верной, если подвергнуть выпуклый многогранник произвольному топологическому преобразованию. При этом ребра, вообще говоря, будут не прямолинейными, а грани — не плоскими, поверхность многогранника станет кривой поверхностью. Наиболее важен случай, когда все грани — треугольники. Общий же случай легко можно привести к треугольному. Как известно, разбиение поверхности на треугольники — прямолинейные или криволинейные — называется триангуляцией. Оказывается, что левая часть формулы Эйлера, т. е. выражение $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, где α_0 — число вершин, α_1 — число ребер и α_2 — число треугольников в данной триангуляции, является топологическим инвариантом. Это выражение получило название эйлеровой характеристики триангуляции и легло в основу топологической классификации замкнутых поверхностей. Согласно теореме Эйлера для всех триангуляций поверхности, гомеоморфной сфере, эйлерова характеристика равна двум. Оказывается, что триангуляции любой поверхности имеют одну и ту же характеристику, например эйлерова характеристика цилиндрической поверхности равна нулю.

Топологический характер носит также интересная задача о кенигсбергских мостах, решенная Эйлером еще во время его первого пребывания в Петербурге (1735 г.) и изложенная в статье «Решение проблемы, относящейся к геометрии положения» (1741 г.). В задаче предлагается найти решение вопроса, как пройти по семи кенигсбергским мостам через реку Прегель, пройдя по каждому мосту не более одного раза?

Топологической является также эйлерова задача о ходе конем. Она впервые рассмотрена в его работе «Решение одного интересного

вопроса, не поддающегося с первого взгляда никакому анализу», опубликованной в 1766 г. Задача состоит в следующем: требуется разместить в 64 клетках шахматной доски 64 числа от 1 до 64 так, чтобы любые две клетки, в которых содержатся два последовательных числа, были связаны ходом коня.

Исследования Эйлера, относящиеся к геометрии сферы, можно разделить на две категории: работы, в которых рассматриваются свойства сферы, являющиеся обобщением свойств окружности, и работы, в которых рассматриваются свойства сферы, являющиеся обобщением свойств плоскости. Примером исследований первого типа может служить его статья «Решение легкой задачи об отыскании сферы, касающейся четырех заданных сфер» (1779 г.). Эта работа представляет собой аналитическое решение задачи Ферма, обобщившего задачу Аполлония о касании кругов на случай четырех шаров.

Примером работ второго типа является статья «Построение одной задачи Паппа Александрийского» (1780 г.). В 1742 г. Крамер обобщил задачу, поставленную еще Паппом Александрийским, о вписании в круг треугольника, стороны которого проходят через три точки, не лежащие на одной прямой. В этой обобщенной форме он предложил задачу Д. Ф. Кастильону, который решил ее геометрическим методом в 1776 г. В указанной статье Эйлер решает задачу для треугольника на плоскости и на поверхности сферы. Пространственное решение ее дали также Лагранж, Фусс и Лексель. Позже она была обобщена и на случай многоугольника.

К задачам второго типа относится статья Эйлера «Нечто геометрическое и сферическое» (1812 г.). В треугольнике ABC дана точка O . Прямые AO , BO , CO пересекают стороны в точках a , b , c . Эйлер находит связь между длинами отрезков AO , BO , CO и ao , bo , co в виде соотношения

$$\frac{AO}{Oa} \cdot \frac{BO}{Ob} \cdot \frac{CO}{Oc} = \frac{AO}{Oa} + \frac{BO}{Ob} + \frac{CO}{Oc} + 2.$$

Аналогичную теорему он устанавливает и для сферического треугольника.

Сферической геометрии посвящены работы Эйлера «Об измерении телесных углов» (1778 г.) и «Различные соображения о площадях сферических треугольников» (1792 г.). В них Эйлер рассматривает различные варианты вычисления площади сферического треугольника, в частности выражение площади через его стороны.

Работы Эйлера в области сферической геометрии являются первыми исследованиями внутренней геометрии кривой поверхности. Они, а также его исследования по сферической тригонометрии, несомненно, оказали влияние на Лобачевского, основывавшего непротиворечивость открытой им неевклидовой геометрии на сравнении тригонометрических формул этой геометрии с формулами сферической тригонометрии в той форме, которую придал им Эйлер.

Плоская и сферическая тригонометрии в исследованиях Эйлера имеют современную форму. В работе «Принципы сферической тригонометрии, выведенные из метода наибольших и наименьших величин»

(1753 г.) Эйлер строит сферическую тригонометрию как геометрию треугольников, составленных на поверхности сферы линиями кратчайшего расстояния. Используя методы математического анализа, он получает для прямоугольного треугольника шесть, а для косоугольного — пять основных уравнений. Впервые в этой работе Эйлер употребляет обозначения сторон треугольника (a , b , c) и противолежащих углов (A , B , C), к которым мы привыкли.

Сферической тригонометрии посвящена большая статья Эйлера под названием «Всеобщая сферическая тригонометрия, выведенная из первых оснований наиболее коротко и ясно» (1779 г.). В ней Эйлер получает с помощью элементарных средств теоремы синусов и косинусов, а также новую формулу, связывающую пять элементов:

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C.$$

Он отмечает, что эти три утверждения содержат в себе всю сферическую тригонометрию.

К элементарной геометрии относятся исследования Эйлера о квадратуемости гиппократовых луночек. Гиппократ Хиосский произвел квадратуру трех отдельных луночек. Эйлер в статье «Решение геометрической задачи о луночках, образованных кругами» (1737 г.) рассматривает дальнейшие теоремы. К этому вопросу он возвращается позже в статье «Циклометрические соображения» (1771 г.).

В работе «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями» Эйлер выводит формулы для объема тетраэдра. Применительно к треугольнику он нашел, что расстояние между центрами вписанного и описанного кругов равно $\sqrt{R(R-2r)}$.

В статье «Различные геометрические доказательства» (1747 г.) Эйлер доказывает теорему: сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей и учетверенному квадрату отрезка, соединяющего середины диагоналей. В статье «Легкое решение задачи геометрии, казавшейся очень трудной» (1765 г.) он доказывает, что точка пересечения высот треугольника, точка пересечения его медиан (центр тяжести) и центр описанной окружности лежат на одной прямой. Эта прямая в настоящее время называется прямой Эйлера.

Эйлер занимался усовершенствованием приемов нахождения значения числа π , ему принадлежат выражения для π в виде бесконечных рядов, произведений и цепных дробей. Некоторые теоремы геометрии, впервые доказанные Эйлером, названы другими именами, так как не были им опубликованы (доказательства их содержатся в записных книжках Эйлера и в рукописи его учебника по геометрии ¹³).

¹³ Ю. А. Б е л ы й. Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.

Теория вероятностей

К середине XVIII в. теорию вероятностей начали все чаще применять в демографии, страховании, оценке ошибок наблюдений, проведении лотерей и др. Все шире становился круг математиков, разрабатывавших эту науку. Л. Эйлер также внес свой вклад в исследование теории вероятностей и ее применений. Часть работ Эйлера была опубликована при его жизни, часть — значительно позже, а некоторые — только в Собрании сочинений (т. VII, 1923), куда вошли все его работы по этим вопросам.

Интерес к теории вероятностей у Эйлера возник при следующих обстоятельствах. В то время в Западной Европе для пополнения государственной казны часто использовали генуэзскую лотерею. Прусский король Фридрих II хотел применить ее с этой же целью и неоднократно обращался к Эйлеру за консультациями. В результате появилось несколько работ Эйлера. Одной из решенных им задач является определение вероятности появления номеров, следующих один за другим (появление последовательности), при вытаскивании пяти билетов из 90. Например, отыскание вероятности, что все пять номеров образуют последовательность, производится так. Всех исходов:

$$C_{90}^5 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Количество последовательностей из пяти номеров: $90 - 4 = 86$. Следовательно, искомая вероятность

$$P = \frac{86 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{511\,038}.$$

Затем отыскиваются вероятности получения последовательностей из трех и двух номеров ($P = \frac{85}{511\,038}$), появления хотя бы одной последовательности из двух номеров и т. п. Только после этого формулируется задача в общем виде.

Эйлер решает и чисто практические вопросы, например вопрос о цене лотерейного билета. К этим его исследованиям примыкают работы, относящиеся к различным задачам, формулируемым в терминах азартных игр. Наиболее интересной из них является статья «Вычисление вероятности в игре встреча». Вначале дается постановка задачи. Игра «встреча» является азартной игрой, в которой два игрока, имеющие каждый по полной колоде карт, извлекают одновременно карты одну за другой до тех пор, пока не извлекут одинаковую карту, и тогда один из игроков выигрывает. А если такая встреча не произойдет вовсе, тогда выигрывает второй игрок. При этих правилах отыскивается вероятность выигрыша каждого из двух игроков.

Эйлер начинает решать задачу с простейшего случая. Предположим вначале, что тот и другой из игроков имеют только по одной карте.

Ясно, что $P_1 = 1$, $P_2 = 0$. Затем он рассматривает вероятности, если оба игрока A и B имеют по две, по три и по четыре карты, и только после этого переходит к общему случаю. В конце статьи он делает вывод: если бы число карт было бесконечным, то вероятность выигрыша A выразилась бы следующим бесконечным рядом:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} \text{ и т. д.,}$$

а вероятность выигрыша B — рядом

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \text{ и т. д.}$$

Сумма последнего ряда равна $\frac{1}{e}$. Значит, для случая $n = \infty$ вероятность выигрыша A будет равна $1 - \frac{1}{e}$, а вероятность выигрыша $B - \frac{1}{e}$.

В этой статье хорошо виден метод, которым Эйлер часто решал поставленные задачи. Вначале он рассматривает простейшие частные случаи, затем усложняет их и только после этого переходит к задаче в общем виде.

Развитие точных наук, в первую очередь физики и астрономии, выдвинуло на очередь дня вопрос об определении по многим результатам измерения среднего значения. В 1777 г. была опубликована работа Д. Бернулли «Наиболее вероятное значение». Д. Бернулли считает, что среднее арифметическое может применяться только в том случае, если известно, что вероятности ошибок всех измерений равны. Но этого на практике не бывает. Поэтому он предлагает оценку максимального правдоподобия. В качестве кривой плотности этой оценки он выбирает полуокружность, хотя считает, что можно выбрать и полуэллипс, и дугу параболы или другую кривую. Радиус полуокружности должен быть равен максимально возможной ошибке. Функция правдоподобия Бернулли имеет вид

$$\sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{r^2 - (x - a)^2} \sqrt{r^2 - (x - b)^2} \dots,$$

где r — радиус полуокружности; x , $x - a$, $x - b$, ... — расстояния от центра полуокружности до точек, обозначающих данные наблюдения. Уравнение правдоподобия, даже для случая трех наблюдений, является алгебраическим уравнением пятой степени и содержит 20 членов.

Эйлер в связи с этой работой написал статью «Замечания к предыдущей статье прославленного Бернулли». По его словам, принцип Бернулли ничем не подтвержден. Основное возражение Эйлера сводится к следующему: если среди наблюдений есть одно, которое должно быть «почти отброшено» и, следовательно, почти не должно влиять на искомую величину, то даже максимальное значение функции правдоподобия будет весьма малым. Он предлагает вернуться к среднему арифметическому

$$X = \frac{a\alpha + b\beta + \dots}{\alpha + \beta + \dots},$$

где $a, b, \dots$ — значения наблюдений; α, β — соответствующие веса; кроме того, принято $\alpha = r^2 - (x - a)^2$; $\beta = r^2 - (x - b)^2, \dots$ Своеобразное сочетание принципов среднего арифметического и максимального правдоподобия привело Эйлера к довольно простому уравнению третьей степени, причем во многих случаях задача сводится к квадратному уравнению.

Наибольшее значение имеют работы Эйлера, в которых теория вероятностей применяется к демографии. В работах «Исследования о смертности и умножении рода человеческого» и «Об умножении рода человеческого» Эйлер вводит понятия «вероятная продолжительность жизни», «прирост населения», «порядок вымирания», являющиеся основными в демографии. Решая задачи о приросте населения, численности населения в предстоящие годы, численности умерших и другие, он создал законченную теорию повозрастной смертности. К интересным выводам пришел Эйлер, решая вопрос о времени удвоения численности населения.

Хотя все задачи и примеры, рассматриваемые Эйлером, носят формальный характер (что не снижает их значения для создания математической демографии), он сделал много ценных замечаний, свидетельствующих о его глубоком проникновении в практическую демографию.

В некоторых исследованиях Эйлер рассматривает вопросы, связанные с различными случаями страхования на дожитие, на случай смерти, делает расчет пожизненных рент, дополняя свои решения подробно составленными таблицами. Большинство этих задач возникло в результате работ Эйлера по экспертизе устройств пенсионных касс и обеспечения лиц, уходящих в отставку.

Таким образом, в теории вероятностей и ее применениях Эйлер не затрагивал основных задач, проблем и понятий. Он ограничивался решением отдельно поставленных, чаще всего конкретных, задач, характеризующих, однако, широту его интересов. Занимаясь исследованием применений теории вероятностей, наиболее заметный след Эйлер оставил в демографии.

6

Теория чисел

Теория чисел привлекала внимание Эйлера в разные периоды его научной деятельности. Ей он посвятил 148 работ.

До Эйлера небольшое количество результатов в области теории чисел было получено древнегреческим математиком Диофантом (III в.) и французским математиком П. Ферма. Эйлер ввел ряд новых понятий, имеющих основополагающее значение, особенно для теории сравнений.

В 1640 г. Ферма получил основной результат в области зарождавшейся тогда теории сравнений — теорему, утверждающую, что число вида $a^{p-1} - 1$ всегда делится на p , если число p простое и если a не делится на p . Теорема была сообщена Ферма без доказательства. Первое доказательство теоремы Эйлер опубликовал в 1736 г. «Малая теорема

MATHEMATICA.

I.

Demonstratio Theorematis Fermatiani
omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam
duorum quadratorum.

Auctore Leonh. Eulero. p. 3.

D hoc insigni Theoremate iam in superiori Tomo
a Cei. Auctore egregie obtrusiones sunt pro-
latas, quibus eius veritas tam solutis rationibus fuit con-
probata, ut nullum dubium relinqui videretur; neque
tamen hac ratione vicem firmas demonstrationis susti-
nebant. In hoc memorabile cernitur exemplum eius-
modi propositionis, de cuius veritate dubitare nefas sit,
etiam completa demonstratione destituitur. Talibus
autem propositionibus nunquam minus, quam in Mathesi,
locum relinqui vulgo putatur, ubi omnia firmissimis
demonstrationibus munita videntur. Verum hoc etiam
tantum in Joannis numerorum via venire deprehendimus,
in quorum natura licet *Fermatius* ita excelluit, ut
quam plurimas proprietates detexeret, atque etiam de-
monstrasse sit professus, quarum pleraque etiam nunc
sine demonstratione veritati consentaneas agnoscere de-
bemus; dum in reliquis Mathematicis partibus, ac multo
magis in aliis scientiis generibus, quarum propositionum
veritas non per rigidas demonstrationes nobis est per-
fecta, eas merito suspicias videri debent, cum adeo
pleniusque, quandoquidem eas accuratius intueri licet,
A 2 fallac

Первая страница мемуара Л. Эй-
лера «Доказательство теоремы
Ферма».

Первая страница мемуара Л. Эй-
лера «Доказательство теоремы
Ферма». ввел термины «вычеты» (*residua*) и «невывчеты» (*non residua*), установил
важнейшие теоремы, ввел также понятие «первообразный корень»,
установил основное свойство квадратичных вычетов, известное как за-
кон взаимности квадратичных вычетов, который Гаусс назвал основной
теоремой и который до недавнего времени приписывали Лежандру.

Около 50 исследований Эйлер посвятил диофантову анализу.
Теория алгебраических чисел тесно связана с диофантовыми уравнения-
ми. Изучение этих уравнений, особенно попытки доказать так называемую
большую теорему Ферма о невозможности решения в целых положительных
числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$), способствовало развитию
теории алгебраических чисел. Проблема разложения алгебраических
чисел на простые множители привела к построению теории идеалов.

В 60-х годах Эйлер доказал теорему Ферма для случая $n = 3$,
а также для случая $n = 4$. Этими изысканиями Эйлера было положено
начало многочисленным работам XIX в. по алгебраической теории
чисел.

Теория простых чисел является одной из основных проблем теории
чисел. Изучению вопроса о распределении простых чисел в ряду
натуральных чисел посвящено много исследований математиков всех
времен и народов. Мечта теоретиков в области теории чисел — нахож-
дение такой функции $f(n)$, которая давала бы только простые числа
для всех положительных n . Эйлер дал ряд формул в виде многочленов,
значения которых являются простыми числами при подстановке в них
довольно большого количества первых целых чисел.

Ферма» была им не только доказана,
но и обобщена. Своим открытием Эйлер
установил закон взаимности простых
чисел: если два целых положительных
числа a и m ($m > 1$) взаимно простые
и если $\varphi(m)$ — количество чисел ряда
 $1, 2, \dots, m$, взаимно простых с m , при-
чем $\varphi(1) = 1$, то выражение $a^{\varphi(m)} - 1$ де-
лится на m без остатка. Обобщенное по-
ложение он доказал в 1738 г., исходя
из свойств биномиальных коэффи-
циентов, более же позднее его доказатель-
ство (1758—1759 гг.) является, по-види-
мому, первым в истории математики
чисто теоретико-групповым доказатель-
ством. Функцию $\varphi(m)$, по предложению
Гаусса, называют функцией Эйлера.

Эйлер доказал и так называемую
теорему Вильсона, утверждающую, что
($m - 1$)! + 1 всегда делится на m , если
 m — простое число. К этому кругу идей
непосредственно примыкает теория сте-
пенных вычетов, творцом которой так-
же является Эйлер. В этой теории он

Около 1640 г. Ферма высказал предположение, что $f(n) = 2^{2^n} + 1$ есть простое число для каждого натурального n , но это оказалось неверным. Эйлер установил в 1732 г., что $f(5)$ — составное число.

Ферма открыл ряд положений о представимости простых чисел. Так, простые числа вида $4n + 1$ представимы формой $x^2 + y^2$, вида $3n + 1$ — формой $x^2 + 3y^2$, вида $8n + 1$ и $8n + 3$ — формой $x^2 + 2y^2$. Эйлер дал строгое доказательство двум первым утверждениям Ферма, а также показал, что простое число представляется в виде суммы квадратов только единственным способом, сложное же, если это возможно, обязательно неединственным способом. Это положение натолкнуло его на новый метод определения простого числа: по таблице квадратов натуральных чисел определить, сколько раз разность $N - x^2$ будет точным квадратом, и если она встретится в таблице только для одного $x < \sqrt{\frac{N}{2}}$, то можно утверждать, что N — простое число. Такой метод определения простого числа значительно проще обычного метода последовательных делений числа N на простые до $\sqrt{N}$.

Эйлер поставил также проблему о представимости простых чисел формой $ax^2 + by^2$. Выяснив, что такое свойство этой формы зависит только от произведения $n = ab$, он назвал числа n , порождающие подобные формы, удобными числами (*numeri idonei*) и, установив далее критерий, при котором число является удобным, нашел 65 удобных чисел, наибольшее из которых 1848. По предположению Эйлера, 1848 — это последнее удобное число. Попытки Гаусса найти новые удобные числа не увенчались успехом, однако строгое доказательство предположения Эйлера не найдено до сих пор.

Много исследований Эйлер посвятил решению уравнений в целых и рациональных числах. В частности, он занимался решением в целых числах уравнения второго порядка с двумя неизвестными

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где a, b, c, d, e, f — целые числа. Для случая бесконечного числа решений Эйлер сводит вопрос к решению так называемого уравнения Пелля: $x^2 - Dy^2 = 1$, где D — натуральное число, не являющееся квадратом целого числа. Решение $x_0 = 1, y_0 = 0$ очевидно. Эйлер показывает, что следующее решение x_1, y_1 можно найти, пользуясь разложением $\sqrt{D}$ в непрерывную дробь. Зная x_1, y_1 , можно получить все решения x_n, y_n из формулы $(x_1 + y_1 \sqrt{D})^n = x_n + y_n \sqrt{D}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Периодичность непрерывной дроби для $\sqrt{D}$ строго доказал Лагранж.

Эйлер предложил способ получения бесконечного множества рациональных решений уравнения

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{k=0}^2 a_{i,k} x^i y^k = 0,$$

если известно одно его решение $x = a, y = b$, где $a, b, a_{i,k}$ — рациональные числа.

Своими работами Эйлер положил начало и другому направлению теоретико-числовых исследований — аналитической теории чисел, в которой свойства и отношения целых чисел изучаются методами анализа бесконечно малых.

Весьма интересны свойства простых чисел. Один из методов нахождения простых чисел указали еще древние греки (решето Эратосфена). Первый существенный теоретический результат получен Евклидом, доказавшим теорему о бесконечном множестве простых чисел. Эйлер в первом томе «Введения в анализ» (гл. XV) дал новое доказательство этой теоремы, основанное на тождестве

$$\frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)} = \sum_n \frac{1}{n^k} \quad (k > 1),$$

установленном им самим. Умножение ведется по всем простым $p > 1$, а суммирование — по всем натуральным n . Этим и было положено начало применению аппарата математического анализа к исследованию проблем дискретного переменного. Впоследствии, используя введенную Эйлером дзета-функцию

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

Чебышев и Риман установили закономерности в распределении простых чисел в натуральном ряду.

Наконец, от работ Эйлера ведут свое начало почти все исследования в аддитивной теории чисел. Так называемая проблема Гольдбаха возникла из переписки в 1742 г. между Гольдбахом и Эйлером. В конце своего письма Эйлеру от 7 июня 1742 г. Гольдбах пишет: «Кажется, по крайней мере, что каждое число, большее единицы, является суммой трех простых чисел». Отвечая Гольдбаху (письмо от 30 июня 1742 г.), Эйлер заметил, что считает истинной следующую теорему, которую, однако, не может доказать: «Всякое четное число, начиная с 6, есть сумма двух нечетных простых чисел». Из теоремы Эйлера непосредственно вытекает предположение Гольдбаха.

Понадобилось более 170 лет, чтобы пробить первую брешь в доказательстве этой труднейшей проблемы. Советский математик Л. Г. Шнирельман на основе введенного им понятия плотности последовательности в ряду натуральных чисел в 1930 г. доказал ослабленную теорему, заключающуюся в том, что всякое целое число представимо в виде конечного числа простых слагаемых (не более 800 000). Эта оценка была постепенно снижена другими математиками до 67. В 1937 г. И. М. Виноградову удалось доказать ослабленную теорему, состоящую в том, что всякое достаточно большое нечетное число представляется суммой трех простых чисел. Для четных чисел число слагаемых следует увеличить до четырех. Задача Эйлера о представлении четного числа суммой двух простых чисел еще не решена.

Эйлеру принадлежат и первые высказывания о трансцендентности некоторых классов чисел, получающихся в результате трансцендентных

операций над рациональными или даже алгебраическими числами. Во «Введении в анализ» (§ 105) он указывает, что логарифм рационального числа при рациональном основании, не являющийся целым числом, не может быть ни рациональным, ни даже иррациональным алгебраическим числом, а должен быть числом трансцендентным. В частности, если $a^{\sqrt[n]{b}} = b$, где n не есть точный квадрат, то, утверждает Эйлер, a и b одновременно не могут быть рациональными числами. В более общем виде эта задача была поставлена Д. Гильбертом и решена в 1929—1934 гг. советским математиком А. О. Гельфондом. Именно Гельфонд доказал, что всякое число a^{β} , где a — алгебраическое число, не равное нулю и единице, а β — алгебраическая иррациональность, является трансцендентным.

Много занимался Эйлер также другими числовыми вопросами, например вопросом о «дружественных» и «совершенных» числах, проблемой построения магических квадратов.

Дружественные числа впервые были рассмотрены пифагорейцами, назвавшими такими числа, каждое из которых является суммой делителей другого. Такова пара дружественных чисел 284 и 220 — единственная известная до Ферма пара дружественных чисел. В 1636 г. Ферма указал вторую пару таких чисел. Двумя годами позже третью пару указал Декарт. Эйлер предпринял систематическое исследование дружественных чисел и в 1747 г. дал список 30 пар. Позднее он довел число таких пар до 60. В настоящее время известно более 400 пар дружественных чисел.

Пифагорейцам приписывают открытие и так называемых совершенных чисел. Это числа, равные сумме своих собственных делителей. Например, $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число обязательно должно удовлетворять формуле, приведенной Евклидом в последнем предложении девятой книги «Начал», $2n = 2^p(2^p - 1)$, при условии, что p и $2^p - 1$ являются простыми числами. Таким путем было найдено девять четных совершенных чисел. До сих пор не известно ни одного нечетного совершенного числа, и вопрос о их существовании остается открытым.

Отличительной чертой работ Эйлера по теории чисел, как, впрочем, и всех его работ, является глубина и тонкость применяемых им методов исследования. Искусный вычислитель, он умел оперировать огромным числовым материалом и благодаря своей непостижимой интуиции приходил эмпирическим путем к установлению новых теоретико-числовых закономерностей.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ И ТЕХНИКА В ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА. МИРОВОЗЗРЕНИЕ ЭЙЛЕРА

1

Астрономия и механика твердого тела

Развитие механики в середине XVIII в. было тесно связано с развитием промышленности, техники и мореплавания. Кинематика и динамика материальной точки, динамика дискретной системы материальных точек, кинематика и динамика твердого тела, теория упругости, теория турбин, теория корабля, сопротивление материалов, строительная механика, теория колебаний, теория устойчивости, небесная механика, проблема n тел, теория Луны — вот основные направления исследований по механике в этот период.

Многие труды Эйлера посвящены исследованию теоретической и практической астрономии. Особенно многочисленны они по теоретической астрономии: именно в этой области он мог наиболее плодотворно применить математический анализ. После открытия Ньютоном закона всемирного тяготения важнейшей задачей являлось установление средствами математического анализа на основе этого закона характера движения планет. Открытия Эйлера определили более чем на столетие вперед пути развития небесной механики, однако некоторые его идеи слишком опережали свое время и потому были скоро забыты. Только в последнее время наука вновь вернулась к этим идеям Эйлера.

Теория невозмущенного движения планет — фундамент теоретической астрономии. Вклад Эйлера в ее развитие состоит в применении средств анализа бесконечно малых для вычисления орбит планет и комет. Из многочисленных работ Эйлера в этой области особенно важны трехтомный трактат «Теория движения планет и комет, содержащая легкий метод, позволяющий посредством нескольких наблюдений определить орбиты как планет, так и комет» (1774 г.) и «Механическая астрономия» (опубликована после смерти Эйлера, 1862 г.), вторая и третья главы которой посвящены решению задачи двух тел и весьма обстоятельному изучению невозмущенного движения в случаях эллиптического, параболического и гиперболического движений. В них он дал первые аналитические методы определения кометных орбит по трем наблюдениям и вычислил орбиты многих комет.

Однако теория невозмущенного движения все же не отражает действительного положения вещей. Движение небесных тел значительно сложнее из-за так называемых возмущающих влияний других тел. Возмущения небесных тел возникают вследствие заметного притяжения со стороны одного или нескольких других тел либо несферичности притягивающихся тел. В движении кометы или планеты вокруг Солнца это происходит вследствие притяжения других планет, в движении спутников вокруг планеты — вследствие притяжения Солнца или эллипсоидальности самой планеты, в движении двойных звезд — вследствие притяжения третьей звезды, иногда невидимой. Орбиты небесных тел при этом могут быть чрезвычайно разнообразными и, вообще говоря, очень сложными. Изучение таких «возмущенных» орбит представляет большие математические трудности уже в случае трех тел и составляет главную задачу небесной механики. Одним из основных методов решения этой задачи является метод вариации произвольных постоянных, впервые предложенный Эйлером еще в «первой лунной теории» в 1753 г.

Значительный шаг вперед Эйлер сделал в изучении вопросов приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение. В частности, он начал разработку методов разложения возмущающих сил в тригонометрические ряды. Подобные разложения стали источником дальнейшего прогресса в этой области. Эйлер открыл и использовал основные свойства коэффициентов тригонометрических рядов и этим заложил фундамент теории гипергеометрических функций. Однако коэффициенты таких тригонометрических рядов получили имя не Эйлера, а Лапласа. Произошло это только потому, что астрономы изучали метод Эйлера по «Небесной механике» Лапласа, где имя Эйлера не упомянуто. Способ получения коэффициентов тригонометрических рядов при помощи тригонометрического интерполирования введен в науку также Эйлером и также не связывается в научной литературе с его именем.

Стараясь объяснить наблюдаемые неправильности в движениях Юпитера и Сатурна, Эйлер сначала искал причину в вековых возмущениях и в возмущениях, зависящих от разности долгот этих планет. Развитые им методы принесли впоследствии большую пользу. Но решить поставленную задачу ему не удалось. Главной причиной неудачи было вычисление возмущений, зависящих только от первых и вторых степеней эксцентриситетов. По той же причине были неудачны и аналогичные попытки Лагранжа. Загадка больших неравенств в движениях Юпитера и Сатурна была разрешена много позднее. В 1784 г., после целого ряда попыток, Лапласу удалось найти истинную причину этих неравенств. Оказалось, что они связаны с такими членами в разложениях возмущающих сил, которые, хотя и очень малы, как величины третьей степени относительно эксцентриситетов, становятся весьма значительными вследствие малости делителя, появляющегося при интегрировании. Как видим, Эйлер был очень близок к открытию важных свойств вековых возмущений, и только ошибки в вычислениях помешали ему сделать это.

Одной из актуальнейших проблем астрономии XVIII в. была теория движения Луны. Проблема решалась в двух аспектах — теоретическом и практическом. Сущность теоретического аспекта заключалась в создании чисто гравитационной теории движения Луны, которая подтвердила бы точность закона тяготения Ньютона. Дело в том, что некоторые наблюдения резко расходились с выводами, следовавшими из закона всемирного тяготения Ньютона. Эйлеру удалось много сделать для решения этой задачи, однако окончательный ответ на нее был получен уже в XX в. Во втором аспекте работы по теории движения Луны указали путь к решению важнейшей задачи мореплавания того времени — определения долготы.

Первую чисто гравитационную теорию движения Луны дал Клеро. Она полностью подтвердила закон тяготения Ньютона. Эйлер переработал и видоизменил теорию Клеро и придал ей вид, более удобный для составления таблиц движения Луны. Работа Эйлера была опубликована в 1753 г. под заглавием «Теория движения Луны, содержащая все неравенства тел, с добавлением». Именно эта так называемая первая лунная теория Эйлера получила наибольшее практическое применение. Геттингенский астроном Т. Майер положил ее в основу лунных таблиц, точность определения долгот по которым вызывала изумление современников. Таблицы несколько раз переиздавались и, являясь основой астрономических ежегодников, использовались для нужд мореплавания около 100 лет.

Эйлер продолжал работать над улучшением теории движения Луны. В 1772 г. он опубликовал сочинение «Теория Луны, обработанная новым методом вместе с астрономическими таблицами, с помощью которых можно легко вычислить положение Луны для любого времени», где изложил новую теорию движения Луны, позволявшую с меньшей, чем прежде, ошибкой определять долготы на земной поверхности. В этой работе Эйлер предложил способ для учета некоторых неравенств в движении Луны, которые были недоступны в первой его теории. В математическом смысле вторая теория представляла больший интерес и имела огромное значение как базис для дальнейших усовершенствований. Успех этой выдающейся работы был огромным. По словам акад. А. Н. Крылова, Эйлер в ней опередил свой век на 100 лет. Новейшие лунные теории американских астрономов Дж. Хилла и Э. Брауна являются в некотором смысле возвратом к методам Эйлера.

В мемуаре «Замечания о задаче трех тел», представленном Берлинской академии наук в 1763 г. (опубликован в 1770 г.), Эйлер предложил метод, заключающийся в численном интегрировании дифференциальных уравнений задачи трех тел. Задача трех тел, как известно, состоит в определении положений и скоростей трех тел, движущихся только под действием взаимного притяжения по закону всемирного тяготения Ньютона. Эта задача — частный случай более общей задачи о движении n притягивающихся тел. Сами тела рассматриваются как материальные точки.

Для решения задачи трех тел необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения движения тел. Полное аналитическое реше-

ние задачи можно получить в виде бесконечных рядов, дающих координаты тел в зависимости от времени. Преимущество метода Эйлера перед аналитическими методами заключается в том, что он позволяет находить координаты светила совершенно точно во всех трудных задачах, где это возможно только численным интегрированием уравнений движения. Эйлер с успехом применил его в теории движения Луны, при изучении движения планет.

Однако этот метод Эйлера был забыт, и к нему возвратились лишь в начале XX в. Коуэлл применил численное интегрирование уравнений движения в декартовых координатах при изучении движения открытого восьмого спутника Юпитера и движения кометы Галлея. И в практику астрономических исследований метод этот вошел под названием «метод Коуэлла», хотя впервые был применен Эйлером. Эйлеру (а не Якоби) принадлежит также постановка «ограниченной» задачи трех тел.

Важное значение имели работы Эйлера по теории морских приливов и отливов. Одна из его первых астрономических работ — «Физическое исследование причин приливов и отливов морей» — относится к ньютоновой теории морских приливов и отливов. Ньютон объяснял приливы притяжением водных масс Луной и Солнцем. Парижская академия наук организовала в начале XVIII в. наблюдения над приливами во французских портах. Оказалось, что результаты этих наблюдений только отчасти могли быть объяснены теорией Ньютона. Поэтому академия в 1740 г. объявила конкурс на лучшую работу о морских приливах и отливах. Премия была присуждена Эйлеру, Д. Бернулли и Маклорену. Числовые результаты Д. Бернулли и Эйлера во многом совпадали. Созданная Ньютоном и более подробно разработанная Эйлером, Маклореном и, особенно, Д. Бернулли так называемая статическая теория приливов допускает, что вся поверхность Земли покрыта глубоким океаном, вода представляет собой жидкость, лишенную вязкости и инерции, и поэтому в любой данный момент поверхность океана успевает принять равновесную форму, определяемую действием силы тяжести и сил Луны и Солнца. Такой фигурой равновесия является эллипсоид вращения с большой осью, направленной к притягивающему светилу.

В конце своей жизни Эйлер еще раз вернулся к теории приливов в мемуаре «О равновесии моря под действием сил Солнца и Луны» (1780 г.). Однако в этой работе он объясняет лишь главные черты явления.

Недостатки статической теории привели к попыткам заменить ее динамической теорией. Лаплас рассматривал приливы как колебательное волнообразное движение океана, покрывающего всю Землю, с периодами, равными периодам действующих сил. Однако теория Лапласа не учитывала влияния трения и распределения материков и поэтому являлась лишь довольно грубым приближением к действительности. Впоследствии она была заменена более совершенными теориями. Эйлер начал разработку динамической теории, учитывающей инерцию водных

масс и их колебания. Вероятно, в связи с работой Эйлера участники Камчатской экспедиции провели и некоторые океанографические исследования, касающиеся вопроса о приливах и отливах. В «Примечаниях» к «Санкт-Петербургским ведомостям» в 1740 г. была опубликована даже специальная инструкция, вероятно составленная Эйлером, «О том, как должно примечать морской прилив и отлив».

Изучал Эйлер и теорию вращения Земли. В исследованиях прецессии и нутации он опирался на созданную им механику твердого тела. Теория суточного вращения Земли, возмущаемого притяжением Луны и Солнца, по существу излагается и ныне в той форме, которую ей придал Эйлер. Различие состоит только в том, что Эйлер считал Землю абсолютно твердым, а не упругим телом, вследствие чего период так называемой эйлеровой нутации оказался несколько увеличенным. Предметом исследования Эйлера были также фигура Земли и, в связи с этим, вопрос о притяжении эллипсоидов, сферическая тригонометрия, в работах по которой содержатся формулы для решения основных задач высшей геодезии, практическая астрономия (теория абберации, рефракция, теоретическая фотометрия, теория суточного параллакса, вопросы вычисления координат небесных светил и др.). Вычисление в то время в России с большой точностью значения солнечного параллакса стало возможным благодаря Эйлеру.

Л. Эйлер был выдающимся не только математиком, но и механиком. Более 200 его работ посвящены самым разнообразным проблемам механики. Из них более 160 — ее теоретическим проблемам: общим вопросам (учение о пространстве, о природе материи и сил, о принципе наименьшего действия), механике точки и твердого тела, давлению и удару, трению, теории упругости и сопротивлению материалов, гидро- и аэромеханике. В остальных работах освещены вопросы теории машин, гидравлики, баллистики, теории корабля и других областей прикладной механики. Многие вопросы механики он затрагивает в работах по астрономии, акустике и др. Многие же чисто математические работы Эйлера написаны под влиянием разнообразных задач механики и теоретической астрономии.

Первая печатная работа Эйлера, написанная в 1725 г., посвящена задаче об изохронных кривых, возникающих при движении тела в сопротивляющейся среде. В 1736 г. вышел двухтомный трактат Эйлера по механике — «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении», принесший ему мировую славу. В нем Эйлер блестяще решил задачу перевода проблем динамики на язык нового, математического анализа. Под механикой он понимал именно науку о движении, в отличие от статики. Ясность идей, точность формулировок, четкий порядок изложения, а главное общность и глубина трактата сразу же выдвинули его автора на первое место среди математиков того периода. В нем Эйлер объединил выработанные основы механики и методы математического анализа. Переведя на лаконичный язык математического анализа, главным образом дифференциальных уравнений, результаты, полученные в науке о движении, он предложил ряд новых методов исследования и решения новых проблем. Можно сказать, что в развитии

механики рассматриваемый трактат сыграл такую же роль, как «Введение в анализ» в истории математического анализа.

Трактат Эйлера был первой работой по теоретической механике. В целом он посвящен динамике материальной точки. В первом томе излагается движение свободной точки в пустоте и в сопротивляющейся среде, во втором — движение несвободной точки. Специальное внимание уделяет Эйлер важному для внешней баллистики случаю, когда сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Во втором томе особенно важное значение имеет последняя глава, в которой речь идет о движении точки по данной поверхности. В ней Эйлер развил учение о кривизне плоских сечений поверхностей и геодезических линиях на поверхности.

Другой фундаментальной работой Эйлера по аналитической механике был трактат «Теория движения твердых или жестких тел, установленная на основных принципах нашего познания и приспособленная ко всяким движениям, которые могут иметь названные тела», изданный в 1765 г. на латинском языке. Основное ее содержание составляет динамика твердого тела. Заслуги Эйлера так велики, что его по праву следует назвать основоположником этого раздела механики.

Во введении, состоящем из шести глав, излагается динамика точки. Эйлер приводит дифференциальные уравнения движения, пользуясь проектированием на оси неподвижной декартовой системы координат. Так поступал он уже и раньше, например в «Теории движения Луны» (1753 г.). Однако в этой работе дифференциальные уравнения движения имеют уже современный вид:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A},$$

где A — масса тела; x, y, z — координаты движущейся точки; p, q, r — проекции действующей силы; λ — коэффициент пропорциональности. Эти уравнения Эйлер получает из так называемого закона ускоряющих сил.

Основное содержание трактата излагается в 19 главах. Эйлер вырабатывает ряд научных абстракций и количественных механических характеристик твердого тела, прочно вошедших в науку. В первой главе рассматривается геометрия масс (в современном определении). Сначала излагаются понятие и способы определения центра инерции твердого тела, теория моментов, в которой, в частности, используются и так называемые углы Эйлера, впервые введенные им в 1748 г.

Далее Эйлер подробно рассматривает задачу вращения тела около неподвижной оси по инерции и под действием силы тяжести (в связи с этим он вводит понятия «главные оси инерции» и «свободные оси вращения»), впервые формулирует общую задачу определения произвольного движения свободного тела, подверженного действию произвольных сил. Такое движение, указывает он, в любой момент времени раскладывается на поступательное движение, которым обладает его центр инерции, и вращательное движение вокруг некоторой оси, проходящей через этот центр инерции. В конце трактата Эйлер выводит систему шести

дифференциальных уравнений твердого тела: три уравнения для описания движения центра инерции

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d^2x}{dt^2} dm &= P \\ \int \frac{d^2y}{dt^2} dm &= Q \\ \int \frac{d^2z}{dt^2} dm &= R, \end{aligned} \right\}$$

где P, Q, R — компоненты результирующей силы; dm — масса элемента объема, и три уравнения, определяющие вращательное движение твердого тела вокруг его центра инерции,

$$\left. \begin{aligned} \int z \frac{d^2y}{dt^2} dm - \int y \frac{d^2z}{dt^2} dm &= S \\ \int x \frac{d^2z}{dt^2} dm - \int z \frac{d^2x}{dt^2} dm &= T \\ \int y \frac{d^2x}{dt^2} dm - \int x \frac{d^2y}{dt^2} dm &= U, \end{aligned} \right\}$$

где S, T, U — суммарные моменты сил, приложенных к различным точкам твердого тела.

Для определения вращательного движения твердого тела в системе осей, жестко связанных с движущимся телом и направленных из его центра инерции вдоль главных осей инерции, Эйлер указывает другую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C) qr + L \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A) rp + M \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B) pq + N, \end{aligned} \right\}$$

где p, q, r — угловые скорости вращения твердого тела относительно трех указанных главных осей; A, B, C — главные моменты инерции тела; L, M, N — суммарные моменты совокупности сил, приложенных к точкам рассматриваемого твердого тела, относительно тех же осей координат. Впервые эта система была приведена им несколько ранее, в одной из работ, опубликованных в «Записках Берлинской академии наук» за 1758 г.

Теория вращательного движения твердого тела впоследствии выросла в отдельный раздел теоретической механики. Стимулом для Эйлера в развитии этой теории было исследование задачи о колебательном движении корабля и астрономической задачи о вращательном движении Земли, решение которой было необходимо для построения теории прецессии и нутации. Существенный интерес теория вращательного движения твердого тела представляла и для решения некоторых проблем ар-

тиллерии. В XIX в. она приобрела еще большее значение в связи с усилившимся применением гироскопов.

Проинтегрировать в общем виде составленные уравнения вращения твердого тела около неподвижной точки Эйлеру не удалось. Он ограничился разбором одного частного случая — инерционного движения тяжелого твердого тела, закрепленного в центре тяжести, — и хотя и указал путь к полному решению задачи, качественного исследования свойств движения не провел.

Рассмотренный трактат Эйлера имел огромное значение для развития механики. Можно сказать, что механика твердого тела была создана Эйлером.

2

Гидродинамика, гидравлика и акустика

Главная заслуга в создании механики жидких и газообразных тел принадлежит членам Петербургской академии наук Даниилу Бернулли и Леонарду Эйлеру. Они являются основоположниками гидродинамики как науки. Д. Бернулли и Л. Эйлер сформулировали основные законы движения идеальной жидкости. В течение почти 150 последующих лет исследования в области гидродинамики, за немногими исключениями, велись применительно именно к идеальной жидкости.

В начале своей научной деятельности в Петербурге Эйлер под влиянием Д. Бернулли занялся механикой жидких тел, в частности гидравлическими исследованиями истечения жидкостей через отверстия и насадки. (С Даниилом Бернулли Эйлер поддерживал дружеские отношения, был в курсе его работы над «Гидродинамикой».) В 1737 г. он начал работать над «Морской наукой», где изучает вопросы устойчивости плавающих тел. В 1744 г. вышел в свет его перевод книги Робинса «Новые начала артиллерии», в которой также рассматриваются вопросы гидро- и аэромеханики. В частности, в «Добавлениях» Эйлера к книге Робинса приведен известный гидравлический «парадокс Даламбера — Эйлера»: при плавном неотрывном обтекании твердого тела невихревым потоком идеальной жидкости давление жидкости на тело равно нулю. В отличие от Даламбера Эйлер дал строгое общее доказательство «парадокса» и разъяснил позже в работе «Пояснение сопротивления жидкостей» причину его расхождения с опытом.

В 50-х годах Эйлер подготовил к изданию несколько больших работ по гидромеханике. В «Открытии нового принципа механики» (1750 г.) он дает первую общую формулировку дифференциальных уравнений движения бесконечно малой массы, положение которой определяется в общем случае тремя декартовыми прямоугольными координатами. В другой работе — «Общие начала состояния равновесия жидкостей» (1753 г.) — Эйлер в своих рассуждениях исходит из принципа непрерывного распределения материи и становится, таким образом, на точку зрения теории поля (по современной терминологии). Благодаря

такому подходу ему удается найти выражение для внутреннего давления в самой общей форме. Давление он измеряет высотой столба однородной жидкости и, указывая на зависимость давления от плотности и температуры, выводит дифференциальное уравнение равновесия жидкостей и газов в виде

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz),$$

или

$$dp = Ldx + Mdy + Ndz,$$

где p — давление; q — плотность в рассматриваемой точке; P, Q, R — проекции на координатные оси вектора напряженности поля массовых сил. Далее Эйлер вводит понятие потенциала сил S и, переписывая общее уравнение в виде $dp = qdS$, указывает, что давление, плотность и температура на поверхностях уровня постоянны. Затем он выводит известную барометрическую формулу и высказывает предложение об измерении температуры, которую считает целесообразным определять пропорционально давлению газа при постоянном объеме. В последней части работы рассматривается равновесие жидкостей под действием одной или нескольких центральных сил.

Следующая большая работа Эйлера, «Начала движения жидкостей», была закончена примерно в 1752 г., но издана только в 1761 г. на латинском языке в шестом томе «Новых Комментариев» Петербургской академии наук. В этой работе он выводит уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где u, v, w — компоненты скорости движения по трем взаимно перпендикулярным осям, которые определяются как частные производные некоторой потенциальной функции S , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0,$$

вновь полученному позже Лапласом («уравнение Лапласа»).

Работа Эйлера «Общие начала движения жидкостей», изданная в 1757 г., имела решающее значение для всего последующего развития гидродинамики. В ней содержатся известные эйлеровы дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Основные дифференциальные уравнения гидродинамики Эйлер получает, применяя общие законы механики к элементарной массе жидкости и переходя затем к пределу при стремлении к нулю объема, занимаемого этой массой. Три уравнения (в проекциях на оси координат) получаются в результате применения к элементу жидкости закона количества движения, четвертое, называемое уравнением неразрывности движения, — в результате применения к этому же элементу закона сохранения массы.

Первые три уравнения Эйлера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P - \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ Q - \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ R - \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\}$$

где P , Q , R — проекции внешних сил, отнесенные к единице массы жидкости; u , v , w — компоненты скорости движения; q — плотность; x , y , z — координаты точки; p — давление; t — время. Эти уравнения справедливы как для несжимаемой жидкости, так и для газа. Если прибавить к их левым частям соответственно члены $v\Delta u$, $v\Delta v$, $v\Delta w$, то получатся уравнения Навье — Стокса для движения вязкой, несжимаемой жидкости (v — кинематический коэффициент вязкости, Δ — оператор Лапласа). Если присоединить, пишет Эйлер, к этим трем уравнениям то, которое дано рассмотрением неразрывности жидкости,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \frac{\partial (qv)}{\partial y} + \frac{\partial (qw)}{\partial z} = 0,$$

и то, которое дает связь между упругостью p , плотностью q и другим свойством r , влияющим на упругость p , помимо плотности q , получится пять уравнений, заключающих в себе всю теорию «движения жидкости».

Уравнение неразрывности в общем виде приведено впервые. Величину r Эйлер вводит для характеристики теплового состояния жидкости, а под p понимает, вообще говоря, упругость жидкости. Для несжимаемых жидкостей он получает формулу

$$p = g \left(C + S - \Pi - \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} w^2 \right),$$

где S — потенциал сил; Π — частная производная от потенциала скорости по времени; g — постоянная плотность; C — константа, зависящая от времени. Эта формула представляет собой известный «интеграл Лагранжа — Коши» для несжимаемых жидкостей.

Исследование Эйлера «Продолжение исследований по теории движения жидкостей», опубликованное в 1757 г., посвящено некоторым общим теоремам о движении жидкостей в произвольных трубках. В работе «Разъяснение о сопротивлении жидкостей» (1760 г.) рассматриваются сложные проблемы гидромеханики. В ней приведен первый нетривиальный пример безвихревого обтекания криволинейного контура плоскопараллельным потоком. В физической постановке вопроса Эйлер значительно опередил свое время, и это его исследование осталось без внимания. В частности, он приводит своеобразный «полуобратный» метод решения гидродинамических задач. Подобные методы начали употреблять в гидромеханике только в последние десятилетия.

Эйлер не подвел итога своим гидромеханическим исследованиям в одном сочинении, однако фактически это было им сделано в четырех больших мемуарах, охватывающих гидростатику, гидродинамику,

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. V.

ad Annum MDCCCLIV. et MDCCCLV.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCCLX.

Титульная страница академического журнала «Новые Комментарии...»

гидравлику и акустику: «Раздел первый, о состоянии равновесия жидкостей», «Раздел второй, о началах движения жидкостей», «Раздел третий, о линейном движении жидкостей, по преимуществу воды» и «Раздел четвертый, о движении воздуха в трубах» («Novi Commentarii», т. 13 — 16, 1768—1771).

Первый раздел включает общие свойства жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и частные случаи равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во втором разделе выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и подробно рассмотрены случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе вихревого вращения вокруг прямой оси, а также потенциального движения, определяется движение жидкости по заданному начальному состоянию и выведены, в частности, общие уравнения гидродинамики в «переменных

Лагранжа». Третий раздел посвящен движению в трубах постоянного и переменного сечений, расчету подъема воды при помощи насосов и исследованию движения жидкостей под действием разности температур. В четвертом разделе завершены исследования Эйлера по акустике. Началом этих его исследований был трактат «Опыт новой теории музыки», изданный в 1739 г. Трактат не имел успеха, так как, по словам Н. Фусса, «для математиков там было слишком много музыки, а для музыкантов — слишком много математики». В нем дана математическая теория музыки, изложено физико-математическое учение о консонансе, рассмотрены вопросы возникновения и распространения звука, интерференция звуковых волн, а также теория музыкальных инструментов. Затем последовали статьи о распространении звука, о малых колебаниях воздуха в трубах постоянного и переменного сечений, о колебании мембран, колец, колоколов, литавр. Математическим аппаратом этих исследований являются уравнения в частных производных второго и высших порядков, большей частью линейные.

В 1759 г. Эйлер начал исследования по механике газов. Эти работы («О распространении звука», «Добавление к исследованиям о распространении звука», «Продолжение исследований о распространении звука») были напечатаны только в 1766 г. в «Мемуарах Берлинской академии наук» за 1759 г. В них приведены общие дифференциальные уравнения для смещения частиц воздуха при звуковых колебаниях, рассмотрены решение задачи движения воздуха в трубе постоянного сечения, а также приложения теории возникновения и распространения звука к объяснению звучания музыкальных инструментов.

И, наконец, завершением акустических работ Эйлера, как уже упоминалось, явилась его работа «О движении воздуха в трубах» (четвертый раздел), в которой он рассматривает распространение звука в трубах переменного сечения.

Гидродинамические изыскания Эйлера нашли применение, в частности, в динамической метеорологии. Полученное при решении проблемы колебания струн переменной толщины уравнение

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + m(x+y) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + nz = 0$$

впоследствии нашло широкое применение в газовой динамике.

3

Сопротивление материалов

В разработке учения о сопротивлении материалов у Эйлера уже были предшественники. Начало этой науке положил Галилей в известных «Беседах» (1638 г.), где впервые ввел понятие напряжения. В 1660 г. Р. Гук открыл закон о прямой пропорциональности между нагрузкой и удлинением при растяжении. В 1680 г. Э. Марриот установил такой же закон для деформации изгиба.

Я. Бернулли применил к исследованию упругих линий (эластики) исчисление бесконечно малых. Он получил (1705 г.) дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса и показал, что кривизна кривой изгиба пропорциональна в каждой точке изгибающему моменту в той же точке. Основываясь на этом положении Я. Бернулли, Эйлер исследовал форму кривых, которую принимает тонкий гибкий упругий стержень при различных условиях его нагружения. Результаты Эйлера в этой области изложены в первом приложении к «Методу нахождения кривых линий» (1744 г.) В одном из писем Д. Бернулли подал Эйлеру мысль использовать для вывода уравнений упругих кривых вариационное исчисление, т. е. свести вопрос к задаче о минимуме некоторого интеграла. Воспользовавшись этим советом, Эйлер получил дифференциальное уравнение Я. Бернулли

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

где ds — дифференциал дуги; α, β, γ — постоянные, и проинтегрировал его при различных граничных условиях. В результате он нашел 9 упругих линий, соответствующих этому уравнению (среди них были и кривые, полученные ранее Я. Бернулли), и классифицировал их по величине угла, образуемого направлением силы P с касательной к упругой линии в точке приложения нагрузки. Если угол весьма мал, то это случай продольного изгиба колонны под действием осевой сжимающей силы. Если сжимающая сила превысит некоторое определенное значение, «то колонна не сможет сопротивляться изгибу». При помощи

бесконечных рядов Эйлер нашел величину этой силы, получившей название критической, или эйлеровой. Формула Эйлера имеет вид

$$P = \frac{C\pi^2}{4l^2},$$

где сила P пропорциональна жесткости C («абсолютной упругости») и обратно пропорциональна квадрату длины l . Итак, основная формула теории упругости была дана Эйлером более 200 лет назад.

Формулу для критической нагрузки Эйлер вновь выводит в мемуаре «О нагрузке колонн» (1757 г.) при рассмотрении линейаризованного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0,$$

где v — прогиб в произвольной точке стержня с координатой x (ось x направлена по вертикали):

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

и для прогиба

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Так как f — постоянная, то получается парадоксальный вывод о том, что критическая сила может вызвать прогиб произвольной величины. Нелепость этого вывода очевидна. «Единственный вывод, который может быть сделан из только что указанного обстоятельства, состоит в том, что после достижения нагрузкой критического значения зависимость между нагрузкой и вызываемым ею прогибом не может быть получена из линейаризованного дифференциального уравнения изогнутой оси»¹. Применяя нелинейную теорию, Эйлер получает такую зависимость между длиной стержня, величиной приложенных к концам стержня одинаковых сил P и максимальным прогибом (в середине стержня) f :

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{f^2 P}{4EJ} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4EJ} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Вводя затем в эту формулу критическую силу

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, он находит приближенную формулу

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} - 1}.$$

Следующее приближение

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} - 1} \left\{ 1 - \frac{19}{16} \left(\frac{P}{P_{кр}} - 1 \right) \right\}.$$

¹ Е. Л. Н и к о л а и. Труды по механике. Техиздат, М., 1955, стр. 437—439.

Заканчивает работу Эйлер исследованием случая, когда принимается во внимание собственный вес колонны. Полученное дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} + Pv + \int_0^x q\xi \frac{dv}{d\xi} d\xi = 0.$$

В мемуаре «Определение нагрузок, которые могут выдержать колонны», положив $P = 0$, он находит интеграл в виде бесконечного ряда:

$$v = A \left\{ x - \frac{1}{4!} \cdot \frac{q}{EJ} x^4 + \frac{1 \cdot 4}{7!} \left(\frac{q}{EJ} \right)^2 x^7 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{10!} \left(\frac{q}{EJ} \right)^3 x^{10} + \dots \right\}.$$

Однако оказалось, что необходимое для такой представимости уравнение $v = 0$ при $x = l$ не имеет действительных корней. Парадоксальность полученного результата Эйлер проверяет в мемуаре «Исследование удивительного парадокса в теории колонн». Приведенное графическое исследование подтверждает прежний результат. Этот парадокс Эйлер решает блестяще. Он находит верное уравнение

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} + \int_0^x q\xi \frac{dv}{d\xi} d\xi - Nx = 0,$$

где N — величина заранее неизвестных горизонтальных реакций, которые должны быть приложены к концам колонн, чтобы эти концы оставались на первоначальной вертикали.

Трактат «Метод изобретения» (1744 г.) посвящен изучению различных случаев поперечных колебаний стержней и выводу формулы частоты для этих случаев. Исследуя колебания консоли, Эйлер замечает, что ее движение в точности совпадает с колебаниями простого изохронного маятника. Рассматривая бесконечно малый элемент в какой-то момент времени, он кроме движущих сил исследует и силы инерции. Таким образом, Эйлер приходит к выводам, которые ныне устанавливаются на основе принципа Даламбера.

4

Теория корабля

Еще 20-летним юношей Эйлер представил на конкурс, объявленный Парижской академией наук, сочинение «Размышления о проблеме расположения мачт на корабле». Это сочинение было удостоено в 1727 г. почетного отзыва и напечатано в собрании премированных трудов, «что особенно замечательно, ибо в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках, если не считать малых речных и озерных судов»². «Размышлениями» Эйлер начал серию

² А. Н. Крылов. Собрание трудов. Т. 1. Ч. 2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 193.

своих работ по вопросам навигации. Он является основоположником теории корабля как точной науки. В 1749 г. Петербургская академия наук опубликовала большой двухтомный труд Эйлера по теории корабля «Корабельная наука, или трактат о конструкции кораблей и их вождении» (как уже упоминалось, труд этот был написан Эйлером по особому поручению академии). Начал писать его Эйлер в 1737 г. и почти закончил в 1740 г. к моменту отъезда в Берлин.

«Корабельная наука» Эйлера была первым крупным монографическим исследованием по теории остойчивости корабля. Остойчивость и равновесие судов, качка на зыби, форма судов, кораблестроение, движение судов силой ветра и управление судном — все эти вопросы охвачены в сочинении. Эйлер показал, что исследование корабля дает обширный материал для приложения математики, теория остойчивости корабля должна давать конструктивные рекомендации кораблестроителям.

В этом же году был издан реферат книги на русском языке. Это было первое специальное сочинение по остойчивости корабля на русском языке.

В 1753 г. Парижская академия наук предложила на конкурс ряд тем по теории и строительной механике корабля. Появилась необходимость в расчете корабля как целого сооружения, причем теория корабля должна была предложить строительной механике корабля величины тех усилий, которым корабль может подвергаться на волнении. Общие приемы такого исследования и дал Эйлер в 1759 г. в мемуаре «Исследование усилий, которые должны выносить все части корабля во время боковой и килевой качки», премированном Парижской академией. В результате исследований Эйлера, писал А. Н. Крылов, военный парусный корабль получил ту форму и развитие, которые он сохранил почти без изменений сто лет, т. е. до 1850 г., когда ему на смену пришли паровые суда, а затем и броненосцы.

В трудах по теории корабля Эйлер широко использовал высшую математику, поэтому они были малодоступны практикам морского дела. Впоследствии Эйлер изложил полную теорию кораблестроения и маневрирования судов в популярной форме, чтобы ее выводами могли пользоваться и капитан, и строитель. Труд этот появился в 1773 г. под названием «Полная теория конструкции и вождения кораблей, приспособленная к уровню изучающих навигацию» и имел необычайный успех. Он был издан во Франции, Англии и Италии. На русском языке книга вышла в 1778 г. под названием «Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочиненное в пользу учащихся навигации Леонгардом Эйлером, а с французского подлинника переведенное Академии наук адъютантом Михайлом Головиным». Этот перевод является первым учебным пособием на русском языке, посвященным в основной своей части теории устойчивости.

Зарождение баллистики как науки относится к XVI в.

Первыми трудами по баллистике можно считать книги Никколо Тарталья «Новая наука» (1537 г.) и «Вопросы и открытия, относящиеся к артиллерийской стрельбе» (1546 г.). Баллистикой занимались также Галилей, Торричелли и Мерсенн. Первые исследования о сопротивлении воздуха движению артиллерийского снаряда принадлежат Ньютону («Математические начала натуральной философии», 1686). После Ньютона в XVII и XVIII вв. вопросами внешней баллистики занимались Х. Гюйгенс, П. Вариньон, Я. Герман, И. Бернулли, Б. Робинс, Ж. Даламбер, Л. Эйлер. Наибольшее значение имеют работы Б. Робинса и Л. Эйлера.

Эйлеру принадлежит пять специальных работ по баллистике. Однако решения задач в этой области содержатся и в других его трудах.

Первое изыскание Эйлера по баллистике связано с опытами, проводившимися в 1727 г. в Петербурге Д. Бернулли, изучавшим движение выброшенного вертикально вверх сферического снаряда. Мемуар Эйлера «Размышления по поводу недавно предпринятых опытов стрельбы из орудия» впервые был опубликован лишь в 1862 г.

Исследованием основной задачи внешней баллистики Эйлер занимался более 15 лет, постепенно совершенствуя как ее решение, так и метод, которым он пользовался. Впервые решение им было дано в шестой главе его знаменитой «Механики». Эйлер пользуется методом И. Бернулли, принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости. И. Бернулли и Л. Эйлер являются основоположниками аналитического метода решения основной задачи внешней баллистики.

Эйлер перевел на немецкий язык книгу английского математика и механика Б. Робинса «Новые начала артиллерии» и снабдил ее своими «Добавлениями», которые по объему в пять раз превосходят текст Робинса. Под названием «Новые основания артиллерии Робинса» в переводе Эйлера книга вышла в 1744 г.

Высоко оценили труд Эйлера Иоганн и Даниил Бернулли. Д. Бернулли писал (7 сентября 1745 г.) Эйлеру об этой книге: «Вашему успеху и признанию воздаю хвалу на весь свет». Книга является, по сути, самостоятельным исследованием Эйлера, дающим новую теорию движения снаряда в воздухе и в канале ствола орудия (Эйлер только из скромности на первом месте в заглавии сочинения поставил имя Робинса). Эйлер придавал большое значение экспериментальной части книги Робинса, основанной на материале опытов, произведенных с помощью баллистического маятника. Баллистический маятник, изобретенный в 1740 г. Б. Робинсом, позволял измерять скорость полета ружейных пуль в данной точке траектории. По мнению Эйлера, изобретение этого прибора было самым крупным открытием XVIII в. в артиллерии. «Однако ему (Робинсу.— *Ред.*) не удалось дать строгий

и вполне безупречный метод экспериментального определения скоростей... Эйлер создал первую классическую теорию баллистического маятника, установив надежную формулу для определения скоростей пуль и предложив вполне строгую методику проведения экспериментов с помощью этого прибора»³.

В книге «Новые основания артиллерии» Эйлер приводит аналитическое выражение для закона сопротивления воздуха в виде двучлена, первый член которого, пропорциональный квадрату скорости, обусловливается ударом шарового снаряда о воздух, второй, пропорциональный четвертой степени скорости, — превышением давления сжатых частей струй воздуха на переднюю часть над давлением разреженных частей воздуха на заднюю часть. С математической точки зрения рассматриваемая проблема представляла весьма большие трудности. Даже в настоящее время невозможно в конечном виде проинтегрировать уравнения движения в предположении, что закон сопротивления воздуха представляется в виде двучлена, за исключением лишь случая, рассмотренного Даламбером, когда первый член не зависит от скорости, а второй — пропорционален ее квадрату. Заслуга Эйлера состоит в том, что он положил начало разработке численных методов решения основной задачи внешней баллистики, отыскивая решение в виде бесконечных рядов.

Наиболее существенные результаты решения основной задачи внешней баллистики изложены Эйлером в мемуаре «Исследование о кривой, описываемой телом, брошенным в воздух», представленном Берлинской академии наук в 1753 г. Примененный в нем новый метод основан на интегрировании дифференциальных уравнений движения в предположении пропорциональности сопротивления квадрату скорости. Решение Эйлера зависит от трех параметров: первый близок к единице, изменяется мало и является функцией отношения плотности воздуха к плотности материала снаряда, второй, аналогичный современному баллистическому коэффициенту, определяется весом снаряда и его диаметром, третий зависит от скорости, сообщенной снаряду. Эйлер систематизировал все возможные траектории и дал метод их расчета. Уже через 10 лет на основе этой работы Эйлера были составлены таблицы построения траекторий.

В области внутренней баллистики Эйлеру удалось получить формулу упругости пороховых газов, довольно близкую к действительной, найти приближенное решение задачи определения дульной скорости для случая постепенного сгорания газов. Ему принадлежит оригинальный метод, позволяющий найти наилучший вариант орудия данного калибра, т. е. наиболее целесообразное сочетание веса заряда и длины канала для данной начальной скорости. Этим были заложены основы теории баллистического проектирования ствола орудия. Эйлерову теорию истечения пороховых газов можно считать исходным началом газодинамика.

³ А. П. Мандрюка. Баллистические исследования Леонарда Эйлера. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958, стр. 10, 11.

Картография

В 1735 г. Эйлер был привлечен к работе в Географическом департаменте Академии наук. Под руководством Эйлера было скопировано и подготовлено к печати много карт. Готовя материалы для атласа России, Эйлер уточнил математическую основу карт многих геодезистов. С марта 1740 г. по февраль 1741 Эйлер заведовал Географическим департаментом. В этот период он совместно с академиком Г. Н. Гнейзнусом разработал проект генеральной карты Российской империи. Атлас России с приложением генеральной карты страны был издан в 1745 г. Оценивая заслуги Эйлера в подготовке этого издания, академик О. В. Струве писал: «Стараниями ее (академии. — *Ред.*) членов... под руководством бессмертного Л. Эйлера составлен был, наконец, и издан в 1745 году тот превосходный атлас империи, который был в общем употреблении до начала нынешнего столетия»⁴.

Эйлер отличался феноменальной трудоспособностью. Известен такой факт. В 1735 г. Петербургская академия наук получила задание выполнить в срочном порядке весьма трудное и сложное астрономическое вычисление — составить таблицы для определения времени по Солнцу. Для выполнения этого задания академики, в частности Н. Делиль, потребовали несколько месяцев. Эйлер взялся выполнить его в три дня и, ко всеобщему изумлению, сдержал слово. Для Эйлера же это напряжение окончилось печально. Он заболел «нервной горячкой» и потерял правый глаз. Однако потеря глаза не повлияла на его трудоспособность. Он только высказался, что теперь меньше будет отвлекаться от занятий математикой, а в письме к Гольдбаху (21 августа 1740 г.) писал: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром прислали часть карт на просмотр, то я тотчас почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание».

По возвращении в Россию Эйлер вновь занялся делами Географического департамента. В 1769—1783 гг. совместно с С. Я. Румовским он заведовал картографическими исследованиями академии. К этому периоду относится его работа по математической картографии «Об изображении поверхности шара на плоскости» (1777 г.). В ней Эйлер уже пользуется формулами, играющими роль известных условий Коши — Римана.

Эйлер положил начало исследованиям о конформных отображениях. В работе «О географической проекции сферической поверхности» он утверждает, что конформное отображение получается при любой аналитической функции.

⁴ О. В. Струве. Об услугах, оказанных Петром Великим математической географии России. СПб, 1872, стр. 18.

Третья работа Эйлера из этого цикла посвящена разбору проекции Делиля, принятой при составлении генеральной карты Российской империи.

7

Оптика, теплота, электричество и магнетизм

Как и Ломоносов, Эйлер пытался на основе всего материала физических знаний построить единую картину мира, создать теорию, «устанавливающую причину явлений, происходящих в телах», дать механическую концепцию мироздания, которая для XVIII в. была прогрессивной. Он хотел свести все явления теплоты, света, магнетизма, электричества, гравитации и прочие к взаимодействию «грубой» материи и другого, более тонкого вещества — эфира, менее плотного, но более упругого. Механические перемещения эфира и создавали, по мнению Эйлера, качественное разнообразие явлений природы. Эфирная гипотеза Эйлера была направлена против признания «скрытых качеств», против гипотез флогистона, теплорода, «серного начала», особой электрической материи и т. д. и, следовательно, препятствовала проникновению идеализма в науку.

Эйлер уделил много внимания изучению теории света, занимаясь ею почти полвека. Первые наброски теории Эйлера можно найти в его «Диссертации об огне» (1738 г.). Подробно же она изложена в сочинении «Новая теория света и цветов» (1746 г.).

Построенная Эйлером волновая теория не давала никаких преимуществ перед корпускулярной теорией света Ньютона, однако носила прогрессивный характер, так как Эйлер пытался объяснить наиболее известные световые явления, исходя из гипотезы о колебаниях эфира. В этой работе он резко выступил против ньютоновской теории света. «Материальные частицы не могут двигаться со скоростью света, — утверждал Эйлер, — потому что они имели бы тогда неустойчивую траекторию и масса Солнца была бы исчерпана за несколько секунд». Он считал, что гипотеза пустоты мирового пространства, принятая Ньютоном, противоречит факту испускания Солнцем и звездами материальных частиц. Если принять теорию Ньютона, пишет Эйлер, то бесчисленные потоки световых частиц, испускаемые во всех направлениях звездами, должны были бы сталкиваться и искажать прямолинейное распространение света, что не наблюдается. Наконец, теория Ньютона несет еще третье затруднение. Поскольку световые лучи свободно и прямолинейно распространяются с огромной скоростью сквозь прозрачные тела во всех направлениях, то пришлось бы заключить, что эти тела пронизаны прямолинейными порами во всех направлениях. Последнее, по мнению Эйлера, совершенно абсурдно. Эйлер считал, что материальные частицы, образующие, по Ньютону, лучи Солнца и звезд, скрещивались бы повсюду, наполняли бы все пространство и представляли бы такое сопротивление движению планет, какого не может оказать эфир, отрицаемый Ньютоном как раз по этой самой причине. В особом мему-

аре «О замедлении движения планет», приложенном к «Новой теории», он указал, что поскольку плотность эфира по его расчетам меньше плотности воздуха приблизительно в 400 миллионов раз, то эфир не мог оказать заметное влияние на картину движения небесных тел в течение всей человеческой истории.

В третьей главе «Новой теории света и цветов» Эйлер изложил свою точку зрения на природу света. Он исходил из аналогии между звуком и светом, рассматривая последний как вибрацию эфира. Свет в эфире, подобно звуку в воздухе, писал он, рождается колебательным движением. При этом световые лучи представлялись ему рядом следующих один за другим отрезков гармонических продольных возмущений (сгущений), разделенных, как правило, промежутками невозмущенного эфира. С. И. Вавилов писал, что Эйлер представлял себе сферическую волну как механическую сумму независимых лучей, протянутых из центра и колеблющихся подобно струнам. Как видим, теория Эйлера была теорией колеблющихся лучей (а не волн) в пространстве. Напрашивается вывод, что Эйлер либо не знал, либо не признавал принципа Гюйгенса. Во всяком случае, он ни разу не упоминает имя Гюйгенса.

Вместе с тем в результате изучения движения луча света Эйлер, как отметил С. И. Вавилов, по-видимому, первый записал уравнение плоской гармонической волны. Им была найдена и формула, аналогичная формуле длины волны, а также формула зависимости показателя преломления от параметров среды и преломляющего луча.

Цвет тел, по Эйлеру, зависит от частоты светового луча. Каждый простой цвет (в отличие от сложных цветов), писал он, связан с определенным числом колебаний, совершающихся за определенное время. Для объяснения видимости «темных» тел Эйлер строит интересную теорию резонанса: цвета тел, по Эйлеру, обусловлены способностью частичек тела резонировать на определенные колебания и возбуждать соответствующие лучи света. Мы видим, пишет он, непрозрачные тела не при помощи отраженных от них лучей (как ошибочно думал, по мнению Эйлера, Ньютон), но в собственных лучах, испускаемых поверхностью их. Частички непрозрачных тел колеблются, только пока они подвергаются действию световых лучей, а как только последние прекращаются, то и непрозрачное тело перестает светить. Однако ничто не препятствует существованию таких непрозрачных тел, которые сохраняют колебания, полученные от лучей света, более длительно, что и наблюдается в болонском камне.

Этой же резонансной теорией Эйлер пытался (совершенно ошибочно) объяснить цвета тонких пластинок и ньютонovy кольца. Резонирующими частицами, по его мнению, являются участки эфира в тонком зазоре между стеклами в опыте Ньютона. «Затруднение, состоящее в том, что с этой точки зрения все кольца должны различаться по цвету, так как они соответствуют разным толщинам, а следовательно, разным периодам, Эйлер обходит аналогией с музыкальными октавами, заимствованной у Ньютона. Не подозревая существования невидимых лучей, Эйлер считает, что частота колебаний, вдвое большая частоты

крайнего красного, будет снова вызывать ощущение красного и т. д. ... Эта остроумная сама по себе теория Эйлера закрыла ему глаза на интерференционную сущность явления и отодвинула эпоху действительной победы волновой теории до времени Юнга и Френеля»⁵.

Эйлеру принадлежат исследования в области фотометрии. Он указал на различие между силой света и освещенностью и установил до Ламберта, что последняя изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от источника и зависит от угла падения лучей. Развивая свою теорию света, Эйлер пытался на волновой основе объяснить световое давление. В целом, однако, теория Эйлера была неудовлетворительной.

Каковы же причины крупных упущений Эйлера, таких, как забвение явлений дифракции и поляризации света, неиспользование принципа Гюйгенса? Ведь, например, дифракция света могла бы послужить веским аргументом против корпускулярной теории Ньютона. С. И. Вавилов объясняет приведенные факты, с одной стороны, слабостью физической интуиции Эйлера, а с другой — «глубоким равнодушием эпохи к вопросам физической оптики»⁶.

В течение многих лет Эйлер занимался теорией оптических инструментов. Он опроверг мнение Ньютона о невозможности устранения хроматической аберрации рефракторов; исходя из его соображений, английский оптик Доллонд построил первый ахроматический объектив (1758 г.). В 1769—1771 гг. вышла трехтомная «Диоптрика» Эйлера. Н. Н. Лузин дает весьма высокую оценку этому труду: «Вычисление аберрации, проистекающей от сферичности стекол, есть настоящий шедевр математического анализа. Можно изумляться искусству, с которым математический анализ в руках Эйлера дал ответ на самые жгучие вопросы о наиболее выгодных качествах инструмента: наибольшей яркости изображения, наибольшем поле зрения, наименьшей длине инструмента, наибольшем увеличении и о числе окуляров»⁷. Исследования Эйлера послужили основой для дальнейшего развития оплотехники в XIX в.

Предметом исследований Эйлера была также теория теплоты. Представление о природе теплоты неоднократно менялось в процессе развития науки. В древности (Аристотель) теплота считалась неким первичным «началом», присущим различным телам в разной степени. В XVII—XVIII вв. существовали различные взгляды на сущность теплоты. Однако можно выделить две противоположные тенденции. Согласно одной из этих теорий, господствующей, причиной теплоты являлась особая невесомая жидкость — теплород, входящая в состав каждого тела, причиной горючести тела — другое вещество, флогистон. Этого мнения придерживались, например, Галилей, Гассенди, Вольф. Представители другого

⁵ С. И. Вавилов. Физическая оптика Леонарда Эйлера. — В кн.: С. И. Вавилов. Собрание сочинений. Т. 3. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 142—143.

⁶ Там же, стр. 144.

⁷ Н. Н. Лузин. Эйлер. — Социалистическая реконструкция и наука, 1933 № 8, стр. 19.

направления рассматривали теплоту как внутреннее движение частиц тела. Такую точку зрения разделяли Бэкон, Декарт, Иоганн и Даниил Бернулли, Герман, Ломоносов, Эйлер. В результате борьбы между обеими теориями победила вторая, хотя первая господствовала вплоть до середины XIX в., когда было доказано, что теплоту можно получать за счет механической работы или другого вида энергии.

Одним из первых ученых, считавших, что теплота — особая форма движения материи, — был Д. Бернулли (сочинение «Форономия, или о силах и движениях жидкостей и твердых тел», 1716). Эту же концепцию о сущности теплоты выдвинул в 1727 г. Эйлер в работе «Проба объяснения атмосферных явлений». В 1738 г. ему была присуждена премия Парижской академии наук за мемуар «Диссертация об огне, в которой поясняются его природа и свойства». Исходя из своего обычного принципа — «явления природы определяются материей и движением», — Эйлер приходит к утверждению, что «теплота состоит в некотором движении мельчайших частиц тел». И хотя в этой работе он признает существование особой «огненной материи», однако она совершенно не похожа на «горючее начало» сторонников теории флогистона, так как является только носителем запаса механического движения, освобождаемого при горении. Можно сказать, что уступка Эйлера идеалистическим представлениям была только формальной и гипотеза горения, как и гипотеза теплоты, выдвинутая в «Диссертации об огне», являлась чисто механической. Д. Бернулли и Эйлером были сделаны попытки построить количественную теорию теплоты, подлинным же ее творцом является М. В. Ломоносов.

Первую работу об электрических явлениях — «Исследование о физической причине электричества» — Эйлер написал в 1755 г. В ней он отрицал существование особой электрической материи и подчеркивал, что электрические явления обусловлены разрежением и сгущением эфира. Сущность электричества, писал Эйлер, надо видеть в удалении или уменьшении эфира, которым обычно в естественном состоянии наполнены тела. Все без исключения явления электричества происходят в результате нарушения равновесия в эфире. Эфир находится в порах тела. Поры тел, или «скважины», бывают трех видов: большие, или открытые, малые, или замкнутые, и средние. Если эфир, заключенный в порах тела, находится в равновесии с окружающим эфиром, то тело нейтрально. Нарушение такого равновесия и есть процесс электризации. Существование противоположных электрических зарядов объясняется различной степенью упругости эфира: тела с повышенной упругостью эфира обладают положительным зарядом, тела с пониженной упругостью наэлектризованы отрицательно. При трении двух разнородных тел поры сжимаются, и в зависимости от того, у какого из тел поры сжимаются сильнее, будет наблюдаться переход эфира от одного тела к другому. У всех тел есть поры, через которые проходит эфир, тела с малыми порами являются диэлектриками, тела с открытыми — проводниками.

Для объяснения притяжения и отталкивания наэлектризованных тел Эйлер привлекает также давление воздуха. Но позже, в работе под

таким же названием «Исследование о физической причине электричества» (1757 г.), он изменил свою точку зрения и рассматривал электрическое взаимодействие тел, исходя из неравномерного распределения давления в эфире, вызываемого наэлектризованностью этих тел.

Взгляды Эйлера близки к взглядам Ломоносова: оба они были сторонниками близкодействия при объяснении электрических явлений, оба отрицали наличие специальной электрической материи, наделенной центральными дальнедействующими силами.

В 1744 г. Эйлер получил премию Парижской академии наук за сочинение «Новая теория магнита», в котором изложил свою теорию магнетизма, основанную на вихрях. Согласно Эйлеру, магнитные явления объясняются наличием невидимой магнитной жидкости, более тонкой, чем эфир. Во всех телах магнитная жидкость смешана, по Эйлеру, с эфиром, представляющим также тонкую жидкость, но в магните и железе они отделены друг от друга. Магнит и железо имеют «столь малые поры, что в них не может проникнуть даже эфир и входит лишь одна магнитная жидкость». Эти поры образуют тонкие трубки или каналы, по которым магнитная жидкость течет всегда в одном направлении, она «не только проходит через магнит от полюса к полюсу, но, выходя через один полюс наружу, возвращается через другой снова в магнит». Находясь в быстром постоянном движении, магнитная жидкость образует вокруг магнита непрерывный вихрь. «Этим,— говорил Эйлер,— он и отличается от всех прочих тел»⁸.

Таким образом, в объяснении магнитных явлений Эйлер вернулся к картезианской теории вихревых истечений особой магнитной жидкости. Пользуясь своей теорией, он объяснил все известные в его время явления магнетизма. «Магнитная материя» Эйлера была своеобразной модификацией эфира и этим он перебрал мост между магнитными и электрическими явлениями. Теория магнетизма Эйлера, а также его взгляды на природу электричества сыграли определенную роль в последующем развитии науки, в частности воззрения Фарадея на электричество и магнетизм сформировались под влиянием работ Эйлера (сильное влияние на Фарадея оказали «Письма к немецкой принцессе» Л. Эйлера, о чем он сам писал в своих исследованиях).

Итак, из краткого обзора работ Эйлера по физике видно, что он стремился к построению единой картины физических процессов. Оценивая в целом его концепцию, Розенбергер отмечает, что она «представляет высокий интерес в том отношении, что ...сводит на эфир как на общую причину механическую силу, свет, теплоту и электричество... Эйлер заслуживает нашей благодарности и высочайшего нашего изумления за то, что он уже более столетия назад не только указал на такую общую причину, но отчасти и вывел из нее явления различных категорий»⁹.

⁸ L. Euler. Nova theoria magnetis ab illustrissima Academia Regia Scientiarum Parisina praemio coronata. Opuscula varii argumenti. T. 3. Berolini, 1751.

⁹ Ф. Розенбергер. История физики. Ч. 2. ОНТИ, М.—Л., 1937, стр. 284.

На промышленных предприятиях XVIII в. широко применялись водяные колеса разных типов. Однако они имели ряд существенных недостатков (малая мощность, невысокий коэффициент полезного действия, ограниченность применения благодаря локальному характеру) и потому перестали удовлетворять потребности растущей промышленности. В конце XVIII в. гидравлические двигатели начинают вытесняться паровой машиной. И только в 30-х годах XIX в. появляются практически пригодные гидравлические турбины. Первой такой гидравлической турбиной была радиальная центробежная турбина французского инженера Б. Фурнейрона (1827 г.), воплотившего теоретические изыскания Эйлера в этой области. Но только в конце XIX в. гидротурбины получили широкое распространение.

История турбостроения начинается с изобретения венгерским ученым Сегнером (1704—1777) колеса (сегнерово колесо), явившегося прообразом гидравлической турбины. Этим изобретением заинтересовался Эйлер. Между Сегнером и Эйлером завязалась оживленная переписка. В своих письмах Эйлер дал ряд советов для улучшения конструкции колеса. Приблизительно тогда же проект сегнерова колеса был технически осуществлен. Мукомольная мельница в Нертено, около Геттингена, приводимая в движение таким колесом, работала безотказно долгие годы.

В последующие годы Эйлер разработал строгую теорию гидрореактивного колеса и изложил ее в пяти мемуарах. Первый мемуар — «Исследование о действии гидравлической машины, предложенной профессором в Геттингене Сегнером» — написан в 1750 г. (опубликован в 1752 г.) и представляет собой детальное заключение о рабочем колесе Сегнера. Эйлер предлагает ряд усовершенствований, например заменить прямые трубки искривленными, пытается дать теоретическое определение действия трения жидкости на стенку трубки, советует сделать опытную проверку нового изобретения.

Результаты произведенных опытов показали, что предложенная Эйлером замена прямолинейных трубок криволинейными дала значительный эффект. Машина Сегнера, конструктивно улучшенная Эйлером, имела значительные преимущества перед обычными водяными колесами.

Второй мемуар Эйлера, доложенный в Берлинской академии наук вместе с первым, был опубликован в 1753 г. под названием «Применение гидравлической машины г. Сегнера ко всевозможным работам и о ее преимуществах перед другими гидравлическими машинами, которыми обычно пользуются». Работа эта посвящена исследованию и сравнению действия вертикальных водяных колес и горизонтального колеса Сегнера, значительно улучшенного самим Эйлером. Оба мемуара Эйлер обобщил в работе «Определение эффекта действия гидравлической машины, изобретенной г. Сегнером, профессором из Геттингена». До-

ложено это сочинение было в 1752 г. Берлинской академии наук, но издано лишь посмертно, в 1862 г. Расчету водяных турбин посвящена также работа Эйлера «Разъяснение вопроса о том, как может быть употреблена с наибольшей выгодой сила воды или другой жидкости для вращения мельниц или исполнения другой работы» (1754 г.).

Наиболее значительный вклад в теорию гидравлического двигателя Эйлер внес в двух последних мемуарах: «Более полная теория машин, приводимых в движение реакцией воды» (1754 г.) и «О движении и реакции воды, протекающей по подвижным трубам» (1761 г.). Теоретические исследования, содержащиеся в первом из названных мемуаров, позволяют уже говорить не об усовершенствованном колесе Сегнера, а о турбине Эйлера. В этом мемуаре впервые разработана общая теория движения несжимаемой идеальной жидкости в узких трубах двойной кривизны, вращающихся около неподвижной оси. «Эйлер вывел уравнение момента сил реакции воды и развиваемой мощности в зависимости от скорости жидкости, а также указал оптимальную скорость вращения трубок. Эйлер теоретически рассматривал бесконечно тонкие, по сравнению с расстоянием от оси вращения, трубки, в которых совершается непрерывное движение идеальной жидкости и которые по существу представляют собой „трубки тока“»¹⁰. К весьма важным его практическим усовершенствованиям конструкции гидромашин относятся устройство направляющего аппарата, установка большого числа трубок, введение заслонок на выходе из рабочего колеса (с помощью неподвижных направляющих лопастей, соединенных с кольцом, вода без удара подается к рабочему колесу).

Эйлер создал одномерную теорию турбомашин. Его изыскания значительно опередили практику турбостроения, так как первые турбины были изобретены лишь в XIX в. Однако теория Эйлера не учитывала трения жидкости, в чем и заключался ее недостаток. Эйлер понимал это, но строгого математического решения вопроса не дал.

К 200-летию со дня создания Эйлером проекта турбины (1943 г.) швейцарские ученые построили модель турбины по его непосредственным описаниям и расчетам. Турбина имела входной диаметр 200 мм, выходной — 300 мм и была рассчитана на напор воды в 1 м при 300 об/мин. Коэффициент полезного действия турбины составлял 71,2% при 180 об/мин, т. е. выше, чем у первых турбин начала XIX в. Некоторые практические замечания Эйлера о турбомашинах, например о величине отношения высоты канала к среднему диаметру рабочего колеса, могут быть полезными конструкторам и в наши дни.

Изложенное позволяет полностью присоединиться к мнению профессора Шредера, известного немецкого специалиста по прикладной математике, о том, что эти выдающиеся работы характеризуют Эйлера как ученого-инженера в современном смысле слова.

¹⁰ И. И. К и р и л л о в. К 200-летию со времени выхода в свет трудов Эйлера по теории турбомашин. — В кн.: Бежицкий институт транспортного машиностроения. Турбостроение. Кн. 1. Вып. 15, 1955, стр. 3.

Механика машин

К наукам и научным идеям, основы которых были заложены Эйлером, относится также механика машин, или теория машин и механизмов. Эта основная наука из цикла учения о машинах возникла в конце XVIII в., но первые ее идеи принадлежат Эйлеру.

В то время, когда Эйлер работал над мемуарами о механике машин, только-только начинался промышленный переворот, машины при господствующем мануфактурном способе производства применялись лишь спорадически, не на основных операциях, скорости их были еще незначительными и расчет сводился к применению «золотого правила». И вот на таком «небогатом» основании Эйлер начал строить динамику машин.

Общей теории машин посвящены два мемуара Эйлера. Один из них — «О машинах вообще»¹¹ — состоит из двух частей. В первой части Эйлер излагает свои мысли о новой науке о машинах. Вторая часть посвящена в основном исследованию трения при движении машин.

В самом начале исследования Эйлер указывает на непригодность элементарной механики для изучения машин. Несмотря на то что многие машины сооружаются на основании принципов механики, совершенно нельзя предусмотреть, как будут они вести себя в работе. «И хотя часто те, которые обладают большим опытом и познаниями в устройстве машин, благодаря такому долгому опыту и полученным познаниям и могут точно предсказать их действие до производства опытов, все же нельзя сказать, что эти познания следует приписать самой теории, ибо точнее было бы отнести их к чистому опыту»¹². Поэтому Эйлер и приходит к заключению, что «обычное познание машин, предлагаемое в элементарной механике, весьма неполно и совершенно не заслуживает наименования теории»¹³.

Развивая эту мысль, Эйлер доказывает, что машины работают в движении, поэтому нельзя рассчитывать их только в равновесии, не принимая во внимание динамические явления. Необходимо учитывать также скорость, при которой работает данная машина. Одних условий статики недостаточно. Может получиться и так, что машина, рассчитанная лишь статически, просто не сработает и окажется непригодной. Далее, для выполнения какой-либо работы можно применить несколько разных машин, поэтому надо так усовершенствовать теорию, чтобы она позволила «найти среди всех машин, которые могут быть использованы для выполнения данной работы, такую способнейшую, которая эту работу выполнит или в кратчайший срок, или с минимальным рас-

¹¹ L. Euler. De machinis in genere. — Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 3, 1753.

¹² Там же, стр. 255.

¹³ Там же, стр. 256.

ходом действующих сил, или иным способом, дающим наилучший результат»¹⁴.

Эйлер пытается произвести анализ машины с точки зрения ее состава. Впервые в истории науки он указывает на три основные части машины — двигатель, передачу и рабочий орган (орудие). Некоторая неясность в изложении Эйлера поясняется отсутствием в то время специальной терминологии. «Итак,— пишет Эйлер,— во всех машинах следует рассматривать три вещи: во-первых, саму силу, которая вызывает движение машины, во-вторых, машину, или ее строение, т. е. сочетание частей, из которых она состоит, в-третьих, переносимую нагрузку. Поскольку же во многих машинах нет нагрузки, а все их действие состоит в движении, то и этому деление машины на три части не противоречит. Такого рода машины также охватываются теорией. Третьей части здесь нет. Мы просто не рассматриваем переносимую нагрузку или считаем ее исчезнувшей. Эти три части надо исследовать с двух точек зрения: сами по себе и относительно передаваемых ими движений.

В самой машине ее структура ясно отличима от производимых ею или ее частями движений: машина не только преобразует силу в нагрузку, но частично потребляет движение, получаемое от какой-либо действующей силы. При этом действие, получаемое извне, уменьшается в значительной степени»¹⁵.

Далее Эйлер указывает, что все эти три составные части машины подлежат детальному исследованию. Он специально останавливается на определении сил, действующих между частями машин, чтобы можно было установить их размеры.

Вторая часть мемуара — «О простом движении» — в основном посвящена исследованию законов трения при передвижении грузов с помощью «простых машин». Эйлер рассматривает лишь самые элементарные случаи действия сил и приходит к выводу, что сила трения происходит частично от шероховатости плоскости, а частично от взаимного сдавливания тела и плоскости. Площадь соприкосновения не влияет на величину силы трения.

Второй мемуар Эйлера, посвященный науке о машинах, «Основания теории машин»¹⁶ вышел в свет десятью годами позже первого. В нем Эйлер пытается найти такую систематику машин, которая зависела бы от механических параметров, а не от их технологического назначения. Он предлагает разделить все машины на два класса. К первому классу он относит машины, все части которых находятся в состоянии равномерного движения. Это — грузоподъемные машины, зерновые мельницы и др. Ко второму классу — машины, отдельные части которых в своем движении или ускоряются, или замедляются, хотя сама машина в целом может иметь равномерный ход. Это — мельницы и другие машины ударного действия, машины с кривошипно-шатунным механизмом,

¹⁴ L. Euler. De machinis in genere, p. 259.

¹⁵ Там же, стр. 260.

¹⁶ L. Euler. Principa theoriae machinarum.— Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 8, 1763.

«которые выполняют работу с ударами, причем поршень то поднимается, то опускается», часы всех систем, в которых «вообще отсутствует преодолеваемая нагрузка, а все действие сводится к ускорению или замедлению отдельных частей», машины для подъема воды. Второй класс много обширнее первого, так как включает машины, которые по своему характеру должны были бы относиться к первому классу. В качестве примера Эйлер приводит зубчатое зацепление, отнесенное им ко второму классу.

Машины первого класса рассчитываются на основании статических соображений. Расчет машин второго класса гораздо сложнее, так как в этом случае уже надо учитывать динамические явления. Эйлер дает черновой набросок уравнения движения машины и рекомендует свести задачу определения движения машины к принципам статики. Затем рассматривает условие равновесного состояния для движения машины, предполагая, что ее движение вначале является ускоренным, благодаря чему величина действующей силы постоянно уменьшается, пока не наступит саморегулирование и машина не войдет в равномерный режим.

В неявной форме в этом мемуаре дано и понятие коэффициента полезного действия. Исследуя движение машины в условиях трения, Эйлер приходит к выводу, что всякая машина должна работать при условии равномерного движения. Если же скорость движения машины изменяется, то производимое ею действие будет меньше того, которое было бы получено при равномерном движении. Отмечая различие в этом смысле между движением по окружности и прямолинейным возвратным движением, он указывает, что следует стремиться к получению в машинах равномерного вращения.

Как видим, Эйлер дал глубокий и всеобъемлющий план исследований по механике машин. Он показал не только необходимость, но и пути перехода от статического исследования машин к динамическому.

Обе работы Эйлера вошли в научный оборот лишь в конце XVIII — начале XIX в. Его учение о механике машин, названное им учением о структуре, послужило базой для дальнейших работ Монжа, Ланца, Бетанкура и Виллиса и в дальнейшем развилось в кинематику механизмов. Учение об орудии составило впоследствии, во второй половине XIX в., важнейший раздел технологии, в XX в. оно возродилось в механике рабочих органов машин.

Работы Эйлера в области механики машин не ограничиваются двумя рассмотренными выше мемуарами. Приблизительно в эти же годы он заинтересовался вопросами, связанными с теорией зубчатых зацеплений, и в двух мемуарах — «О наилучшей форме зубцов колес» и «Дополнение о форме зубцов колес»¹⁷ — доказал, что эти зубцы следует профилировать по эвольвенте. Гениальность технического предвидения Эйлера особенно очевидна, если вспомнить, что в середине XVIII в. зубчатые колеса изготавливались из дерева и монтировались на дере-

¹⁷ L. Euler. De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda. — Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 5, 1760, p. 299—316; Supplementum. De figura dentium rotarum. — Novi Comm. Acad. sci. Petropol. T. 11, 1767, p. 207—231.

вянных валах. Поэтому вопрос о профилировке представлял исключительно теоретический интерес. Лишь спустя без малого сто лет он получил и прикладное значение.

В 1765 г. Эйлер решил также другой весьма важный вопрос теории машин — заложил основы теории трения гибкой нити. Выведенная им формула сохраняет свое значение до настоящего времени и приводится во всех учебниках теории механизмов и машин, а также в специальных работах по теории и практике гибких передач и транспортеров.

Кроме упомянутых работ Эйлеру принадлежит еще несколько мемуаров и заметок по более частным вопросам механики машин — о простых машинах, о теории весов, о сложных зубчатых передачах, о крыле ветряной мельницы. Как видим, в мемуарах Эйлера заложены основы той науки о машинах, которая развилась лишь в начале XIX в.

10

Мировоззрение Эйлера

Наиболее подробно философские взгляды Эйлера отражены в его научно-популярном произведении «Письма к одной немецкой принцессе о различных вопросах физики и философии»¹⁸. «Письма» (всего их 234) появились на французском языке в 1768—1772 гг. и впоследствии выдержали около 111 изданий на восьми европейских языках. Подобно Декарту, Эйлер был дуалистом: отрывая сознание от материи, не понимая первичности материи и вторичности сознания, он рассматривал материю и дух как две независимые субстанции. Однако если в вопросах религии Эйлер отдавал дань своему веку, то в своей натурфилософии он стоял на позициях естественно-научного материализма и веру резко отделял от научной деятельности. Он считал, «чем меньше вмешивать бога и божественные силы в светские дела, в том числе и в науку, тем лучше и для науки и для авторитета бога»¹⁹.

Эйлер утверждал, что существование объективного мира неоспоримо. По его мнению, убеждение в существовании за нашими ощущениями вызвавшей их объективной причины является настолько «естественным», что его разделяют не только все взрослые люди, но и младенцы и даже все животные, так что это не может быть «предубеждением». Можно сказать, что Эйлер в основном стоял на позициях философского материализма XVIII в. Он придерживался теории «наивного реализма», как идеалисты презрительно называли естественное убеждение в существовании объективного мира. Высмеивая идеалистов, В. И. Ленин писал: «„Наивный реализм“ всякого здорового человека, не побывавшего в сумасшедшем доме или в науке у философов идеалистов, состоит в том,

¹⁸ L. Euler. *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Charpentier, Paris, 1843. Цитаты даны по указанному изданию.

¹⁹ Цит. по: Ф. М. О т р а д н ы х. Математика XVIII века и академик Леонард Эйлер. «Советская наука», М., 1954, стр. 34.

что вещи, среда, мир существуют *независимо* от нашего ощущения, от нашего сознания, от нашего Я и от человека вообще»²⁰.

Эйлер не дошел до признания материального характера мышления, и материалистическая точка зрения в этом вопросе казалась ему непонятной. В «Письмах» он много места уделил проблеме соответствия между духом и материей, установления локализации души в теле, выяснения связи души с телом. Однако взаимоотношение между ощущениями и представлениями, по его мнению, относится к неразрешимым вопросам.

Гносеологические вопросы Эйлер решает, в основном, в материалистическом аспекте. В своем учении о путях познания он высказывает много прогрессивных мыслей, созвучных нашей точке зрения. В процессе познания, по его мнению, важнейшая роль принадлежит особой способности интеллекта — абстракции. «Душа обнаруживает способность, называемую абстракцией, действующую когда душа фиксирует внимание только на количестве или качестве объекта, которое отделяется ею от объекта и рассматривается как если бы оно не было связано с объектом... Эти идеи, полученные путем абстракции, носят название понятий, чтобы их отличить от чувственных идей, которые нам изображают предметы, реально существующие»²¹. В этом высказывании выражена мысль Эйлера о том, что представления возникают в нашем сознании в виде наглядных образов, понятия же лишены конкретной наглядности. Он считал, что понятия выражают общие и притом характерные признаки множества индивидуальных предметов. Более общее понятие он называл родом, менее общее — видом²². По его мнению, всеми нашими знаниями мы обязаны способности интеллекта образовывать понятия, «без этих общих понятий мы не отличались бы от животных»²³. «...Понятия высший продукт мозга, высшего продукта материи»²⁴, — указывает В. И. Ленин. Диалектический материализм учит, что в понятиях отражаются предметы и явления реального мира в их существенных, необходимых признаках и отношениях. Примерно так представлял себе сущность понятий и Эйлер. «...Чем понятие более общее, тем менее охватывает оно признаков, составляющих сущность, и, как следствие, легче познать эту сущность; мы легче схватываем, что такое дерево вообще, чем что такое вишня, груша или яблоня, которые являются видами... и когда я говорю: предмет, который я вижу в саду, — это дерево, я не ошибаюсь, но я скорей мог бы ошибиться, если б сказал, что это вишня. Следовательно, я лучше знаю сущность дерева вообще, чем его виды; я легче спутаю вишню со сливой, чем дерево с камнем»²⁵.

Эйлер ясно сознавал значение абстракции для науки, для познания мира. «Все науки опираются принципиально на общие понятия, которые не более реальны, чем предмет геометрии... и даже заслуга

²⁰ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 18, стр. 65.

²¹ Письмо от 7. II 1761 г., стр. 254.

²² Там же, стр. 255.

²³ Там же, стр. 256.

²⁴ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 29, стр. 149.

²⁵ Письмо от 21. IV 1761 г., стр. 312—313.

каждой науки будет тем более великой, чем более она восходит к более общим понятиям, т. е. более абстрактным»²⁶.

Во времена Эйлера неумеренные последователи Ньютона провозгласили лозунг: «Изгнать гипотезы из физики». Ньютонианцы, снижая роль теоретического мышления в естествознании, принесли немало вреда науке. Эйлер резко выступил против ползучего эмпиризма, против обожествления одних голых фактов. «Есть люди,— писал он,— которые отказываются чему-либо верить или что-либо признавать, если они не видят его своими глазами и не трогают руками. Все, что доказывается путем наиболее обоснованных рассуждений, кажется им всегда подозрительным, если они не видят этого своими глазами»²⁷.

Ломоносов был единомышленником Эйлера в этом отношении. Он также выступал против ученых-эмпириков, не идущих дальше констатации внешней формы явлений и отвергающих значение теоретического мышления в процессе познания природы. Считая, что опыт без теории слеп, Ломоносов говорил, в частности: «Истинный химик должен быть теоретиком и практиком»²⁸.

Эйлер признавал и логическое доказательство, и свидетельство опыта. Он считал, что наше знание основывается на трех источниках истинности: истины чувств, истины разума и истины веры. Доказательства истины первого рода сводятся к показаниям наших чувств: «Я знаю, что магнит притягивает железо, так как я это вижу и это опыт мне доказывает бесспорно»²⁹. Такие истины называются чувственными и основываются они на наших чувствах или опыте. Доказательства истины второго рода Эйлер базирует на рассуждении: «Этот род истин связан с логикой, которая нам дает правила верного рассуждения»³⁰. Истина третьего рода, по мнению Эйлера, не составляет независимого типа, так как, хотя и опосредствованно, она покоится, как и первая, на показаниях внешних чувств.

Диалектический материализм считает практику основным и единственным критерием истины. Логическое доказательство также базируется на практике, на опыте трудовой человеческой деятельности. Сами законы и формы мышления неразрывно связаны с объективной действительностью, с общественной практикой. «...Практика человека,— писал В. И. Ленин,— миллиарды раз повторяясь, закрепляется в сознании человека фигурами логики»³¹. Само логическое доказательство есть по существу опосредствованное доказательство практикой, так как опирается в конце концов на реальную модель. Так, математические доказательства основываются на непротиворечивой системе аксиом, в свою очередь базирующейся на системе аксиом арифметики, проверенной тысячелетним опытом человечества.

²⁶ Письмо от 25. IV 1761 г., стр. 315.

²⁷ Письмо от 4. IV 1761 г., стр. 300.

²⁸ М. В. Ломоносов. Избранные философские произведения. Госполитиздат, М., 1950, стр. 86.

²⁹ Письмо от 31. III 1761 г., стр. 298.

³⁰ Там же.

³¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 29, стр. 198.

Какова же позиция Эйлера? Он пишет: «... Человек делает опыт с камнем, он его не удерживает, и камень падает... Этот пример показывает, что хотя опыт и производится только над отдельными предметами, он приводит людей к весьма общим выводам, но, конечно, следует прибавить, что разум и другие свойства души примешиваются так, что весьма трудно в этом разобраться»³². Как видим, в философских взглядах Эйлера, наряду с внешними чувствами, дающими нам знание, фигурирует разум, духовное начало. В этом смысле его можно сопоставить с Аристотелем или Локком, также колебавшимися между материализмом и идеализмом. Однако Эйлер высказывался так: «По этому поводу (речь идет об опыте с камнем. — *Ред.*) следует заявить, что простой народ имеет гораздо больше здравого смысла, чем те щепетильные философы, которые настаивают на сомнении во всем»³³. Приведенные слова направлены против скептиков, которые сомневались в достоверности истин, установленных посредством внешних чувств, и отрицали, таким образом, возможность познания объективной реальности. Чувственные обманы, писал Эйлер, обнаруживаются нашими же чувствами, мы имеем возможность контролировать свои впечатления и умеем отличать истинное от ложного³⁴.

Таким образом, Эйлер, как представитель передовой науки того времени, боролся с агностицизмом и обскурантизмом.

В «Письмах» содержатся также весьма интересные мысли Эйлера о связи языка и мышления. Известно, что происхождение языка тесно связано с общественным характером трудовой деятельности человека. «Язык есть важнейшее средство человеческого общения»³⁵, — писал В. И. Ленин. В этом определении со всей полнотой и точностью отражено значение языка как способа общения между людьми. В словах и словосочетаниях материально закрепляются результаты работы мышления и познавательной деятельности человеческого общества на протяжении всего его существования.

Как рассматривал Эйлер роль языка в связи с мышлением человека? Он прежде всего считал, что язык нужен человеку не только как средство общения, но и для развития разума и распространения знаний³⁶. Главное значение языка, по его мнению, состоит в том, что понятия отмечаются, выражаются словами и редко встречаются слова, обозначающие отдельный индивидуальный предмет. Человеческому мышлению, подчеркивал он, пришлось проделать колоссальную работу, чтобы образовать такие понятия, как дерево, человек, добродетель, свобода, добродота и т. д.³⁷ Тот язык следует считать более развитым, который в состоянии выразить большее число общих понятий, образуемых абстракцией. В самом акте мышления слово заменяет собой вещь. «Интеллект, образовав раз и навсегда общие понятия, соответствующие этим

³² Письмо от 18. IV 1761 г., стр. 309.

³³ Там же.

³⁴ Письмо от 21. IV 1761 г., стр. 313.

³⁵ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 25, стр. 258.

³⁶ Письмо от 10. II 1761 г., стр. 256.

³⁷ Там же, стр. 258.

словам, замещает затем в своих мыслях этими словами вещи, которые эти слова обозначают»³⁸. Таким образом, взгляды Эйлера на роль языка в развитии мышления были прогрессивными.

В вопросе о происхождении математических понятий Эйлер занимал материалистическую позицию. Человек, писал он, в процессе познания мира создает понятия, являющиеся отвлечением от реальных объектов, а не полученные им от духовного начала. Например, число есть абстракция от количественных отношений реального мира. «Понятие числа имеет то же происхождение: увидев два или три человека или других объекта, интеллект образует понятие «двух» или «трех», не связываемое больше с этими людьми»³⁹. Сопоставим с этим высказыванием Эйлера слова Ф. Энгельса: «Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира... а не возникли в голове из чистого мышления»⁴⁰.

Такого же взгляда придерживался Эйлер и относительно возникновения понятий в геометрии. По его мнению, основными существенно-необходимыми характеристиками материального тела являются протяженность, инерция и непроницаемость⁴¹, задача же геометрии — изучать первую из этих объективных характеристик тела. Сравним это определение геометрии с определением Н. И. Лобачевского: «Часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство, называется геометрией. Геометрическое тело удерживает одно только свойство протяжения от тел природы»⁴². Как видим, понимание предмета геометрии Эйлером и Лобачевским одинаково. Материалистическая трактовка предмета математики была характерной для подавляющего большинства русских математиков и механиков, и Эйлер в этом смысле не представлял исключения. Среди же западноевропейских математиков в XVII и XVIII вв. очень часто распространялись идеалистические течения. Например, Лейбниц рассматривал понятие числа как продукт человеческого духа. В «Письмах» Эйлер подверг критике идеалистические взгляды Лейбница и его последователя Вольфа.

Эйлер был уверен в объективной реальности внешнего мира, в познаваемости сущности вещей, в том, что эта сущность может быть предметом математического анализа. Анализ, считал он, — это универсальное средство математического описания действительности. Философы-идеалисты до сих пор не могут простить ему непоколебимой уверенности в реальном существовании материального мира, веры в то, что наука ищет и находит объективную истину.

Обычно считают Эйлера стихийным материалистом. Однако слова «стихийный материалист» означают, что ученый не занимается философией, но в своих выводах стихийно приходит к материалистическим утверждениям. Между тем Эйлер в своей натурфилософии сознательно

³⁸ Письмо от 10. II 1761 г., стр. 258.

³⁹ Письмо от 7. II 1761 г., стр. 254.

⁴⁰ К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. Изд. 2-е. Т. 20, стр. 37.

⁴¹ Письмо от 21. IV 1761, г., стр. 311.

⁴² Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 2. ГИТТЛ, М.—Л., 1949, стр. 43.

становился на материалистические позиции. Нельзя считать его и эклектиком, ибо он имел свои философские взгляды, сформировавшиеся в процессе развития его научных исследований. Его взгляды не были лишены некоторых отдельных влияний, например влияния Декарта, Ньютона, Локка, но во многом он опередил свою эпоху на столетие. Не все в философском наследии Эйлера одинаково ценно. Наиболее интересна его теория познания, особенно учение об абстракции, почти созвучное современному, так же как и его взгляды на роль языка в развитии мышления. Он не создал оригинальной философской системы, однако стремился ответить на все основные философские вопросы, волновавшие его современников.

Эйлер всю жизнь находился под сильным влиянием как философской системы Декарта, так и картины мироздания, построенной Ньютоном. Понимая, что построение Ньютона является более прогрессивным и лучше объясняет известные в то время факты, он тем не менее во многом был картезианцем, и доля картезианства с годами у него возрастала. Чувствуя, что ньютоновское здание не имеет фундамента, Эйлер пытался дать логический базис, подвести фундамент под картину мира, начертанную умелой рукой Ньютона. Он старался синтезировать картезианские физические идеи с формализмом Ньютона. Эйлер сознавал слабые стороны ньютоновской физики, а потому никогда не был последовательным ньютонианцем. Признавая бесконечное пустое неподвижное пространство Ньютона, Эйлер порывал с Декартом, так как считал, что для характеристики материи одного атрибута протяженности недостаточно. Декарт отрицал абсолютное движение, материя и пространство у него органически связывались, а потому абсолютно отрицалась пустота. Следуя Декарту, Эйлер считал протяженную материю бесконечно делимой, но отрицание «последних частей» и признание единства материи не привели его, как Декарта, к отрицанию пустого пространства. Следуя Декарту, Эйлер принимал механическую концепцию взаимодействия тел путем соприкосновения или удара, но не разделял его пресловутую теорию вихревых движений, а строил механическую модель поля тяготения признанием давления эфира.

Заканчивая краткий очерк философских воззрений Леонарда Эйлера, можно сказать, что этот выдающийся ученый принадлежит к плеяде мыслителей, близких в научной деятельности к материализму. К своим философским взглядам он пришел благодаря научным открытиям, сделанным им же как в процессе развития теоретических исследований, так и в результате использования экспериментальных данных.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII В.

1

Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России

Характерной особенностью экономики России во второй половине XVIII в. было развитие в недрах феодально-крепостнического хозяйства капиталистического способа производства. Потребности быстрого развития ведущих отраслей промышленности — горнодобывающей, металлургической и металлообрабатывающей — удовлетворялись, в основном, за счет использования рабочей силы в принудительном порядке. На протяжении почти всего столетия русская мануфактура использовала принудительный труд крепостных или «приписных» рабочих людей.

До начала XVIII в. металлургическая и металлообрабатывающая промышленность России была сосредоточена в Тульском районе. В первой четверти века возникли новые центры металлургического производства — Средний Урал, Карелия, Воронеж. В 1750 г. выплавка чугуна в России увеличилась до 2 млн. пудов и достигла одной шестой всей мировой продукции. В связи с начавшимся на Западе промышленным переворотом в значительной степени повысился спрос на русский чугун. К концу XVIII в. Россия вышла по выплавке чугуна на первое место в мире. Однако к этому времени феодально-крепостническая база мануфактуры уже изжила себя и тормозила дальнейшее промышленное развитие. Те страны, где уже был осуществлен промышленный переворот, усиленно форсировали свое экономическое развитие.

К концу XVIII в. Россия являлась одной из наиболее развитых в экономическом отношении стран, с высокоразвитой мануфактурной промышленностью. Техническая база мануфактур — их насчитывалось уже 2300 — в общем была такой же, как и в западноевропейских странах. Машины применялись, главным образом, на трудоемких работах и только в редких и исключительных случаях — на основных технологических операциях. Впрочем, к концу века появились первые признаки промышленного переворота: увеличивалось применение в производстве машин, использование вольнонаемного труда, к 1800 г. количество вольнонаемных рабочих достигло 40%.

Значительные успехи были достигнуты в области техники. Еще в первой половине XVIII в. выдающийся русский инженер А. К. Нартов изобрел целую серию интересных станков с механическим суппортом. На протяжении всего века изобретения по части машин следуют одно за другим. На тульских заводах М. Сидоров, Я. Батищев и П. Захава создают ряд металлообрабатывающих станков и установок, доведя металлообработку до совершенства по тому времени. За 37 лет до изобретения американцем Эли Уитни взаимозаменяемости деталей в изготовлении мушкетов на Тульском заводе подобная взаимозаменяемость даже не составляла секрета производства. В 1763 г. И. И. Ползунов построил первую в мире паровую машину для привода заводского оборудования, тем самым оторвав в некоторой степени мануфактуру от ее исконной силовой базы — водяного потока. К последней трети XVIII в. относятся работы алтайского гидротехника К. Д. Фролова, который создал на Змеиногорском руднике гидросиловую установку, присоединив к ней систему горнозаводских и вспомогательных машинных агрегатов.

Однако основой хозяйственной жизни страны продолжал оставаться крепостной крестьянский труд, причем права феодальной верхушки не только не уменьшились, но даже возросли. В последней трети XVIII в. феодально-крепостническая система достигла своего апогея. Были закрепощены свободные до того времени крестьяне Украины и Поволжья. Занятые и «незанятые» земли Новороссии, Южного Поволжья и Приуралья раздавались помещикам, некоторые из этих земель заселялись немецкими колонистами. В первой половине XVIII в. число крестьян мужского пола, находившихся в крепостной зависимости у помещиков, составляло около 3,5 млн., а в 80-х годах — 6,5 млн.

Наряду с процессом закрепощения и раздачи «свободных» земель осуществлялась передача казенных горных угодий в частные руки. Если учесть, что во второй половине XVIII в. особенно развилась помещичья вотчинная мануфактура, то общая картина хозяйственного развития России — формирование товарно-капиталистических отношений внутри феодально-крепостнического уклада — становится еще более ясной.

Усиление эксплуатации крестьянства, торговля крестьянами, не имевшими земли, указ о праве ссылать крестьян в Сибирь без суда, — все это привело к ряду восстаний, вылившихся, в конце концов, в крестьянскую войну 1773—1775 гг., возглавленную Е. И. Пугачевым. Эта война охватила Урал, Поволжье и среднюю Россию, и царскому правительству понадобилось бросить значительные военные силы на ее подавление.

Таковы были, в основном, социально-экономические условия в России в конце XVIII в. Школа во второй половине века продолжала развиваться в сословно-профессиональных границах. Общеобразовательная школа появилась в России только в последние десятилетия XVIII в. Одной из первых проб введения общеобразовательной школы (если не считать недолго просуществовавшую немецкую московскую

гимназию, школу Феофана Прокоповича и некоторые другие) была женская школа — Институт благородных девиц, основанный в 1764 г. Среди прочих наук и искусств в нем преподавали и арифметику.

Однако уже при первых попытках ввести общеобразовательные школы возник вопрос, чему и как обучать собранную в школу молодежь. «Когда в 1779 г. в Твери было учреждено „на общественное иждивение Воспитательное для молодых дворян училище“, то собранных в нем 120 дворянских детей предполагалось „под особенным надзиранием определенных воспитателей“ обучать: „исповеданию веры, по-русски читать и писать и красноречию употребительного языка, затем по-французски и по-немецки, арифметике, геометрии и фортификации, и особенно расположению полевых укреплений, истории, географии, рисованию, тактике, естествознанию, всенародным и государственным правам, музыке, танцевать, фехтовать, волтижировать и верхом ездить; сверх того по моделям, нарочно для того сделанным, доставится им достаточное понятие о гидравлике, механике и архитектуре“»¹. На первый взгляд кажется, что набор предметов для общеобразовательной школы не очень-то и подходящий, однако тогда речь шла о тех науках и искусствах, которые могли быть нужными воспитаннику в жизни, причем (и это можно видеть на примере Харьковского коллегиума) каждый воспитанник мог изучать те науки, к которым имел склонности, т. е. в конечном итоге, это было опять-таки профессиональное образование.

«Со времени губернской реформы „попечение и надзирание о установлении и прочном основании школ“ лежало на приказах общественного призрения, которым предложено было озаботиться и открытием училищ не только в городах, но и в многолюдных селениях и снабжать их книгами. В провинции стали с этого времени появляться школы, содержимые на средства, пожертвованные частными лицами или собранные местным обществом. Такие училища были устроены, например, в Твери, Ярославле. Но более живое отношение к народному образованию находилось не везде: в Казани, наоборот, через 5 лет после перехода в ведение приказа, закрылась, за недостаточностью средств, гимназия, существовавшая уже более 25 лет. Прочные основы всеобщего народного образования в России были заложены только в 1782 г., когда 7 сентября был подписан указ о заведении народных училищ в 25 губерниях, а 5 августа 1786 г. утвержден для них устав»².

Резко выраженная сословность школы также начинает ослабляться к концу XVIII в., в чем немалая заслуга принадлежит русским просветителям XVIII в., начиная от Новикова и кончая Радищевым. В середине века возникает и самостоятельная русская наука, причем основоположниками и ведущими деятелями ее были «разного чина люди». Правящие органы заботились о том, чтобы оградить науку от представителей «низших» сословий. Однако даже сословное «разделение труда», которое обеспечивало для дворянства командные посты в армии,

¹ Н. Д. Чечулин. Воспитание и домашнее обучение в России в XVIII в. — В кн.: Дела и Дни. Кн. 1, 1920, стр. 110.

² Там же, стр. 99.

во флоте и в управлении, для купечества — потомственное почетное гражданство, а для детей духовенства — наследственное служение в приходах, не предусматривало ничего подходящего для науки. И хотя предполагалось, что наука также есть занятие для «благородных», последние не изъявляли особого желания заниматься ею. Поэтому наука становилась в России жизненным занятием разночинцев, во главе которых был Михаил Васильевич Ломоносов.

2

М. В. Ломоносов

Михаил Васильевич Ломоносов родился 8 (19) ноября 1711 г. в деревне Мишанинской Архангельской губернии, в семье помора. Уже с десятилетнего возраста он ходил вместе с отцом в море, бывал в Архангельске, в Соловках, на себе испытал всю тяжесть рыбацкого поморского труда.

Рано пробудившаяся тяга у Ломоносова к знаниям не нашла поддержки в семье. В 1720 г. умерла его мать. Отец женился второй, а затем и третий раз. В письме к И. И. Шувалову от 31 мая 1753 г. Ломоносов вспоминает «злую и завистливую мачеху, которая всячески старалась произвести гнев в отце моем, представляя, что я всегда сижу по-пустому за книгами. Для того многократно я принужден был читать и учиться, чему возможно было, в уединенных и пустынных местах и терпеть стужу и голод, пока я ушел в Спасские школы»³. Первыми книгами недуховного содержания, которые удалось изучить М. В. Ломоносову еще дома, были «Славянская грамматика» М. Смотрицкого и «Арифметика» Л. Магницкого. «Арифметику» он называл «вратами своей учености».

В конце декабря 1730 г., в лютую зимнюю стужу Ломоносов ушел в Москву. А в январе 1731 г. «города Холмогор дворянский сын Ломоносов» был принят в Славяно-греко-латинскую академию. Ему пришлось назваться дворянским сыном, так как лиц из податных сословий в академию не принимали. В академии Ломоносов основательно изучил латинский и греческий языки, «Грамматику» Смотрицкого и правила господствовавшего тогда силлабического стихосложения, но по математике и естественным наукам, которыми он начал интересоваться, по-видимому, в школьные годы, не узнал нового. В курс этого учебного заведения входили лишь начатки арифметики, значительно меньше того, что он изучил уже по книге Магницкого. В поисках знаний по математике Ломоносов отправился в конце 1734 г. в Киев. В Киевской академии относительно высоко было поставлено преподавание математических дисциплин.

В Киеве Ломоносов пробыл около 4—5 месяцев⁴. Однако из-за недостатка математических сочинений ему не удалось осуществить свое

³ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 10, стр. 481.

⁴ Г. Н. Моисеева. О пребывании М. В. Ломоносова в Киеве. — В кн.: Проблемы истории науки и техники. Изд-во АН УССР, К., 1963.

желание, он занимался главным образом изучением русских летописей и философией и собрал материал, который в дальнейшем использовал при составлении русской истории.

В октябре 1735 г. в числе лучших 20 учеников Ломоносов был послан в Петербургскую академию наук. Здесь он несколько меньше года изучал немецкий язык и, по-видимому, математику и химию, а в сентябре 1736 г. вместе с двумя другими студентами был послан за границу, в Германию. Заграничный период учебы Ломоносова начинается Марбургским университетом. В ноябре 1736 г. русские студенты были включены в список студентов университета и прикреплены к одному из самых выдающихся немецких ученых и педагогов того времени Х. Вольфу, глубокое уважение к которому Ломоносов сохранил на всю жизнь. Вначале Ломоносов изучал немецкий язык, арифметику, геометрию и тригонометрию, а несколько позже — французский язык и рисование. 15 сентября 1737 г. Вольф писал в Петербургскую академию наук, что русские студенты, «после того как усвоили арифметику, геометрию и тригонометрию, в настоящее время слушают у меня механику, причем я особенно досконально прохожу с ними то, что необходимо для знания машин, ибо полагаю, что сообразно с поставленной целью они должны заниматься не изучением тонких теорий, а того, что будет им впредь полезно для знания горных машин, после чего таким же образом следует гидростатика, аэрометрия и гидравлика; я намерен преподавать им также введение в маркшейдерское искусство с тем, чтобы при изучении горного дела на практике на это потребовалось бы меньше времени... Этой зимой они будут слушать экспериментальную физику...»⁵ В Марбурге Ломоносов основательно изучил труды Вольфа по физике и его знаменитую энциклопедию математических наук «*Elementa mathematicae universalis*» («Основания всеобщей математики»).

Летом 1739 г. русские студенты переехали в г. Фрейберг, чтобы продолжить свои занятия в области химии, металлургии и горного дела. Ломоносов слушал лекции горного инженера И.-Ф. Генкеля, а также непосредственно знакомился с практикой горного дела. Однако во Фрейберге Ломоносов учился недолго. Ему не понравилось отношение Генкеля, и он покинул Саксонию. Около года Ломоносов скитался по Германии, был даже насильно завербован в прусскую королевскую гвардию, откуда бежал. Но и в таких крайне тяжелых бытовых и материальных условиях он не переставал учиться. В 1740 г. ему удалось снова попасть в Марбург.

К этому времени относятся идеи Ломоносова о применении математики к естественным наукам: «В настоящее время я живу инкогнито в Марбурге у своих друзей и упражняюсь в алгебре, намереваясь применить ее к химии и теоретической физике», — пишет он в письме к Шумахеру от 16 ноября 1740 г.⁶

В июне 1741 г. М. В. Ломоносов вернулся в Россию и приступил к работе в Петербургской академии наук. В январе 1742 г. он был избран

⁵ А. А. К у н и к. Сборник материалов для истории Императорской Академии наук в XVIII веке. Ч. 1. СПб, 1865, стр. 113—114.

⁶ М. В. Л о м о н о с о в. Полн. собр. соч. Т. 10, стр. 430.



М. В. Ломоносов.

адъюнктом по физическому классу, а в августе 1745 г. — профессором (ординарным академиком) химии. С этого времени началась многогранная и всеобъемлющая деятельность Ломоносова, обеспечившая ему совершенно исключительное место в истории русского просвещения, культуры и науки. «Соединяя необыкновенную силу воли с необыкновенною силою понятия, Ломоносов обнял все отрасли просвещения. Жажда науки была сильнейшей страстию сей души, исполненной страстей. Историк, ритор, механик, химик, минералог, художник и стихотворец, он все испытал и все проник: первый усугубляется в историю отечества, утверждает правило общественного языка его, дает законы и образцы классического красноречия, с несчастным Рихманом предугадывает открытия Франклина, учреждает фабрику, сам сооружает махины, дарит художества мозаическими произведениями и, наконец, открывает нам истинные источники нашего поэтического язы-

ка ... но если мы станем исследовать жизнь Ломоносова, то найдем, что науки точные были всегда главным и любимым его занятием»,⁷ — так писал о нем А. С. Пушкин.

Как уже отмечалось, Петербургская академия наук с первых дней своего существования была укомплектована на редкость удачно. В составе ее были ученые, уже достигшие европейской известности, и представители талантливой научной молодежи, видное место среди которой занимал Л. Эйлер. Однако в годы бироновщины руководящую роль в академии захватила ее Канцелярия, во главе которой стоял библиотекарь Шумахер. Шумахер и вся Канцелярия имели весьма косвенное отношение к науке, но хорошо постигли искусство интриг. Пользуясь тем, что придворная клика в значительной степени состояла из немцев, Канцелярия, немецкая по своему составу, начала вести самостоятельную политику, подбирая академиков не по научным заслугам, а исходя из совершенно иных, ничего общего с наукой не имеющих оснований. Неудобные и «строптивые» ученые выживались. Так возникла «немецкая» партия в академии, с которой сразу же вступил в ожесточенную борьбу Ломоносов. Это была борьба за воспитание отечественных специалистов и повышение научного значения академии. Ломоносов глубоко уважал настоящих ученых немецкого происхождения: общеизвестна его дружба с Рихманом. С большим уважением он относился к своему учителю Х. Вольфу. Но его возмущали малограмотные дельцы, грабившие казну и упорно не желавшие допускать к научной работе русских, предпочитая им иностранцев, зачастую совершенно невежественных. Эта борьба шла с переменным успехом. По воцелении на престол дочери Петра I Елизаветы Петровны победила «русская» партия: была назначена следственная комиссия, Шумахер отстранен от должности, а место первого советника Канцелярии академии занял А. К. Нартов. Однако вскоре Шумахер был восстановлен, а Ломоносов посажен на несколько месяцев под арест.

И все же борьба за науку была не напрасной: вместо немецкого и французского языков, наряду с латинским, в академии был принят русский язык, решено было набирать в адъюнктуру только русских, увеличилось и число русских академиков. Возросла роль академических учебных заведений — университета и гимназии, основным назначением которых была подготовка научного персонала и переводчиков для учреждений академии. В 1766 г. по проекту Ломоносова был открыт Московский университет. Ломоносов боролся и за демократизацию науки. Отстаивая право разночинцев на образование, он требовал также права на образование и для крестьянских детей.

В феврале 1757 г. указом президента Петербургской академии наук Ломоносов был назначен членом академической Канцелярии. С еще большей энергией принялся он за упорядочение дел академии, в которой ему непосредственно были поручены Академическое, Историческое и Географическое собрания, а также гимназия и университет. Борьба за

⁷ А. С. Пушкин. Полн. собр. соч. Изд. 2-е. Т. 7. Изд-во АН СССР, М., стр. 28—29.

русскую науку продолжалась. Ломоносову приходилось тратить на нее столько сил и энергии, что удивительно, как он в таких трудных условиях мог заниматься интенсивным научным творчеством. Однако столь напряженная научная и организационная работа подорвала здоровье Ломоносова. К тому же он простудился и тяжело заболел и 4 апреля 1765 г. скончался.

Творчество Ломоносова следует рассматривать в двух аспектах: его собственные научные и литературные труды и труды по распространению наук в России. Весьма важной для истории русского образования и русской науки является его работа над усовершенствованием академических учебных заведений — университета и гимназии, — а также над проектом московского университета.

Гимназия при Петербургской академии наук была основана в 1726 г. и насчитывала сначала свыше 100 учеников, но со временем это число резко сократилось. Преподавали в ней профессора академии и специально приглашенные преподаватели, однако все они были иностранцами. Только в 1742 г. к преподаванию были допущены русские — академические переводчики. Контингент учащихся был весьма разнообразен, с заметным преобладанием разночинцев. Около трети учащихся составляли иностранцы. Кроме того, при академии числились также студенты, с которыми индивидуально занимались профессора.

В 1747 г. был утвержден первый Устав академии, по которому в университет предписывалось «принимать из всяких чинов людей, смотря по способностям, кроме положенных в подушный оклад». Было набрано 23 студента — все разночинцы, переведенные из Славяно-греко-латинской академии, а также из Новгородской, Александро-Невской (Петербургской) и Смоленской семинарий. В дальнейшем число студентов университета пополнялось за счет выпускников гимназии и вольнослушателей. «В организации учебного процесса деятельное участие принимал Ломоносов. Ему было поручено „обще с профессорами оное дело в совершенство привести, и лекции и часы так расположить, дабы всем потребным наукам учить“». ⁸ Математику читал Г. В. Рихман. Ломоносов сразу же поставил вопрос о структуре и правах университета: «... Думаю, что в Университете неотменно должно быть трем факультетам: юридическому, медицинскому и философскому (богословский оставляю синодальным училищам), в которых бы производились в магистры, лиценциаты и доктора... Не худо, чтобы Университет и Академия имели по примеру иностранных какие-нибудь вольности, а особливо, чтобы они освобождены были от полицейских должностей»⁹. В дальнейшем он развил и уточнил эту мысль.

Первый выпуск (январь 1753 г.) показал хорошую выучку студентов. Выявлены были и кандидаты для дальнейшей научной деятельности. Так, в своем отзыве о Софронове и Румовском академик Г. В. Рихман писал: «Не преминул я показать им первые основания алгебры. Подали оба specimens, которые похвалы от экзаменаторов удостоены. Но

⁸ Е. С. Кулябко. М. В. Ломоносов и учебная деятельность Петербургской академии наук. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1962, стр. 66.

⁹ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 10, стр. 460.

понеже математика в нынешнем веку приведена в толь великое совершенство, и оба к сей науке оказывают особливую склонность, и в оной, как кажется, превзойти желают, то не худо б было, когда б они другому, который в сей науке имеет надлежащую твердость и оная главное его дело, как каков Эйлер, поручены были в дальнейшее руководство, понеже они собственным своим прилежанием с трудом достигнуть могут до требуемого совершенства хотя б промыслить им все книги, какие о сей науке вышли»¹⁰. Так началось проникновение в академию русских ученых, которому безуспешно пытались воспрепятствовать Шумахер и его клика. Особенно они ненавидели Ломоносова — идейного руководителя русских ученых. Недаром зять Шумахера адъюнкт академии Тауберт говорил: «Разве-де нам десять Ломоносовых надобно? И один-де нам в тягость».

С 1753 г. Ломоносов начал вплотную заниматься делами академических учебных заведений. В письме к И. И. Шувалову от 1 ноября 1753 г. он охарактеризовал положение академии, которую Шумахер стремился сделать своей наследственной вотчиной. Интенсивная деятельность Ломоносова возымела, наконец, свое действие. В конце 50-х годов оба академических учебных заведения были переданы в его ведение.

Несколько раньше Ломоносову удалось добиться другой крупной победы — основания Московского университета. В письме к И. И. Шувалову, с помощью которого Ломоносов проводил задуманные мероприятия (июнь — июль 1754 г.), набросан план организации университета: «1) Главное мое основание, сообщенное вашему превосходительству, — пишет Ломоносов, — весьма помнить должно, чтобы план Университета служил во все будущие роды...

2) Профессоров в полном университете меньше двенадцати быть не может в трех факультетах.

В Юридическом три...

В Медицинском 3 же

I. Доктор и профессор химии.

II. Доктор и профессор натуральной истории.

III. Доктор и профессор анатомии.

В Философском шесть

I. Профессор философии.

II. — физики.

III. — оратории.

IV. — поэзии.

V. — истории.

VI. — древностей и критики.

3) При Университете необходимо должна быть Гимназия, без которой Университет, как пашня без семян»¹¹.

Эти же идеи развивал Ломоносов и при работе над планами академических учебных заведений. Так, при составлении регламента акаде-

¹⁰ Е. С. Кулябко. М. В. Ломоносов..., стр. 75.

¹¹ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 10, стр. 513—514.

мической гимназии он использовал свой же регламент московских гимназий, написанный в 1755 г. Весьма важным нововведением Ломоносова была организация русских «школ» (классов) в гимназии, а также перевод преподавания важнейших предметов — арифметики, геометрии, географии и даже самого латинского языка — с латинского языка на русский. В ряде русских школ, как средних, так и высших, начиная от Навигацкой и кончая военными и инженерными школами середины XVIII в., это мероприятие уже было проведено в жизнь и учебное ведомство академии в этом смысле оказалось наиболее косным.

К числу предметов, относящихся к «первым основаниям нужнейших наук» математического и естественного цикла, Ломоносов добавил тригонометрию и философию, в которую входила и физика. Примечательно, что при составлении плана преподавания в Харьковском коллегии последователь и почитатель Ломоносова С. Миславский также включил в курс философии физику и основы естественных наук, используя для этого в качестве учебных пособий в значительной степени сочинения и переводы самого Ломоносова.

В ряде документов Ломоносов выразил свои мысли о перестройке академического университета. Так, в записке о необходимости преобразования Петербургской академии наук (1758—1759 гг.) он проектирует разделение ее университета, подобно Московскому, на три факультета — юридический, медицинский и философский, — лишь несколько меняя специализацию кафедр и выделяя отдельную кафедру для математики. Известно, что в Московском университете долгое время отдельной кафедры математики не было.

Указом президента Академии наук К. Г. Разумовского от 19 января 1760 г. гимназия и университет были переданы в единоличное ведение Ломоносова. За пять лет он сумел сделать в академических учебных заведениях несравненно больше того, что было сделано до него. В гимназии он перестроил учебную программу, ввел новые более современные учебники и учебные пособия и, самое главное, ориентировал все преподавание на русский язык. Преподаватели-иностранцы были заменены русскими — адъюнктами академии и студентами академического университета. Результаты не заставили себя ждать. Если до Ломоносова только несколько выпускников гимназии были переданы для продолжения образования в университет, и те оказались плохо подготовленными, то за время его руководства в университет было передано 24 выпускника гимназии, в том числе будущие академики Иноходцев и Лепехин.

Еще большие преобразования провел Ломоносов в университете. Он распределил кафедры и студентов по трем факультетам в соответствии со своим проектом, подобрал профессоров и составил план занятий. В частности, преподавание математики было поручено проф. С. К. Котельникову. Интересно содержание и расписание прочитанных им последних курсов.

«[С. К. Котельников в 1761 г.] по понедельникам, вторникам, четверткам и пятницам, по полудни в третьем часу будет давать наставления всей математики по сокращениям Вольфовых первых оснований.

[В 1762 г.] будет показывать алгебру, по окончании которой станет изъяснять дифференциальные и интегральные выкладки, показав наперед в высшую геометрию краткое руководство, между тем будет задавать своим слушателям вопросы решить разные по понедельникам, вторникам, четверткам и пятницам в третьем часу по полудни.

[В 1763 г.] будет преподавать наставление во всех математических науках по Вольфову сокращению первоначальных оснований и притом показывать употребление алгебры в чистой и прикладной математике по понедельникам, вторникам, четверткам и пяткам в 3 часу по полудни»¹².

Не следует думать, что все преобразования осуществлялись Ломоносовым без затруднений. Наоборот, буквально каждое мероприятие встречало ожесточенное сопротивление со стороны Тауберта и ряда академиков-иностранцев. Противники Ломоносова после его смерти начали устанавливать свои порядки. Академический университет прекратил свое существование уже, по-видимому, спустя год после смерти Ломоносова. Гимназия же оставалась до конца столетия (упразднена в 1805 г.).

Однако идеи русского просвещения и русской науки, выдвинутые Ломоносовым, были подхвачены во всех культурных центрах страны. В частности, С. Миславский ввел педагогические методы Ломоносова в Харьковском коллегиуме и Киевской академии. Программа преподавания естественных наук, составленная им и ориентированная на лучшие учебные пособия того времени, по своему объему не уступала соответствующим курсам Московского и академического университетов. Огромное значение для развития русского просвещения имело творчество Ломоносова. На всех ступенях и чуть ли не по всем предметам обучения пользовались написанными и переведенными им книгами, его научными и литературными трудами.

Диапазон научного творчества Ломоносова был необычайно широк: химия, металлургия, горное дело; физика, геология, отечественная история, русский язык, поэзия, искусство — и везде он создал основополагающие работы. «Замечательно при этом, что ни одно дело, начатое Ломоносовым, будь то физико-химические исследования или трагедии и оды, составление грамматики и русской истории или организация и управление фабрикой, географические проекты или политико-экономические вопросы, — все это не делалось им против воли или даже безразлично. Ломоносов был всегда увлечен своим делом до вдохновения и самозабвения; об этом говорит каждая страница его литературного наследства»¹³.

Основной специальностью Ломоносова, если вообще можно говорить о специальности этого выдающегося ученого-энциклопедиста, наравне с химией, были горное дело и связанные с ним науки. Еще в Саксонии и затем во время путешествий по Германии он обращал особенное внимание на горные работы и старался вникнуть в них как можно детальнее. Для России второй четверти XVIII в. горнозаводское дело и связанное с ним металлургическое производство были основной и, в значи-

¹² Е. С. Кулябко. М. В. Ломоносов..., стр. 113.

¹³ С. И. Вавилов. Михаил Васильевич Ломоносов. Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 21.

тельной степени, определяющей отрасль всей русской промышленности. Растущее горнозаводское производство нуждалось в техническом персонале, знакомом с горным делом и обработкой руд, в механиках и в ряде других специалистов. Для этой цели на Урале были открыты горные школы, в которых учащихся обучали арифметике, геометрии, черчению, механике и архитектуре. Но специально горнозаводское обучение продолжало идти по старинке — путем индивидуального ученичества, и этого было недостаточно. Необходимость в руководствах по горному делу диктовалась самой жизнью.

Горное дело входило в круг наиболее ранних интересов Ломоносова. «...Главное мое дело есть горная наука, для которой я был нарочно в Саксонию послан», — писал он В. Н. Татищеву 27 января 1749 г.¹⁴ Еще в 1745 г. он составил минеральный каталог Кунсткамеры, в котором рассмотрел и пояснил свыше трех тысяч образцов минералов. В этом же году он представил свою работу «О вольном движении воздуха, в рудниках примеченном» (опубликована в 1750 и 1763 гг.), содержащую ряд практических рекомендаций по шахтной вентиляции. Впервые в России производство горных выработок получило теоретическое обоснование.

Однако наибольшее значение для русской горной промышленности имела знаменитая работа Ломоносова «Первые основания металлургии или рудных дел», изданная в 1763 г. Это было первое на русском языке руководство, в котором освещены все вопросы, интересовавшие горняков того времени. Кроме того, в этой книге изложено столько теорий и оригинальных мыслей Ломоносова, что ее следует считать научным трактатом в полном смысле этого слова.

Содержание руководства энциклопедично. Оно охватывает сведения о металлах и минералах с подробным описанием их свойств, производство горных работ, основания горной механики (подъемные машины, насосы и вентиляторы), элементы маркшейдерского искусства и металлургии черных и цветных металлов. Задавшись целью сообщить читателю ряд практических приемов, применимых к конкретным условиям горной практики, Ломоносов оговаривается, что делает это «только ради тех, которым геометрии инде научиться не случилось. В сем предложении все математические доказательства оставляю и только покажу самых к сему нужных задач решение»¹⁵. Он излагает ряд теорем о подобии плоских многоугольников и решает задачи на построение методом ортогонального проектирования.

Значительных результатов добился Ломоносов в физике. В первый же год работы в академии он начал интенсивную исследовательскую деятельность в области физики и смежных дисциплин. Основные черты мировоззрения Ломоносова наиболее четко отражены именно в его физических и физико-химических трудах. Он был мыслителем-материалистом. В результате своих физико-химических исследований он пришел к глубоким выводам: «...Все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько

¹⁴ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 10, стр. 462.

¹⁵ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 462.

присовокупится к другому, так, ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте ... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения»¹⁶. Одна из первых научных работ Ломоносова «Элементы математической химии» (1741 г.) посвящена исследованию строения материи. Уже в этом раннем произведении он принял, что материя состоит из «корпускул» (молекул) и «элементов» (атомов). Корпускула, пишет он, есть собрание элементов, образующее одну массу. Корпускулы однородны, если состоят из одинакового числа одних и тех же элементов, соединенных одинаковым образом, и разнородны, если элементы их различны и соединены различным образом или в различном числе. От этого зависит бесконечное разнообразие тел. Таким образом, Ломоносов значительно опередил современную ему науку. Он правильно объяснил природу теплоты, придерживался идеи неуничтожаемости материи и сумел найти связующие звенья между физикой и химией, высказав основные положения физической химии.

Характерной чертой творчества Ломоносова является органическая связь разработки теоретических вопросов с практикой: «Науки художествам путь показывают; художества происхождение наук ускорят. Обоим общею пользою согласно служат»¹⁷. Только с этой точки зрения и можно понять всю совокупность его творчества: разработка теоретических вопросов и немедленная проверка их на практике, устройство лабораторий, проведение физических и химических экспериментов и постройка фабрики, опыты с красителями и изготовление мозаичных картин. В 1748 г. он создал при Академии наук химическую лабораторию, к концу 50-х годов вместе с Рихманом восстановил физический кабинет, пострадавший в 1747 г. во время пожара в Кунсткамере, в 1753 г. построил Усть-Рудицкую мозаичную фабрику, на которой провел много экспериментов со стеклом.

Ломоносов сам конструировал необходимые ему приборы и оборудование. Для своей мозаичной фабрики он сконструировал едва ли не все станки и приборы. Ему принадлежит разработка первого в мире вискозиметра, пирометра, приборов для определения твердости тел и для испытания проволоки на разрыв, четырехпружинного морского хронометра, газового барометра, а также целого ряда оптических приборов и инструментов, из которых наибольшую известность получила «ночезрительная труба», не понятая современниками и послужившая причиной длительных (1756—1759 гг.) споров в Академии наук. Всего Ломоносов изобрел и построил около 100 различных физических, оптических, астрономических, навигационных, геофизических, геодезических и других приборов, а также много химического и технологического оборудования. Приборы и машины, созданные им, являлись результатом тщательной и зачастую кропотливой конструкторской разработки и точных расчетов.

Математика — одна из немногих наук, которыми Ломоносову не приходилось вплотную заниматься. И все же, изучая его труды, мы на

¹⁶ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 383.

¹⁷ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 351.

каждом шагу сталкиваемся с его мыслями, замечаниями и суждениями, имеющими самое прямое отношение к математике. В главе четвертой второго прибавления к «Первым основаниям металлургии» он рекомендует привлечь к геологическим исследованиям «высокие науки, а особливо механику твердых и жидких тел — к измерению сил действующия натуры, металлургическую химию — к разделению смешения минералов, слои составляющих, и обще геометрию — правительницу всех мысленных изысканий»¹⁸. Эта идея о теоретико-математическом исследовании выражена здесь не впервые. Еще в «Элементах математической химии» (1741 г.) Ломоносов, постулируя по Вольфу, что «все изменения тел происходят посредством движения», а следовательно, механически, приходит к заключению: «А так как знание механики предполагает знание чистой математики, то стремящийся к ближайшему изучению химии должен быть сведущ и в математике... Какой свет способна возжечь... математика, может предвидеть тот, кто посвящен в ее таинства и знает такие главы естественных наук, удачно обработанные математически, как гидравлика, аэрометрия, оптика и др.: все, что до того было в этих науках темно, сомнительно и недостоверно, математика сделала ясным, достоверным и очевидным. Правда, многие отрицают возможность положить в основание химии начала механики и отнести ее к числу наук, но отрицают они это, заблудившись в потемках скрытых свойств и не зная, что в изменениях смешанных тел всегда наблюдаются законы механики, а также испытывая недоверие к пустым и ложным умозрениям, которые навязывают ученому миру без какого-либо предварительного опыта иные теоретики, злоупотребляющие своим досугом. Если бы те, которые все свои дни затемняют дымом и сажей и в мозгу которых господствует хаос от массы непродуманных опытов, не гнушались поучиться священным законам геометров, которые некогда были строго установлены Евклидом и в наше время усовершенствованы знаменитым Вольфом, то несомненно могли бы глубже проникнуть в таинства природы, истолкователями которой они себя объявляют. В самом деле, если математики из сопоставления немногих линий выводят очень многие истины, то и для химиков я не вижу никакой иной причины, вследствие которой они не могли бы вывести больше закономерностей из такого обилия имеющихся опытов, кроме незнания математики»¹⁹. Если принять во внимание, что в то время химии как науки практически еще не существовало, то такие рекомендации методологической ценности математики для построения новой науки приобретают особое и весьма сильное звучание. И эта ссылка на методологическое значение математики встречается в научном творчестве Ломоносова постоянно. Так, в заметках по физике он пишет: «Заблуждались бы математики, если бы, отбросив самые простые понятия, стали исследовать трудные; заблуждаются физики, когда пренебрегают тем, что дает повседневный опыт, и ставят изысканные и трудные опыты»²⁰. Далее, в «Слове о пользе химии» (1751 г.) он высказал следующую мысль: «Таким образом, когда

¹⁸ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 574.

¹⁹ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 75.

²⁰ Там же, стр. 153.

химия пребогатая госпожи своя потаенные сокровища разбирает, любопытный и неусыпный натуры рачитель оныя чрез геометрию вымеривать, через механику развешивать и через оптику высматривать станет, то весьма вероятно, что он желаемых тайностей достигнет. Здесь, уповаю, еще спросить желаете, чего ради по сие время исследователи естественных вещей в сем деле столько не успели? На сие отвечаю, что к сему требуется весьма искусный химик и глубокий математик в одном человеке ... Не такой требуется математик, который только в трудных выкладках искусен, но который в изобретениях и в доказательствах привыкнув к математической строгости, в натуре сокровенную правду точным и непоползновенным порядком вывести умеет»²¹. Как видим, пользу от математики Ломоносов видит не только в методологическом, но и в практическом аспекте. Стремясь применить математику к наукам и перестроить последние так, чтобы они из эмпирических стали точными, стремясь само познание природы сделать точной наукой, Ломоносов пошел дальше всех своих современников и показал совершенно исключительное понимание законов развития наук о природе. Понимал он и значение роста темпов в развитии наук: «Пифагор за изобретение одного геометрического правила Зевесу принес на жертву сто волов. Но ежели бы за найденные в нынешние времена от остроумных математиков правила по суеверной его ревности поступать, то бы едва в целом свете столько рогатого скота сыскалось. Словом, в новейшие времена науки столько возросли, что не токмо за тысячу, но и за сто лет жившие едва могли того надеяться»²².

В истории науки в России XVIII в. гигантские фигуры Ломоносова и Эйлера занимают особое место. Организатор, основоположник и руководитель русской науки и русской высшей школы Ломоносов и основоположник русской математики Эйлер никогда не встречались, но хорошо знали, уважали друг друга и долгие годы переписывались. Ломоносов был хорошо знаком с трудами Эйлера и принимал участие в их переводе на русский язык и издании. Эйлер впервые познакомился с работами Ломоносова в 1747 г., когда ему в Берлин на отзыв были посланы диссертации Рихмана и Ломоносова. Последним было представлено две работы — «Диссертация о действии химических растворителей вообще» и «Физические размышления о причинах тепла и холода». В ответном письме в Петербургскую академию наук Эйлер писал: «Я чрезвычайно восхищен, что эти диссертации по большей части столь превосходны, что Комментарии Императорской Академии станут многим более значительны и интересны, чем труды других академий»²³. И специально о работах Ломоносова: «Все сии сочинения не токмо хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи, самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен в точности его доказательств. При сем случае

²¹ М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 354, 355.

²² М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч. Т. 1. стр. 424.

²³ В. Л. Ченакал. Эйлер и Ломоносов. К истории их научных связей. — В кн.: Леонард Эйлер. Сб. статей. Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 429.

я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие Академии были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов»²⁴.

Великий ученый и организатор научных исследований, основоположник русской материалистической философии в естествознании М. В. Ломоносов всю свою жизнь посвятил борьбе за русскую науку. Желая поднять национальное самосознание среди русских, он неоднократно подчеркивал самобытность русской науки. Если Эйлер учил первых русских математиков, то Ломоносов воспитал их и указал направления для творчества. Он же был и основным организатором высшего образования в России.

3

Труды русских математиков в последней четверти XVIII в.

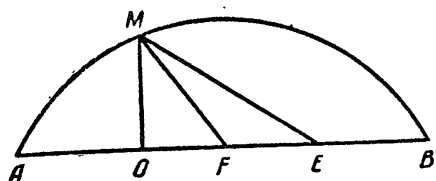
(ученики и преемники Эйлера)

История русской математики последней четверти XVIII в. тесно связана с историей Петербургской академии наук, которая оставалась центром научно-математического творчества до начала XIX в. Правда, в России уже появились такие научно-образовательные центры, как Московский университет, Горный институт, Морской, Инженерный и Артиллерийский корпусы. Однако все они занимались, в первую очередь, подготовкой соответствующих специалистов, хотя и нельзя отрицать важности их роли в организации математического просвещения в стране, в создании почвы для бурного роста математических исследований в XIX в.

Первый период истории математики в России, а именно возникновение и развитие математических исследований в большей мере связан с выдающейся личностью Эйлера. В значительной степени благодаря его трудам, его педагогическому мастерству и влиянию и возникла первая русская самостоятельная математическая школа, так называемая первая петербургская математическая школа. Но создание этой школы не было единоличным делом Эйлера. Оно было лишь звеном того исторического процесса, который в начале XVIII в. из стихийно развивающегося под влиянием резко возникшей необходимости хозяйственного развития России стал направленным, приобретая все тенденции к наращиванию научных достижений. Сознательно направляли этот процесс и Петр I, зачинатель науки в России, и такие деятели, как В. Н. Татищев, Я. В. Брюс, Феофан Прокопович и, наконец, М. В. Ломоносов, основоположник русской науки в самом широком смысле слова.

В развитии русской науки и культуры определенную роль сыграли и школы. Они дали первоначальную подготовку тем ученикам, которые

²⁴ В. Л. Ченакал. Эйлер и Ломоносов ..., стр. 429—430.



Чертеж к работе С. К. Котельникова.

впоследствии попали на выучку к Эйлеру и Ломоносову и затем сами стали учителями и вместе с ними заложили краеугольный камень русской науки.

Одним из первых русских ученых-математиков стал солдатский сын Семен Кириллович Котельников (1723—1806). В 11 лет он был принят в школу Феофана Прокоповича, в 1738 г. — переведен в Александроневскую семинарию, откуда в 1741 г. попал в академическую гимназию. В 1742 г. он уже учился в академическом университете, где слушал лекции Ломоносова по физике и Рихмана по математике. В 1748 г. Рихман писал: «Котельников, в отличие от других студентов, настолько успел, что приступил уже к изучению высшей математики и в ее прикладной части, т. е. в механике, гидростатике, гидравлике и аэрометрии, проявляет большое усердие»²⁵.

В сентябре 1750 г. Котельников представил академической конференции работу «О спрямлении и квадратуре конхоиды при помощи касательной», в которой определил величину площади, заключенной между конхоидой, касательной к ней в ее вершине и радиусом-вектором, а также длину самой конхоиды. Работу высоко оценил Эйлер. В письме к Шумахеру от 9 марта 1751 г. он писал: «Работа... свидетельствует о чрезвычайно тонком и весьма предрасположенном к математическим занятиям уме, тем более, что автор этой работы, по всей видимости, имел мало руководств в математике. Исследование же, не касаясь его автора, таково, что оно никак не посрамит „Commentarii“».

В марте 1751 г. Котельников был назначен адъюнктом академии и послан для усовершенствования за границу, где слушал лекции Генсиуса по геометрии и Кестнера по механике, а с середины 1752 г. по июль 1756 учился у Эйлера. В декабре 1752 г. он прислал Конференции Академии наук свою вторую работу — «Решение одной геометрической задачи» — об определении кривой AMB , площадь сектора которой AFM находится в постоянном отношении к углу AEM (см. рисунок). В декабре 1754 г. Эйлер рекомендовал Котельникова на кафедру высшей математики в Петербургской академии наук, его поддержал Ломоносов. Правда, только в декабре 1756 г. было издано соответствующее постановление: «Понеже Академии наук адъюнкт Семен Котельников, будучи при Академии, а потом в чужих краях, преизобрел достаточное знание, так что заслужил звание профессорское; к тому он состояния честного и трезвого, которое невозможно без того оставить, чтоб не окружить его, по его достоинству, высочайше ее императорского величества милостию, и для того определяют быть ему экстраординарным профессором высшей математики».

В 1760 г. Котельников был утвержден ординарным академиком,

²⁵ М. И. Сухомлинов. История Российской академии. Вып. 3. СПб, 1876, стр. 290.

а в 1783 г. избран членом Российской академии²⁶. Как и другие академики середины XVIII в., Котельников занимался весьма различными делами: читал лекции студентам академического университета и гимназии, публичные лекции по математике, участвовал в разработке проекта об учреждении школ и гимназий, заведовал Кунсткамерой, Гидрографическим департаментом, Библиотекой, издавал русские летописи, был цензором.

Кроме упомянутых выше двух научных работ Котельникову принадлежат еще три работы по математике и механике, несколько учебников, а также три статьи по физике. Мемуар «О равновесии сил, приложенных к телам» посвящен развитию принципа наименьшего действия в интерпретации Мопертюи и Лагранжа. Мемуар «Доказательства ряда $\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \dots (4n - 10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n - 1)}$ », написанный в связи с составлением учебника геодезии, содержит определение числа разбиений n -угольника на треугольники при помощи непересекающихся диагоналей. Педагогическую направленность имеет его работа «Слово о пользе упражнения в чистых математических рассуждениях», в которой на основе примеров из истории математики и естествознания он доказывает необходимость математических знаний.

В 1766 г. Котельников составил и издал учебник «Первых оснований математических наук часть первую, содержащую в себе арифметику». Этот учебник был предназначен для учеников Морского корпуса. В нем изложены действия с целыми и дробными числами, возведение в степень, извлечение корней, прогрессии и логарифмы. Учебник написан в стиле Вольфа, труден и особенного распространения не получил. В этом же году был издан другой учебник Котельникова — «Первые основания геодезии», — первое печатное руководство по геодезии на русском языке. Это была одна из самых нужных для русской школы книг. «Геодезия, — пишет Котельников, — не только с геометрией, но и с другими науками союз имеет твердый. В оной преподаются средства изобретать величину всему на земле, что мерению подвержено быть может. Средства состоят в знании геометрии и в искусном употреблении потребных к

ПЕРВЫХЪ
ОСНОВАНІЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ

НАУКЪ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
СОДЕРЖАЮЩАЯ ВЪ СЕБѢ
АРИΘΜΕΤΙΚУ,

въ
показу учащагося въ морскомъ и
хешномъ кадетскомъ Корпусѣ
благороднаго юношества
сочиненная
Профессоромъ Математики
и
Членомъ Санктпетербургской Императорской
Академіи Наукъ
Семеномъ Котельниковымъ.

ВЪ САНТ-ПЕТЕРБУРГѢ

При морскомъ и кадетскомъ Корпусѣ
1766 года.

Титульная страница книги
С. К. Котельникова «Первых основ-
ваний математических наук...».

²⁶ Российская академия была основана в 1783 г. Ее назначением было распространение «словесных наук»: составление словаря русского языка и русской грамматики, изучение памятников русской истории. С. К. Котельников принимал участие в составлении словаря русского языка.

тому орудий, которых сложение из механических, оптических и физических источников почерпается, чего ради геодезия должна из памятных наук заимствовать вспоможение». Учебник состоит из трех частей. В первой части изложены общие основания геодезии, во второй — различные измерения линий, углов, в третьей — правила нивелирования и дополнительные разделы. Книга хорошо иллюстрирована.

В 1771 г. Котельников перевел и издал «Сокращения первых оснований математики» Х. Вольфа, со своими дополнениями, относящимися к высшей математике, «О величинах переменных», «О дифференциальном калкулусе» и «О интегральном калкулусе». Эта книга, представляющая собой сокращения соответствующих работ Эйлера, была первым руководством по математическому анализу на русском языке. Она сыграла значительную роль в развитии математического образования в России. В 1774 г. Котельников опубликовал руководство по теоретической механике — «Книгу, содержащую в себе учение о равновесии и движении тел», — также имевшее важное значение для развития русской специальной и высшей школ.

Таким образом, первый из русских учеников Эйлера С. К. Котельников посвятил свою деятельность в основном созданию русской учебной литературы, что было для того времени первоочередной задачей.

Одним из первых русских математиков был также С. Я. Румовский. Степан Яковлевич Румовский (1734—1812) родился в семье священника. Первоначальное образование получил в Александро-Невской семинарии, из которой в 1748 г. был переведен в академический университет, где вскоре проявил склонность к математическим наукам. В 1752 г. он представил академической Конференции работу «Нахождение прямой

линии посредством тангенсов такой, которая бы равна была кривой эллиптической линии». Конференция отметила, что Румовский «довольно показал, что он в математике и в выкладках изрядный успех имеет, и ежели он с таким же прилежанием и ревностью в математике и физике вдаль происходить будет, с какою упражнялся до ныне, то по общему согласию достоин он повышения из студентов по академическому регламенту»²⁷.

В 1753 г. Румовский представил сочинение «Решение задачи Кеплера: по данному сектору найти полуординату» и был удостоен звания адъюнкта академии. В этом же году его послали в Берлин, к Эйлеру, у которого он жил и учился два года вместе с Котельниковым.

СОКРАЩЕНИЯ МАТЕМАТИКИ ЧАСТЬ ПЕРВАЯ,

содержащая
начальные основания
арифметики, геометрии
и тригонометрии,

сочиненная
Академиком Наукъ Адъюнктомъ
Степаномъ Румовскимъ.

Въ Санктпетербургѣ
При Императорской Академіи Наукъ
1760 году.

Титульная страница книги
С. Я. Румовского «Сокращения ма-
тематики».

²⁷ М. И. Сухомлинов. История Рос-
сийской академии, стр. 21.

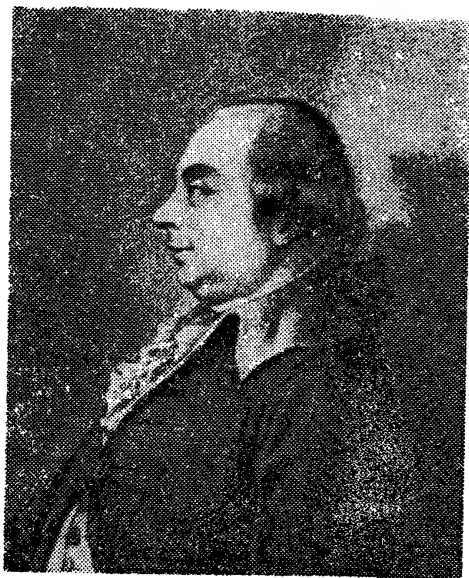
По возвращении в Петербург Румовский развил очень интенсивную научную деятельность: он организует и участвует в экспедициях, пишет учебники и научные мемуары, руководит Географическим департаментом академии, принимает участие в работах Российской академии наук. В 1763 г. его избирают экстраординарным, а в 1767 г. — ординарным профессором, в 1800—1803 гг. — вице-президентом Академии наук.

Научные работы Румовского относятся к астрономии, геодезии, математике и физике. По математике он написал семь работ. Все они представляют собой решения некоторых частных задач анализа, причем находятся в прямой зависимости от соответствующих работ Эйлера. Математическое содержание их не представляет особого интереса, хотя для своего времени они и имели определенное значение. Во всяком случае, в этих работах видно руку культурного математика, хорошо владеющего методами анализа.

В области астрономии Румовскому принадлежит ряд серьезных результатов. Он написал также учебник элементарной математики — «Сокращения математики», — опубликованный в 1760 г. Учебник состоит из четырех разделов арифметики, теоретической геометрии, плоской тригонометрии и практической геометрии.

Неудачно сложилась жизнь третьего русского ученика Эйлера по Берлину — Михаила Софронова (1729—1760). Сын бедного дьячка из г. Устюжны, он учился сначала в Новгородской семинарии, а в 1748 г. был принят в академический университет. В 1751 г. после академических экзаменов ему была дана следующая характеристика: «...На математические и физические вопросы изрядно отвечал, что, по мнению всех, в числе самых лучших быть удостоен... В физике, а притом и математике придти к совершенству желает, к чему и по нашему рассуждению весьма способен»²⁸. В ноябре 1751 г. по предложению инспектора университета академика Крашенинникова Софронov начал читать лекции по математике студентам второго курса университета.

В 1753 г. Софронov окончил университет и представил для получения звания адъюнкта работу «О спрямлении дуг эллипса». Эйлер дал благоприятный отзыв на эту работу. Софронov получил звание адъюнкта и был послан к Эйлеру для «усовершенствования в науках». У Эйлера



С. Я. Румовский.

²⁸ В. И. Смирнов и Е. С. Кулябко. Михаил Софронov — русский математик середины XVIII века. Изд-во АН СССР, М., 1954, стр. 11—12.

он учится недолго — с июля 1754 по май 1755 г., — так как был отозван в Петербург для преподавания математики в университете. Попад в Академию наук в такой период, когда там полновластно правили Шумахер и Теплов, враждебно относившиеся к Ломоносову и его воспитанникам, Софронов был не только не допущен к чтению лекций, но даже лишен звания адъюнкта и только в марте 1756 г. восстановлен в этом звании со значительно сниженным жалованием. Три года он работал переводчиком у академика Миллера. Из-за козней Шумахера и других бюрократических чиновников Академии наук, несмотря на старания Ломоносова, Софронову так и не удалось получить работу в университете. В сентябре 1759 г. его опять лишили звания адъюнкта академии. Жил он в крайней бедности. Умер 10 февраля 1760 г. (замерз на дороге).

Кроме упомянутого мемуара Софронов написал еще работу «Рассуждение о применении непрерывных дробей для нахождения квадратных и биквадратных корней и т. д.», опубликованную только в 1954 г.

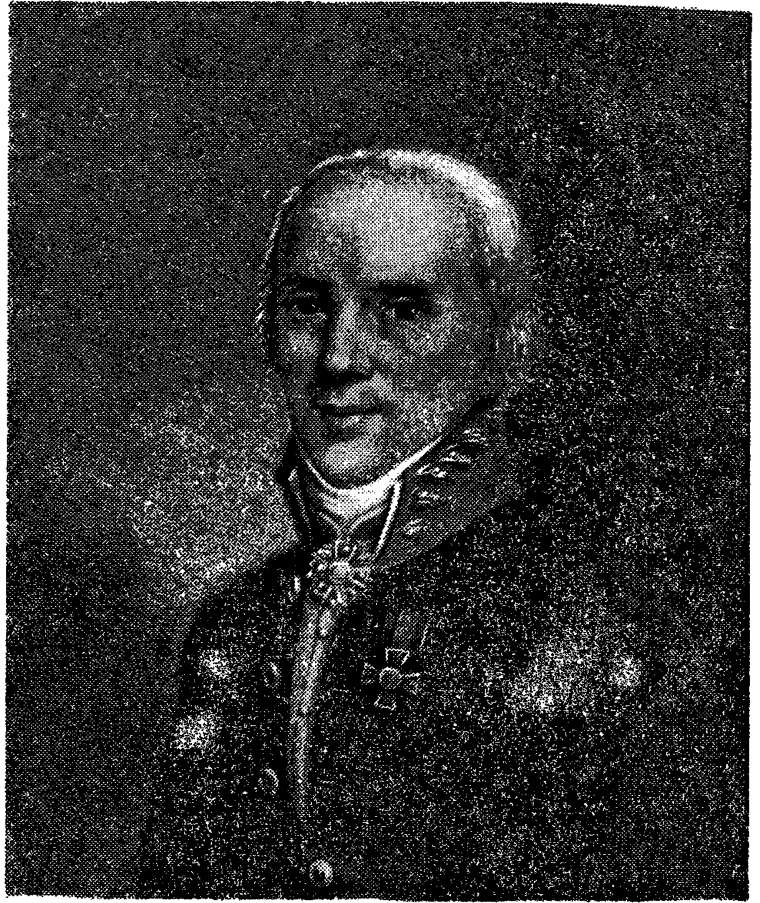
Недолго работал в Академии наук и Борис Афанасьевич Волков (1732—1762). Он родился в бедной семье (его отец был церковным сторожем). В академический университет был переведен в 1748 г. в числе лучших учеников из Славяно-греко-латинской академии. Волков показал настолько большие успехи в математике, что уже в 1751 г. был назначен преподавателем академической гимназии.

В 1754 г. Волков представил академической Конференции диссертацию «Рассуждение о квадратуре Гиппократовой луночки и конхоиды Никомеда». Диссертация получила одобрительный отзыв Эйлера. В архиве Академии наук сохранились еще две работы Волкова более позднего времени: «Математический опыт» (в ней с помощью рядов производится квадратура и спрямление квадратисы Чирнгаузена и «Наблюдения о некоторых правилах арифметики» (о тройном правиле)²⁹. Несмотря на то что Конференция академии нашла возможным присвоить Волкову звание адъюнкта, Канцелярия не утвердила это решение, и Волков в сентябре 1758 г. был назначен переводчиком. В этой должности он прослужил четыре года. Из его переводов наибольшее значение имеет «Вольфианская теоретическая физика».

Петр Борисович Иноходцев (1742—1806) родился в семье солдата. В 1752 г. он был принят в академическую гимназию, а в 1760 переведен в академический университет. В 1762 г. был назначен преподавателем математики в академической гимназии, а через два года (1765 г.) вместе с другими студентами университета послан за границу. Занимался в Геттингенском университете. В 1767 г. вернулся в Петербург, а в 1768 ему было присвоено звание адъюнкта академии за диссертацию «Specimen geodeticum de libellatione locorum» («Геодезический опыт об уровне мест»).

В 1769—1775 и 1781—1785 гг. Иноходцев участвовал в астрономических экспедициях. В 1776 и 1777 гг. читал публичные лекции по математике. В 1779 г. был избран экстраординарным, а в 1783 — ординарным академиком. С 1785 г., по возвращении из второй экспедиции,

²⁹ Е. С. Кулябко. М. В. Ломоносов..., стр. 139.



П. Б. Иноходцев.

опять приступил к чтению публичных лекций по математике. Тогда же был назначен директором академической гимназии, для которой составил краткое наставление к преподаванию математики (осталось в рукописи). «Как число обучающихся первым основаниям математики нарочито велико,— писал Иноходцев,— то непременно нужно быть двум учителям, из которых бы один преподавал арифметику, а другой геометрию и плоскую тригонометрию по книге г. коллежского советника и академика Румовского. Протолковав каждое правило, должно учителю спросить учащихся, довольно ли оное поняли и могут ли сами пересказать, в противном случае надлежит повторить. Причем стараться, чтобы ученики на предложенные им вопросы, особливо из геометрии, решения и причины сперва изустно пересказывали, а потом уже самые вычисления на доске делали, и доказательствами предлагали. Пред окончанием класса можно им задавать вопросы, которые бы они к следующему дню решили и учителю показывали»³⁰. Для студентов, отданных на обучение академикам, он предлагал «читать универсальную арифметику Л. Эйлера, показать употребление алгебры в высшей геометрии, о

³⁰ Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2, 1793, № 1, л. 1.

нужнейших кривых линиях или конических сечениях и изъяснять основания так называемого дифференциального и интегрального калькулюса. После сего проходить прикладную математику, на первый случай, по напечатанным Вольфовым сокращенным основаниям, дополняя нужнейшие из новейших писателей, например, из г. Кестнера». Такие лекции читать «дважды в неделю по два часа в назначенные дни, на весь курс употреблять два года, первый для чистой, а другой для прикладной математики»³¹.

Иноходцев был также членом Российской академии и принимал участие в составлении словаря русского языка. Ему принадлежит перевод известного учебника А. Г. Кестнера «Начальные основания математики» (ч. 1, 1792; ч. 2, 1794).

Михаил Евсеевич Головин (1756—1790), племянник М. В. Ломоносова, родился в крестьянской семье в Архангельской губернии. В 1765 г. был принят в академическую гимназию, в которой проучился до 1773 г. С этого времени он начал заниматься у академика В.-Л. Крафта физикой, а у Эйлера — математикой. В письме в академию от 13 сентября 1774 г. Эйлер писал о нем: «Стараюсь я равномерно на всякой вечер подать молодому Головину всякое нужное наставление в науках, в чем мне и посчастливилось от чрезмерной его охоты и неусыпного прилежания довести его до такой степени, до какой другие во много лет на университетах не дошли бы, так что он в короткое время в состоянии будет приносить Академии наиполезнейшие услуги, если только оный каким-либо производством более ободрен будет»³². В это время Эйлер уже почти потерял зрение и его ученики Н. И. Фусс и М. Е. Головин записывали под диктовку его мемуары.

В январе 1786 г. Головин подал Конференции диссертацию «Specimen dilucidationum quarumdam ad illustr. Euleri tractatum „Sur la construction et la manoeuvre des vaisseaux“» («Пример пояснений к сочинению знаменитого Эйлера „О постройке и вождении кораблей“») и одновременно с Фуссом был избран адъюнктом академии. Правда, дело не обошлось без шероховатостей — Головин, как крестьянин, принадлежал к податному сословию, но в преодолении этих препятствий, очевидно, помог ему авторитет Эйлера.

В звании адъюкта Головин проработал десять лет и в 1786 г. вынужден был подать в отставку из-за напряженных отношений с директором академии княгиней Е. Р. Дашковой. За годы службы в академии он перевел «Морскую науку» Эйлера, дополнив ее многими примечаниями и комментариями; «Сокращение астрономии или звездозакония» Лаланда и некоторые другие работы; написал несколько статей, курс тригонометрии, редактировал собрание сочинений М. В. Ломоносова, а также работал над изданием академических календарей. По уходе из академии Головин преподавал в Главном народном училище и Петербургской учительской семинарии. За это время он написал и издал руководства по арифметике, геометрии и архитектуре для народных училищ.

³¹ Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2, 1793, № 1, л. 1.

³² Е. С. Кулябко. М. В. Ломоносов..., стр. 144.

Руководства Головина, несмотря на краткость и элементарность изложения, сослужили большую службу в деле распространения математических знаний в России. Правда, в конце XVIII в. было уже немало руководств и учебных пособий на русском языке по разным отделам элементарной математики, однако в большинстве случаев они предназначались не для общеобразовательной, а для специальной, профессиональной школы, наиболее характерной для России XVIII в. Руководства же Головина были рассчитаны именно на начальную общеобразовательную школу, и поэтому многие недостатки их следует отнести в значительной степени за счет полного отсутствия педагогического опыта.

«Руководство к арифметике»³³ (ч. 1, 1783; ч. 2, 1786) содержит нумерацию, четыре действия с целыми и дробными числами, причем значительное место уделено десятичным дробям, объяснение арифметической и геометрической пропорций, извлечение корней. Методика изложения рецептурная, изложены правила, а затем даны примеры применения этих правил. Подобного метода Головин придерживается и в «Кратком руководстве к геометрии» (1786 г.), состоящем из трех разделов: лонгиметрии, планиметрии и стереометрии. В предисловии он дает некоторые методические советы, причем особенно подчеркивает практическое значение геометрии. «Руководство к механике» (1785 г.) и «Краткое руководство к гражданской архитектуре и зодчеству» (1789 г.) также имеют весьма четкую практическую направленность.

«Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным, надворным советником Академии наук членом и Учительской семинарии профессором» (написана в 1780 г., опубликована в 1789 г.) представляет собой первое на русском языке подробное руководство по тригонометрии, написанное на высоком научном уровне. В этой книге Головин опирается на работу Эйлера «Introductio» и на некоторые его мемуары, пользуется символикой Эйлера и, как и Эйлер, выводит все формулы лишь для первой четверти. Головин исходит из положения, что радиус окружности равен единице. Поэтому длину полуокружности он постоянно считает равной π . Что касается тригонометрических линий в единичном круге, то Головин вводит лишь синус, косинус, тангенс и котангенс. В руководстве достаточно подробно дан вывод уравнений и формул, связывающих тригонометрические величины между собой, а также приведены важнейшие теоремы, причем при доказательстве их автор пользуется аналитическим методом. Далее изложены способы вычисления и составления тригонометрических таблиц, решение треугольников. Вторая часть книги представляет собой достаточно подробное руководство по сферической тригонометрии: в первых двух главах даны все необходимые формулы и теоремы, а в третьей — решение сферических треугольников.

³³ О. Ф. Хичий в статье «Об авторстве первого учебника арифметики для народных училищ в России» (Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957) убедительно доказал, что первая часть «Руководства по арифметике» представляет собой перевод учебника С. Вуяновского, изданного в Вене в 1777 г. Можно полагать, что М. Е. Головин, который, несомненно, является автором второй части, действительно перевел первую часть и приспособил ее для русской школы.

Ближайшим учеником Эйлера и его секретарем был Николай Иванович Фусс (1755—1826). Эйлер пригласил его по рекомендации Д. Бернулли. В 1776 г. по предложению Эйлера Н. И. Фуссу было присвоено звание адъюнкта. В 1783 г. он был избран ординарным академиком, а с 1800 г. исполнял обязанности постоянного секретаря Академии наук. Фусс преподавал также в Сухопутном и Морском корпусах.

Научное творчество Фусса в значительной степени связано с работами Эйлера. Секретарь и ближайший ученик Эйлера, он сначала занимался разработкой некоторых вопросов, порученных ему Эйлером, а затем перешел к самостоятельному творчеству, также не удаляясь от эйлеровской тематики. Основные его работы относятся к геометрии. В области элементарной геометрии Фусс изучал построение многоугольников, в которые можно вписать и около которых можно описать окружность, построение треугольников и другие вопросы. Его тематика, относящаяся к сферической геометрии, связана с построением сферических треугольников и исследованием их свойств. В области дифференциальной геометрии он решил ряд задач на определение свойств кривых, параметры которых связаны определенными соотношениями.

Фусс написал также мемуары о решении дифференциальных уравнений, нахождении некоторых квадратур, а также по некоторым вопросам анализа, физики и механики. Всего опубликовано свыше 100 его мемуаров. Написанная и опубликованная Фуссом биография Эйлера с приложением списка всех его работ в значительной степени облегчила исследование и публикацию научного наследия великого ученого.

Кроме работы в Академии наук Фусс занимался преподавательской деятельностью, причем был не только преподавателем, но и методистом. Будучи членом Главного правления училищ, он принимал деятельное участие в реформе среднего образования. С педагогической его деятельностью связано составление им курса элементарной математики. Первый том курса, посвященный алгебре, был издан на французском языке в Петербурге в 1733 г., а на русском — в 1799 г. Курс Фусса это по сути эйлерова «Алгебра», сокращенная и приспособленная для преподавания в средней школе. Учебник неоднократно переиздавался в начале XIX в.

Учениками Эйлера были его старший сын Иоганн-Альбрехт Эйлер (1734—1800) и Вольфганг-Людвиг Крафт (1743—1814). И.-А. Эйлер учился в средней школе в Берлине, затем с ним занимался отец. В 1754 г. он был избран членом Берлинской академии наук, а с 1758 г. начал работать в королевской астрономической обсерватории. В 1766 г. И.-А. Эйлер был приглашен на кафедру физики в Петербургскую академию наук, где и работал до конца жизни. С 1769 г. он исполнял обязанности секретаря Конференции академии.

Основные труды И.-А. Эйлера относятся к астрономии. Кроме того, в последние годы жизни отца он помогал ему в работе и записывал под диктовку его мемуары. Собственно математикой И.-А. Эйлер занимался мало. Известна, в частности, одна его математическая статья, напечатанная в 1767 г. в трудах Мюнхенской академии. Эта статья посвящена решению одной задачи по вариационному исчислению. Он принимал

участие в написании «Теории движения Луны, исследованной новым методом, вместе с астрономическими таблицами, с помощью которых легко можно вычислить положение Луны в любой момент». Эта совместная работа трех академиков — И.-А. Эйлера, И. А. Лекселя, В.-Л. Крафта — под руководством Леонарда Эйлера была издана в 1772 г.

Вольфганг-Людвиг (Логин Юрьевич) Крафт, сын академика Г.-В. Крафта, родился в Петербурге в 1743 г. Вместе с отцом выехал в Германию, где и учился. В 1764 г. опубликовал в Тюбингене диссертацию «Об отношении весов на полюсе и на экваторе». В 1767 г. вернулся в Россию и был принят в качестве сотрудника в штат академической экспедиции в г. Оренбург. В 1768 г. избран адъюнктом, а в 1771 — ординарным академиком Петербургской академии наук.

В.-Л. Крафту принадлежит три мемуара математического содержания («Nova Acta», 1788, 1801, 1805), из которых наибольшее значение имеет «Трактат о простых числах». Много внимания уделял он вопросу постановки преподавания математики и распространению математической культуры, преподавал в Сухопутном кадетском и Инженерном корпусах, а также в Горном институте.

Андрей Иванович Лексель (Андрей Иоганн Лексель) (1740—1784) — астроном и математик. Родился в Або в Финляндии. Окончил Абосский институт и в нем же затем преподавал математику. В 1769 г. по предложению Эйлера был приглашен в Петербургскую академию наук и в 1771 г. избран ординарным академиком по астрономии. Свои математические работы Лексель посвятил классификации видов интеграла

$\int \sqrt{\frac{f + gz^2}{h + kz^2}} dz$, которые изучал Эйлер, определению прямым путем условий, при которых дифференциальная функция n -го порядка $v(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ является полной производной дифференциальной функции $(n-1)$ -го порядка $W(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Следуя Даламберу, он решал уравнения типа

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_i \frac{dx}{dt} + \beta_i \frac{dy}{dt} + \gamma_i x + \delta_i y = T_i \quad (i = 1, 2),$$

а также рассматривал более общую систему уравнений.

Лекселю принадлежат значительные результаты в области сферической тригонометрии и сферической геометрии. В мемуаре «О свойствах кругов, описанных на поверхности шара»³⁴ он показал, что геометрическим местом вершин всех треугольников с общим основанием и равной площадью является малая окружность, и вывел формулы для определения углов треугольника через их стороны и величину d

$$\sin A = \frac{d}{\sin b \sin c}; \quad \sin B = \frac{d}{\sin c \sin a}; \quad \sin C = \frac{d}{\sin a \sin b},$$

где

$$d = 2 \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)},$$

³⁴ А. J. Lexell. De proprietatibus circulorum in superficie sphaerica descriptorum. — Acta Acad. sci. Petropol. P. 1, 1782, p. 58—103.

а также формулы для определения сторон треугольника через углы и величину δ

$$\sin a = \frac{\delta}{\sin B \sin C}; \quad \sin b = \frac{\delta}{\sin C \sin A}; \quad \sin C = \frac{\delta}{\sin A \sin B},$$

где

$$\delta = 2 \sqrt{-\cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)};$$

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c); \quad S = \frac{1}{2} (A + B + C).$$

Эти формулы вошли в учебную литературу как формулы Лекселя.

Сферической геометрии до Лекселя практически не было. Поэтому четыре его мемуара, относящиеся к этой науке, являются основополагающими. В основу своих исследований Лексель положил рассмотрение свойств кругов, построенных на сфере. Наиболее известна его теорема о геометрическом месте высот сферических треугольников, имеющих общее основание и равные площади. Исследования Лекселя в области сферической геометрии продолжили Н. И. Фусс и Ф. И. Шуберт.

Федор Иванович Шуберт (1758—1825), уроженец Гельмштедта, был сначала домашним учителем, затем работал в должности ревизора. В 1785 г. был приглашен в Петербургскую академию наук, в 1786 — избран адъюнктом по математике, а в 1790 г. — академиком. Работы Шуберта в основном относятся к астрономии. Он руководил астрономической обсерваторией, написал ряд руководств по астрономии, а также значительное количество мемуаров. Математике посвящено 30 мемуаров. По сферической геометрии Шуберт написал мемуар «Задачи науки сферики»³⁵. В нем он решил четыре задачи на отыскание геометрических мест вершин треугольников, в которых даны основание, отношение синусов двух других сторон, отношение их косинусов, отношение синусов полусторон и отношение косинусов полусторон, и отметил сходство в решениях треугольников на плоскости и на сфере. В работе «Сферическая тригонометрия по Птолемею»³⁶ Шуберт, исходя из теоремы Менелая о трансверсалиях и следуя Птолемею, строит систему сферической тригонометрии.

Важные результаты получил Шуберт и в других областях математики. В мемуаре «Об определении делителей»³⁷ он предложил общее правило для разложения многочлена вида

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots$$

на рациональные множители в виде многочленов первой, второй и высших степеней.

Некоторые вопросы аналитической и дифференциальной геометрии Шуберт исследует в картографической работе «О географической проек-

³⁵ F. T. Schubert. *Problemata ex doctrina sphaerica*.— *Nova Acta Acad. Petropol.* T. 12, 1801, p. 196—216.

³⁶ F. T. Schubert. *Trigonometria sphaerica a Ptolemaeo*.— *Nova Acta...* T. 12, 1801, p. 165—175.

³⁷ F. T. Schubert. *De Inventione divisorum*.— *Nova Acta...* T. 11, 1793, p. 172—182.

ции эллиптического сфероида»³⁸, где он один из первых применяет понятие конформного отображения. В этой работе он исследует вопрос об ошибке, которая получается в результате представления Земли в виде сферы и доказывает теорему: если проектировать эллипсоид вращения с одной точки экватора на плоскость, перпендикулярную радиусу этой точки, то меридианы и параллели переходят в эллипсы, подобные меридиану эллипсоида.

Яков II Бернулли (1759—1789) — сын Иоганна II Бернулли — учился у Даниила (своего дяди) Бернулли в Базеле, затем работал секретарем австрийского посланника в Венеции, где познакомился с некоторыми итальянскими математиками. В 1786 г. был избран адъюнктом Петербургской академии наук, а в 1788 г. получил кафедру ординарного академика. Работы его в основном относятся к механике, и лишь одна — к области анализа.

Таким образом, в круг ближайших учеников и преемников Эйлера по Петербургской академии наук входят две группы воспитанных им ученых. Одну группу составляют иностранцы, прибывшие в Россию и, подобно своему учителю, нашедшие в России вторую родину, другую — ученики различных русских школ, отобранные в академическую гимназию, затем в академический университет и затем посланные за границу, к Эйлеру.

Труды Эйлера, Ломоносова и других выдающихся отечественных ученых и просветителей не пропали даром. Если в начале XVIII в. Татищев еще сомневался в надобности академии, то уже во второй половине века в России было развито самостоятельное научное творчество, в том числе и математическое. Однако первая русская система среднего и высшего образования недолго продержалась на достигнутом тогда уровне. Уже в 1765 г. из 18 студентов университета 9, «не имея склонности более обучаться наукам», просили исключить их и определить к должностям. Некоторое время в университете обучалось всего лишь несколько студентов. Академическая гимназия просуществовала, как уже отмечалось, до 1805 г. Основной целью обоих учебных заведений было «расплодить науку в народе», однако они, подобно всем другим русским учебным заведениям XVIII в., фактически перешли в конце концов на подготовку вспомогательного научного персонала, адъюнктов и пере-

³⁸ F. T. Schubert. De projectione sphaeroidis ellipticae geographica. — Nova Acta... T. 2, 1788, p. 130—146.

РУКОВОДСТВО КЪ АРИΘМЕТИКЪ ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ ГИМНАЗИИ

при
императорской
АКАДЕМІИ НАУКЪ
переведено съ Нѣмецкаго языка
ЧРЕЗЪ ВАСИЛІА АДОЛФОВИЧА
АКАДЕМІИ НАУКЪ АДЪЮНКТА.



ВЪ САНКТЪ-ПЕТЕРБУРГѢ

1740.

Титульная страница книги Л. Эйлера «Руководство к арифметике».

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE TOMVS X.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNUM MDCCXCII.



PETROPOLI
TYPS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCII.

Титульная страница академического журнала «Новые Акты...».

пуска некоторые ненужные или редко употребляемые предложения, не упуская из виду алгебры, как необходимо нужной части по нынешнему состоянию математических наук.

Потом проходил тригонометрию, которую предложил я аналитическим порядком, дабы доказать первый приступ к выкладкам трансцендентных количеств, зависящих от циркуля.

После тригонометрии показывал первые основания дифференциального и интегрального калькулюсов, изъясняя правила примерами и прикладом в лечонных задачах, показав первый приступ к понятию учения о кривых линиях и на сем покончил мои лекции сентября 13 дня.

Сперва было довольно слушателей, полны лавки; но как обычай есть, потом приходило и меньше и больше и от времени убывало, осталось к концу весьма малое число. Сколько их каждый раз приходило, я не считал, но соображался с числом наиприлежнейших³⁹.

Одним из последних учеников Котельникова был Алексей Кононович Кононов (1766—1795). С 1773 по 1785 г. он учился в академической гимназии, с 1785 г. — в Геттингенском университете у Кестнера. В 1789 г. вернулся в Петербург и представил в академию две диссертации: «Полагая dx постоянным, определить интеграл дифферо-дифференциального уравнения $\frac{ddy(x^2 - 1)}{dx^2} + \frac{xdy}{dx} = nny$, как конечным выражением, так и сходящимся и расходящимся рядом» и «Аналитический опыт: полагая dx постоянным при $x + \frac{ydy}{dx} - S = \text{const}$ и обозначая через

водчиков. В последней четверти XVIII в. студенты академического университета непосредственно занимались у того или иного академика: Академия наук вернулась к своему первоначальному методу подготовки специалистов. В 1785 г. при академии читались публичные лекции, которые могли посещать все желающие. В частности, курс математики читал в течение 11 лет, с 1785 по 1796 г., академик С. К. Котельников, хотя для него это было затруднительно. Не лишен интереса рапорт академика Котельникова, датированный 3 октября 1793 г., о прочитанных им лекциях: «Порядок лекций моих и способ преподавания был следующий: сперва начал я с арифметики, и преподавал оную совокупно с алгеброю, изъясняя доказанные правила примерами и прикладами в задачах.

После арифметики геометрию, последую Евклидовым элементам, вы-

³⁹ Архив АН СССР, ф. 3, оп. 9, № 488, л. 4.

$\frac{ydy}{dx}$ субнормаль, а через S — дугу, определить зависимость между x и y и найти для этой зависимости геометрическое место». Кроме того, он был подвергнут экзамену в академической комиссии, на котором ему были заданы следующие вопросы:

академиком Н. Фуссом —

1. Как определяется радиус кривизны кривых линий в общем случае и как применяется общее выражение к определенным кривым?

2. Определить площадь параболического сегмента, хорда которого проходит через фокус параболы.

3. Найти интеграл от $\frac{adx}{a^2 - x^2}$.

4. Пусть дана прямая линия и две точки вне ее. Следует найти при помощи метода наибольших и наименьших такую точку на заданной прямой, что сумма расстояний от нее до заданных точек будет минимальной.

5. Выразить эллиптическую дугу с помощью бесконечного сходящегося ряда.

6. Найти центр тяжести параболического сегмента.

7. Вычислить давление воды на плюзовый щит водяной мельницы с заданной поверхностью.

8. Найти сумму ряда $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$;

академиком Ф. Шубертом —

1. Какая зависимость существует между логарифмами и гиперболой?

2. Какая природа подкасательной логистической кривой?

3. Какую кривую воспроизводит развертка циклоиды?

4. Найти сумму $\int \frac{dx}{1+x^2}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Какую форму должен иметь сосуд, наполненный водой, чтобы вода, вытекая через отверстие, имела равномерную скорость?

Несмотря на то что для решения было предоставлено всего несколько часов, Кононов почти на все вопросы дал удовлетворительные ответы. После экзамена он был избран адъюнктом академии.

В бытность свою адъюнктом Кононов написал три работы, относящиеся к анализу.

4

Организация системы общего образования в России. Математика в Московском университете

В XVIII в. часто Академия наук рассматривалась как административное учреждение, обязанное «служить государственной пользе» своими «инвентами» (изобретениями). Этим поясняется тот парадоксальный факт, что академией руководила не академическая Конференция, как следовало бы, а академическая Канцелярия.

Управляемая беззастенчивыми дельцами типа Шумахера, она нанесла русской науке много вреда: отняла много здоровья у самого Ломоносова, а более слабых, тех молодых ученых, кто не мог постоять за себя, просто изгоняла из академии. Но Ломоносов, кроме академической образовательной системы, создал еще одну систему — Московский университет и его гимназии.

Московский университет был основан в 1755 г. Тогда же при нем были открыты две гимназии — для дворян и для разночинцев. Каждая из них делилась на четыре «школы», или группы предметов. Две «школы» — «школа российская» и «школа латинская» — были обязательными для всех учеников, а две — «школа первых оснований наук» и «школа знатнейших европейских языков» — представлялись на выбор учащимся. Последняя в свою очередь делилась на немецкую и французскую. Латинская и русская школы состояли каждая из трех классов — нижнего, среднего и «верхнего». Во французской и немецкой школах было по два класса. В каждой школе кроме изучения собственно языка «показывались» ученикам «науки» — арифметика, геометрия, география, история. В дворянской гимназии изучались еще необязательные предметы — военная и гражданская архитектура, теоретическая и экспериментальная физика, алгебра и др.

Вначале, по крайней мере в первое десятилетие, подготовку учащихся в университет осуществляла гимназия разночинцев, дворянская же гимназия была самостоятельным учебным заведением, вроде гражданского корпуса для дворян, готовившихся к государственной службе, тем более что в 1763 г. была закрыта Юнкерская школа при Сенате, единственное профессиональное училище для подготовки чиновников. Но уже в 70-х годах в обеих гимназиях преподавание велось по одному учебному плану. Как видно из сохранившегося расписания занятий за 1792—1793 гг., «первые основания наук» не были связаны с определенным классом. В нем указывалось лишь, какие предметы преподавали отдельные учителя, что несколько напоминало объявления середины XVIII в. о лекциях, читавшихся академиками для желающих. До конца XVIII в. так называемые реальные предметы продолжали сохранять второстепенное значение. Однако объем их в значительной степени увеличился, и те разделы элементарной математики, которые в середине столетия читались в университете, к концу столетия изучались уже в средней школе. Впрочем, это положение с «второстепенностью» математических (и некоторых других) предметов, определилось самим профилем университета. Вначале в университете было только три факультета — юридический, медицинский и философский. Кроме того, каждый студент изучал некоторый «набор» предметов по своему выбору. По преобладанию тех или иных наук всех студентов можно было разделить на три группы — «общеобразовательных наук», юридическую и медицинскую. Математику изучали обычно большинство студентов всех трех групп.

Таким образом, сначала Московский университет был профессиональной школой для подготовки врачей, юристов, чиновников и учителей. Поскольку гимназии при университете являлись в определенном

смысле также профессиональными школами и давали законченный цикл знаний (пусть даже поверхностных), то сразу же оказалось, что они не смогут обеспечить для университета полный штат студентов. Поэтому на протяжении почти всего века периодически выделяли своих лучших учеников в университет духовные семинарии. Особенно это касалось Киевской академии, которая стала как бы подготовительной ступенью для русских высших школ XVIII в. С этой же целью была открыта в 1758 г. гимназия в Казани.

В середине XVIII в. возникла еще одна форма образования, основанная в определенной мере на частной и в некоторой — на общественной инициативе, но строго сословная в обоих случаях. Это — пансионы, количество которых к концу века заметно увеличилось и которые, пожалуй, имели самое большое число учащихся. В пансионах преподавалась, в зависимости от знаний учителей, и математика — в подавляющем большинстве арифметика. В последней четверти века появились пансионы, организованные «на общественных началах» дворянскими обществами (в Твери, Рязани, Новгороде, Воронеже, Чернигове, Нижнем Новгороде, Казани и Курске). Лучшим был Московский университетский пансион, основанный в 1779 г. Подобно гимназиям, он являлся в некоторой степени подготовительной школой Московского университета, но отличался от них тем, что в центре внимания в нем были не гуманитарные, а «реальные» науки.

Итак, если не учитывать профессиональных школ, то система среднего образования в России во второй половине XVIII в. состояла из гимназий, пансионов и духовных семинарий, которые тогда являлись не чисто профессиональными, а в некотором смысле и общеобразовательными школами. Если добавить к ним еще несколько купеческих пансионов, подготовительное училище при Академии художеств и Институт благородных девиц — первую женскую школу в России, основанную в 1764 г., — то становится ясной возросшая потребность в учебниках и преподавателях.

Довольно распространенным было приглашение домашних учителей, в качестве которых выступали семинаристы разных классов, иностранцы, случайно попавшие или специально приехавшие в Россию, и др. Поскольку зачастую оказывалось, что знания у таких учителей были чрезвычайно недостаточными, была сделана попытка аттестации их, на что соответствующие административные права получил Московский университет. В 1757 г. был издан указ, запрещающий принимать учителей без аттестата, выданного Московским университетом. Этот указ, правда, не всегда и не везде исполнялся, но все же имел некоторое влияние.

В 1776 г. при университете была организована педагогическая семинария. Это первое учебное заведение профессионально-педагогического характера готовило учителей для гимназий и для самого университета.

Ознакомимся теперь с московскими математиками и их трудами. Напомним, что в Московском университете под чистой математикой понимали арифметику, геометрию, тригонометрию и алгебру. Прикладная же математика представляла собой совокупность прикладных зна-

нии в значительно сжатом объеме по астрономии, механике, гномонике, оптике, гидравлике, архитектуре и другим предметам.

Однако не следует думать, что Московский университет по уровню педагогической работы был ниже современных ему западноевропейских университетов. Последние не имели ни установленных программ, ни общепринятых учебных планов, и та сумма знаний, что сообщалась студентам, зависела исключительно от знаний и педагогического опыта профессора. Кроме того, профессора были универсалами и им приходилось преподавать многие совершенно разные предметы. Поэтому в большинстве университетов объем математических знаний ненамного превышал тот, который в настоящее время дается в средней школе. На постановку преподавания математики и физики большое влияние оказали педагогические методы марбургского профессора Вольфа. Это влияние чувствовалось и в Московском университете.

Первым преподавателем математики в Московском университете был Антон Алексеевич Барсов (1730—1791). Первоначальное образование он получил в Славяно-греко-латинской академии, откуда в 1748 г. в числе лучших учеников был направлен в академический университет. В университете Барсов выделился своими успехами в математике и словесных науках. Особенно хорошо о нем отзывался академик Рихман, которому он помогал в проведении опытов. В декабре 1753 г. Барсов был произведен в магистры и оставлен при академии в качестве переводчика и преподавателя математики в университете. К этому времени относится его перевод работы Рихмана «Рассуждение об указателе электричества и о пользовании им при исследовании явлений искусственного и естественного электричества» и книги академика А.-Н. Гришова «Описание знатнейших микроскопов, употребляемых ныне к рассматриванию красоты естества в самых мелких вещах, с употреблением оных и с приобщенным напереди кратким известием о изобретении зрительных труб и микроскопов, в пользу охотников, особливо в Российском государстве». В феврале 1755 г. Барсов был назначен преподавателем математики в Московском университете, где и читал чистую математику. В 1761 г. он перешел на кафедру словесности, передав преподавание математики своему ученику Д. С. Аничкову. В 1758 г. в университете была учреждена кафедра математики. Первоначально ее предложили Барсову, но он отказался, и кафедру занял преподаватель И. А. Рост.

Иван Акимович Рост (1726—1791), уроженец Ганновера, окончил Гейдельбергский университет, откуда переехал в Москву. О его работе сохранилось немного сведений. Известно только, что он был знающим и опытным преподавателем. После 1758 г. читал главным образом прикладную (механику, военную и гражданскую архитектуру), а иногда и чистую математику. Учениками его были В. К. Аршеневский и М. И. Панкевич.

Дмитрий Сергеевич Аничков (ок. 1738—1788) оставил значительно больший след в истории русской математической культуры, чем его предшественники. Учился в семинарии при Троице-Сергиевской лавре. В 1755 г. был принят в университет. За время учебы в университете

Д. С. Аничков получил пять золотых медалей. По окончании университета (1762 г.) начал преподавать в гимназии (тригонометрию и алгебру) и в университете (геометрию и тригонометрию, а с 1765 г. также логику, философию и математику на латинском языке). В 1769 г. Аничков подал в совет университета диссертацию для получения звания ординарного профессора «О начале и происшествии натурального богопочитания», в которой высказал несколько атеистических суждений. За эти суждения ему «было поставлено на вид». И несмотря на то что он переделал в соответствующем духе свою работу, звание ординарного профессора было ему присвоено лишь в 1777 г.

В качестве основного руководства Аничков принял математические учебники И.-Ф. Вейдлера. Их он перевел на русский язык и издал в 1765 г.: «Аналитика специоза или алгебра», «Арифметика теоретическая и практическая», «Геометрия теоретическая и практическая» и «Плоская тригонометрия». Эти учебники представляют собой сокращения математических руководств Х. Вольфа. Примечательно, что за год до издания «Арифметики» Вейдлера Аничков издал свою «Теоретическую и практическую арифметику, в пользу и употребление юношества, собранную из разных авторов». В следующем году Аничков перевел и издал также «Военную архитектуру или фортификацию» Вейдлера.

В 1780 г. Аничков опубликовал части своего курса математики — «Теоретическую и практическую геометрию» и «Теоретическую и практическую тригонометрию», в следующем году — «Начальные основания алгебры, или арифметики литеральной» и в 1787 г. — «Начальные основания фортификации, или военной архитектуры». Все его учебники написаны в духе Вольфа. Несмотря на сухость, метод Вольфа имел и свои достоинства — он приучал логически мыслить, что, по сравнению с рецептурными методами, было уже шагом вперед.

Из руководства Аничкова наиболее удачна «Арифметика». Она переиздавалась четыре раза. Два раза была переиздана «Тригонометрия», остальные же учебники не переиздавались. К концу XVIII в. русская учебно-математическая литература выросла настолько, что учебники Аничкова были уже устаревшими. Самое трудное положение с учебниками было в середине 60-х годов, когда Аничков издал свою «Арифметику» и четыре учебника Вейдлера. В эти годы библиотека Московского университета могла предложить студентам только учебники Вейдлера, Вольфа, Крафта, Штурма на латинском языке и совсем старый учебник Андрея Таке. Поэтому переведенные и написанные Аничковым учебники явились значительным вкладом, если не в русскую науку, то, во всяком случае, в русскую культуру.

Василий Кондратьевич Аршеневский (1758—1808) родился в Киеве. Учился в гимназии и в университете у Аничкова и у Роста. По окончании университета преподавал в гимназии, а с 1795 г. — в университете. Это был первый профессор Московского университета, начавший читать элементы высшей математики, правда уже после 1800 г. Почти одновременно с ним в университете учился другой киевлянин — Михаил Иванович Панкевич. По окончании университета Панкевич защитил

в 1788 г. магистерскую диссертацию «О важнейших гидравлических машинах». После смерти И. А. Роста он занял кафедру прикладной математики и читал курс прикладной, или, как ее еще называли, смешанной, математики.

К 80-м годам XVIII в. относится первая серьезная попытка организации на всей территории России сети однородных школ общего образования. В сентябре 1782 г. под председательством выученика Киевской академии П. В. Завадовского (1739—1818) начала работать «Комиссия об учреждении училищ», в состав которой входил переехавший в Россию из Австрии бывший директор темешварских училищ Ф. И. Янкович. Комиссия разработала предложение, по которому во всех городах России следовало открыть народные училища, в уездных городах — малые, а в губернских — главные. Для подготовки первой группы учителей народных училищ были приглашены лучшие студенты Александроневской, Смоленской и Казанской семинарий и Славяно-греко-латинской академии. Янкович познакомил их с новыми методами обучения, в некоторой степени заимствованными из австрийской народной школы. В 1783 г. при участии этих учителей были открыты народные училища в Петербурге, в которых через два года насчитывалось уже 1193 учащихся. В этом же году для подготовки учителей было открыто в Петербурге Главное народное училище. Это было, пожалуй, первое учебное заведение в России, свободное от многопредметности. Согласно учебному плану, в нем преподавались закон божий, русский, латинский и немецкий языки, география, история, математика, физика, естествознание и рисование. В низших классах училища преподавали ученики Янковича, в старших — профессора Академии наук.

В 1786 г. был выработан устав народных училищ. Для малых училищ был установлен курс в два класса, а для главных — в четыре класса, в трех из которых обучение было годичным, а в последнем — двухгодичным. Математику изучали во всех четырех классах в таком объеме: I класс — ознакомление с числами; II класс — первая часть арифметики; III класс — вторая часть арифметики; IV класс — основания геометрии и гражданской архитектуры. Как видим, комиссия и здесь не смогла полностью отрешиться от практической направленности преподавания и оставила в программе один из разделов смешанной математики — основания гражданской архитектуры.

Комиссия также поручила ряду лиц составление учебников, так как имевшиеся учебники и учебные пособия оказались непригодными для этого нового типа школ. Составлением учебников по математике ведал М. Г. Головин, принимавший деятельное участие в работе комиссии.

В 1786 г. при Главном народном училище были открыты педагогические курсы, преобразованные затем в учительскую семинарию. В семинарии преподавались те же предметы, что и в училище, но более основательно. М. Е. Головин на титульном листе своей тригонометрии именуется «Академии наук членом и Учительской семинарии профессором». Очевидно, уже к 1789 г. это новое учебное заведение приобрело некоторый авторитет. За 18 лет, с 1783 по 1801 г., семинария подготовила 425 учителей. Примерно до 1792 г. она готовила учителей для открытых

народных школ. Число ее воспитанников к 1794 г. заметно сократилось. Был даже поставлен вопрос об ее дальнейшем существовании. Но в этом же году, в связи с воссоединением белорусских и украинских земель с Россией, потребовался новый большой контингент учителей, подготовкой которых семинария и занималась до 1800 г. В 1803 г. она была преобразована в учительскую гимназию, а затем — в Педагогический институт. В последние годы своего существования учительская семинария готовила учителей с некоторой специализацией. Было установлено две группы предметов, по которым велась подготовка. В первую входили математика, архитектура и физика, во вторую — натуральная история, политическая история и география.

В 1787 г. при Московском главном народном училище была также открыта педагогическая семинария для подготовки учителей малых народных школ. За 13 лет, по 1800 г. включительно, она подготовила 46 учителей из числа студентов Славяно-греко-латинской академии, Троицкой и Перервинской духовных семинарий.

В течение всего XVIII в. преподавателями и студентами учительских семинарий, да и многих других учебных заведений, были выученики школ духовного ведомства, причем в первой половине века основную роль в этом отношении играли Киевская академия и Харьковский коллегиум, а во второй — Славяно-греко-латинская академия, Александровская и прочие семинарии духовного ведомства, в учебный план которых входили «реальные» предметы, в частности математика. В отношении подготовки преподавателей математики некоторую роль сыграли также цифирные, а затем и гарнизонные школы.

Б

Математика в русских военных и инженерных школах

Со времени своего возникновения русские школы получили профессионально-сословное направление, которое сохранили почти до конца XVIII в. Такое положение обуславливалось хозяйственным и культурным развитием России. Преобразования Петра I потребовали коренного изменения крайне медленной и ненадежной подготовки специалистов. «Для распространения в нашем отечестве теоретических и практических сведений по инженерной части по распоряжению правительства:

а) приглашались из областей вновь присоединенных к России (Лифляндия) и из разных государств Европы сведущие инженеры и техники в нашу службу на выгодных условиях;

б) учреждены были инженерные школы в Москве и в Петербурге; поощрялись частные школы, где обучали недорослей артиллерийской и инженерной наукам;

в) дозволено было дворянам ездить в Западную Европу за границу для обучения артиллерии и инженерству;

г) употреблялись всякого рода поощрения и награды обучавшимся этим наукам; служившие в инженерах получали оклады жалованья больше противу «армии»;

д) во время зимней стоянки войск по квартирам или в крепостях назначались инженерные офицеры для обучения солдат инженерному делу;

е) определены были необходимые предметы знания, «составлявшие нужную часть инженерства»;

ж) фортификации обучали не только в Морской Академии, в полковых школах, но и в духовных семинариях»⁴⁰. Учились при этом не только добровольно, но чаще «с принуждением». Поэтому бегство учеников из школ было в XVIII в. обычным явлением.

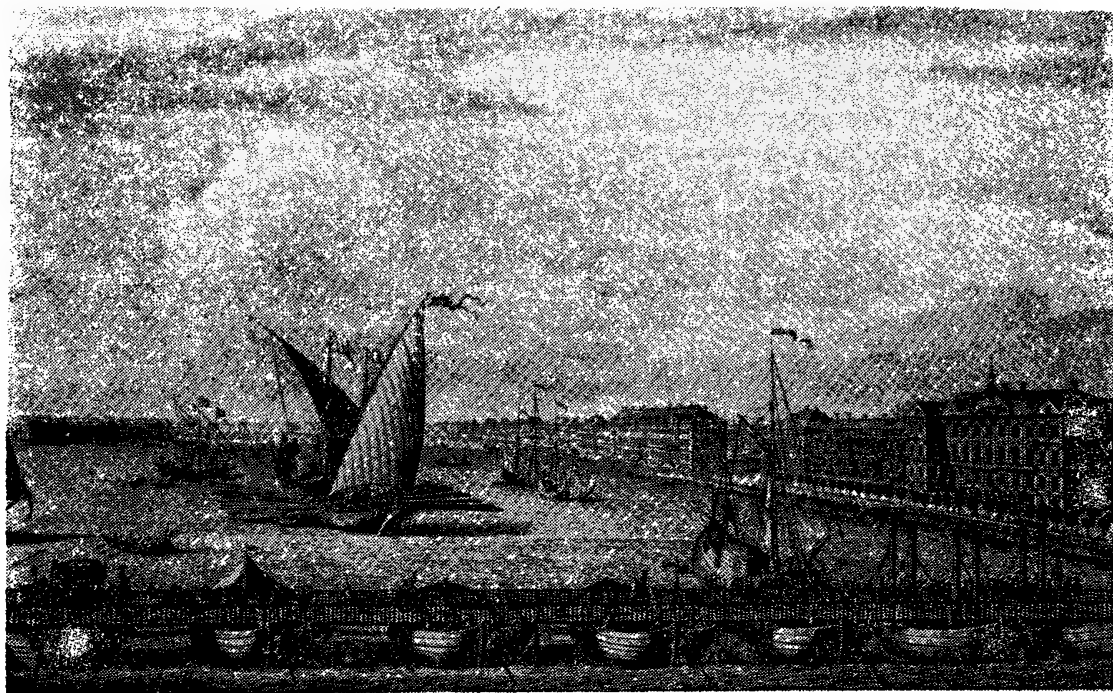
В связи с профессиональной направленностью школ в начале века становится понятным, почему особое внимание уделялось математике, тем более что все прикладные науки считались, в сущности, ответвлениями прикладной математики, для овладения которой следовало предварительно изучить теоретическую. Поэтому-то первым типом русской школы и были цифирные школы. Правда, они не воспитали «математиков», но совершенно несомненна их роль в распространении математического просвещения в стране. Задуманы были эти школы довольно основательно. Вот, например, инструкция, данная учителю такой школы:

«Ехать тебе в Переяславль Рязанский и по указу Его Императорского Величества 714 и 716 годов учить тебе дьячих, подьяческих, поповых и прочего церковного чину, архиерейского дому и монастырских слуг детей их, по высылке от воеводы, от 10 лет до 15, а посадских и прочих чинов детей же, которые сами похотят, кроме дворянских детей, а дворянских детей отнюдь не принимать, арифметике, а именно, нумерации, аддиции, субстракции, мультипликации, дивизии, тройных правил и тройных детрательных, как без долей, так и с долями и десятичного счету и деления, радикасу квадрата и радикасу куба; а который ученик вышеозначенную науку обучит, тех учить геометрии, а именно: прежде истолкованию геометрии и циркульных приемов, потом тригонометрии плоской, планиметрии и штирометрии»⁴¹.

В течение первых десяти лет через цифирные школы прошло 1389 чел., но окончило их лишь 93 чел., все остальные бежали. Бежавшие опять попадали в школы, только в другие, в школы при архиерейских домах, уже в первой четверти века начавшие преобразовываться в духовные семинарии. Иными словами, на одних и тех же учеников были рассчитаны два типа учебных заведений — цифирные школы и семинарии. Чтобы сохранить за собой свои «кадры», Синод решил ввести преподавание в семинариях «как арифметики, так и нужнейшей части геометрии, дабы они обеих вышеозначенных и церкви и гражданству потребных наук были искусны и тем оба определения, то есть и прежде состоявшееся о арифметическом и геометрическом учении Его Импера-

⁴⁰ А. С а в е л ь е в. Исторический очерк инженерного управления в России. СПб., 1879, стр. 39.

⁴¹ Историко-статистическое описание Рязанской духовной семинарии. Новгород, 1864, стр. 3.



Вид на здания Сухопутного шляхетного корпуса.

торского Величества указы и изложенное потом о свойственной науке синодальное установление исполнили бы». Однако введение «реальных» предметов не достигло своей цели, оставить семинаристов за духовным ведомством не удалось.

К 50-м годам XVIII в. все отрасли военного образования — морское, артиллерийское, инженерное и сухопутное — были сословно-дворянскими. Учеников недворянского происхождения принимала только Навигацкая школа, которая была, в сущности, математическим факультетом Морской академии. Был еще один тип школ, оказавший в дальнейшем влияние на распространение математических знаний в России и вместе с духовными семинариями давший основную массу учителей математики (арифметики и геометрии). Это — гарнизонные школы, учрежденные указом 1732 г. и предназначенные для обучения солдатских детей. Кроме солдатских детей в гарнизонные школы определялись также бродяги, дети архиерейских дворян, слуг и детей боярских, а также дети дворян для приобретения элементарного и подготовительного образования. Учителями арифметики, артиллерии и «инженерства» назначались офицеры соответствующих полков. В 1744 г. к гарнизонным школам были присоединены цифирные школы, что еще больше усилило их математическую направленность. Уже с середины века гарнизонные школы были чем-то вроде педагогических училищ, из которых приглашали учителей математики.

Что же представляли собой военные учебные заведения? Рыцарская академия (основана в 1731 г.), подобно большинству школ того времени, была многопредметным учебным заведением, в котором изучались

предметы по выбору. В число предметов были включены юридические и политические науки, так как академия готовила учащихся не только к военной, но и к гражданской деятельности.

В 1762 г. Рыцарская академия была преобразована в сугубо военное учебное заведение — Сухопутный шляхетный кадетский корпус. Однако многопредметность в корпусе осталась. В 1784 г. проверкой было установлено, что за девять лет кадеты не успевали закончить изучение арифметики, геометрией не могли овладеть и за 12 лет и в конце концов у них оказывалось такое количество наук, что они, «отчаиваясь успеть во всем, ни к одной, по-видимому, затем не применялись и ни в одной не успевали». Поэтому в учебный план начали вносить изменения, а в 1800 г. Сухопутный кадетский корпус был преобразован в I Кадетский корпус — среднее учебное заведение, основанное уже на совершенно иных началах.

Определенную роль в развитии русского математического просвещения сыграли преподаватели Сухопутного корпуса Степан Назаров⁴² и Карл фон Людевих.

Назаров составил два учебника по элементарной математике. Первый — «Начальное основание геометрии с доказательствами», написанный около 1756 г., — по-видимому, остался в рукописи, второй — «Практическая геометрия» — был издан в двух частях в 1760—1761 гг. и впоследствии дважды переиздавался (в 1767 и 1775 гг.). «Практическая геометрия» включала лонгиметрию, планиметрию, штиргеометрию (первая часть) и тригонометрию (вторая часть). Методические качества учебника были невысокими. В сущности, он состоял из набора практических задач с решениями без объяснений и доказательств. Людевих издал «Краткое руководство к арифметике» (1758 г.).

В 1758 г. две школы — Артиллерийская и Инженерная — были слиты. Директором объединенной школы был назначен известный деятель военного и инженерного образования капитан Михаил Иванович Мордвинов (1730—1782). Мордвинов окончил Сухопутный шляхетный корпус (1747 г.) и с 1756 г. руководил Инженерной школой. По его плану в 1762 г. объединенная инженерная и артиллерийская школа была преобразована в Артиллерийский и инженерный шляхетный корпус. Особое внимание Мордвинов уделил в своем плане постановке преподавания математических наук. Он включил, в частности, механику, арифметику и низшую алгебру, начальную и высшую геометрию, «свойства трех сечений конуса и прочее до сего относящееся»⁴³.

Преподавателем математики в корпусе был воспитанник академического университета Яков Павлович Козельский. Козельский родился на Украине. Учился в Киевской академии, в 1750 г. поступил в академическую гимназию «на собственном коште», затем учился в университете, а в 1757 г. перешел на военную службу.

⁴² Р. К. Федотова, Е. В. Хатагурова. Документы о математике Степана Назарова. — Исторический архив, 1960, № 1, стр. 238.

⁴³ М. Лалаев. Исторический очерк военно-учебных заведений. СПб, 1880, стр. 41.

Находясь на военной службе, Козельский много времени уделял научной работе и переводам. С 1764 по 1766 г. он написал и издал девять оригинальных работ и переводов математического, инженерного и философского содержания.

Козельскому принадлежат два учебника, написанные специально для Артиллерийского и инженерного корпуса, «Арифметические предложения» и «Механические предложения», изданные в 1764 г. «Арифметические предложения» состоят из четырех глав: «О целых числах», «О ломаных числах», «О содержании и пропорции чисел» и «О выкладках геометрических». Уже само заглавие показывает, что содержание руководства шире заглавия. Например, в четвертой главе изложены правила возведения в степень, извлечения квадратных и кубических корней, действия с логарифмами, приведены некоторые задачи на измерения длин, площадей и объемов. Методика изложения Козельского тяжеловесная и в некоторой степени отражает все ту же «вольфианскую математическую методу» с ее определениями, положениями, аксиомами, теоремами и прочими формами математической логики XVIII в. Однако чутье практического инженера, да к тому же литератора, помогло сделать учебник понятным и доступным для учащихся ⁴⁴.

М. И. Мордвинов руководил корпусом с некоторым перерывом — до 1764 г. и с 1771 г., когда вернулся в корпус, будучи «директором от строения государственных дорог». Особенно большое значение придавал он преподаванию математических дисциплин: «Геометрия, — указывал он в одной из своих инструкций, — получая надлежащее развитие в ее практических приложениях, должна иметь свое основание в систематическом изложении евклидовых начал, знание которых каждому, кто только чему-нибудь учиться хочет, нужно... наука счисления есть основание всем математическим наукам и изъяснять примерами, а потом за нужное почитается обучать счислению литерами, чтобы сделать способными учеников к понятию трудных геометрических доказательств. Нынешние авторы пишут все свои дела алгебраически. Итак, не зная сей науки, ученик ими пользоваться не может» ⁴⁵.

В 1784 г. был утвержден новый учебный план корпуса, согласно которому учащиеся двух младших возрастов проходили все общеобразовательные предметы по курсу главного народного училища. В старших классах предметы были распределены следующим образом: в четвертом классе изучались арифметика и практическая геометрия, в пятом — литерная арифметика (алгебра), геометрия, тригонометрия и смешанная математика, в шестом — алгебра, механика и гидравлика. Математику в корпусе преподавали Н. В. Верещагин и Е. Д. Войтаховский.

Николай Васильевич Верещагин (1744—1807) окончил в 1762 г. этот же корпус и был оставлен для подготовки к преподаванию математики. Это был один из наиболее культурных преподавателей корпуса.

⁴⁴ В. Е. Прудников. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. Учпедгиз, М., 1956, стр. 126—129.

⁴⁵ Историческое обозрение II Кадетского корпуса. СПб, 1862, стр. 109—110.

«Он знакомил своих учеников с „Введением в анализ бесконечных“ Эйлера, показывая им, между прочим, как пользоваться известными подстановками Эйлера при преобразовании квадратных корней из квадратных трехчленов к рациональному виду, и обобщал эти преобразования на корни более сложного вида. Знакомил также с решением систем уравнений 1-й степени с 2, 3, 4 и т. д. неизвестными при помощи определителей и с многими другими новинками математической науки того времени... Н. В. Верещагин одним из первых в России начал преподавать аналитическую геометрию»⁴⁶.

Е. Д. Войтяховский в 1787—1790 гг. издал четырехтомный «Теоретический и практический курс чистой математики, содержащий в себе Арифметику, Геометрию, Тригонометрию с практикою с описанием пропорционального циркуля или сектора, Алгебру с высшими степенями, Криволинейную геометрию с теориею и практикою искусства бросания бомб в пользу и употребление юношества и упражняющимся в Математике». Благодаря полноте и удачному расположению материала, а также значительному количеству практических задач, курс Войтяховского был одним из самых распространенных пособий для русской средней школы. Пользовались им почти 40 лет (7-е издание вышло в 1824 г.). По методике изложения Войтяховский примыкает к вольфианцам, у которых заимствует систему изложения теоретического материала.

Таким образом, Артиллерийский и инженерный корпус, подобно другим русским высшим учебным заведениям XVIII в., объединял в себе функции высшей, средней и даже начальной школы. Этим отчасти объясняется его многопредметность, характерная вообще для русской школы того времени. Однако, благодаря умелому руководству и хорошо подобранному коллективу преподавателей, он был одной из лучших школ того времени.

Морской кадетский корпус (бывшая Морская академия) также страдал многопредметностью, но уже с самого начала в нем было хорошо поставлено преподавание математики. Это объясняется историей корпуса, которая ведет свое начало от Московской навигацкой школы, первого математического заведения в России. По штату для преподавания математики и навигацких наук корпусу полагалось 15 чел. — один профессор, два учителя и при них шесть подмастерьев и шесть учеников. Профессором был назначен приглашенный из Англии математик Ньюберн, а одним из подмастерьев стал ученик Магницкого по Навигацкой школе Н. Г. Курганов (1722—1796).

Николай Гаврилович Курганов родился в Москве, в семье унтер-офицера. В 1738 г. поступил в Навигацкую школу, а в 1741 г. был переведен в Морскую академию. Окончил академию в 1746 г. и был оставлен при ней в качестве подмастерья математических и навигацких наук. В этой же должности он оставался и по преобразовании академии в корпус. В начале 70-х годов Курганов был назначен профессором.

В 1757 г. был издан учебник Курганова «Универсальная арифметика, содержащая основательное учение, как легчайшим способом разные

⁴⁶ В. Е. Прудников. Русские педагоги-математики..., стр. 147.

вообще случающиеся, математике принадлежащие арифметические, геометрические и алгебраические выкладки производить». Этот учебник был с восторгом принят для руководства в корпусе и вытеснил известную «Арифметику» Магницкого. «Достоинства „Арифметики“, Курганова были так несомненны, написана она была таким простым и ясным языком, что знаменитый Магницкий со своим славянским языком и запутанными определениями окончательно и навсегда померк в учебной литературе»⁴⁷.

«Универсальная арифметика» Курганова состоит из пяти частей, четыре из которых включают арифметику и ее некоторые приложения к геометрии, а пятая посвящена алгебре. Все исследователи отмечают сходство методик Курганова и Магницкого. И Магницкий и Курганов стремились составить не только учебник для школы, но и общедоступное руководство и поэтому обращали особое внимание на решение задач. Однако у Курганова была уже современная ему математическая литература, в частности «Арифметика» Эйлера, что заметно повлияло на характер книги и создало ей завидную известность. Для следующих изданий Курганов сократил учебник — исключил геометрические задачи, из алгебры оставил извлечение корней, пропорции, прогрессии и логарифмы и при этом несколько увеличил объем собственно арифметики. В таком виде книга была издана в 1771, 1776 и 1791 гг. под названием «Арифметика или числовник, содержащий в себе все правила числовой выкладки, получающиеся в общежитии, в пользу всякого учащегося, воинского, статского и купеческого юношества». Однако вскоре потребовалось переиздание и полного, первого, варианта книги, что и было осуществлено в 1794 г.

В 1765 г. Курганов издал «Генеральную геометрию», состоящую из трех частей: лонгиметрии, планиметрии и стереометрии с плоской и сферической тригонометрией. Учебник для преподавания оказался трудным, и в 1769 г. Курганов издал в дополнение к нему «Элементы геометрии, то есть первые основания науки о измерении протяжения, состоящие из осьми книг, изъясненных новым способом, удобопонятнейшим юношеству», переработанный перевод с французского. Эта книга была принята в корпусе в качестве учебника.

⁴⁷ Е. Я. Колбасин. Литературные деятели прошлого времени. СПб, 1859, стр. 191—192.

ГЕНЕРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

или

Общее название, продолжения составившая
Теорию и Практику оной
науки.

книга первая

содержащая в себе элементы теоретической, плоской тригонометрии
и сферики.

Сочинение для учащихся в морской коллегии, в
академическом корпусе благородного юношества, Казанского
университетского и кадетского
школы учащихся Николая Курганова.



ВЪ САНКТ-ПЕТЕРБУРГѢ

Печатано въ типографіи того же
Корпуса 1765 года.

Титульная страница книги
Н. Г. Курганова «Генеральная
геометрия».

Кроме математических работ Курганову принадлежат также труды в области навигации, военного дела и русского языка. Он хорошо знал французский, немецкий, латинский и английский языки.

Семен Иванович Мордвинов (1701—1777). Окончил Морскую академию (первый выпуск). Был послан во Францию для изучения морского дела. По возвращении в Россию служил во флоте, в частности в 1726—1729 гг. плавал в эскадре адмирала Сенявина. В 1736—1739 гг. С. И. Мордвинов составил «Книги полного собрания о навигации», которые были изданы в 1748—1753 гг. в четырех частях. Особенно примечательным является отдел тригонометрии «Полного собрания» (плоская и сферическая тригонометрия), написанный с доказательствами. С. И. Мордвинову принадлежит также ряд изобретений.

В Морском корпусе некоторое время преподавали В. Н. Никитин и П. И. Суворов. Василий Никитич Никитин (1737—1809) учился в Славяно-греко-латинской академии и был оставлен при ней учителем греческого языка. В 1765 г. был послан в Англию в качестве инспектора русских студентов. Занимался в Оксфордском университете математикой, физикой, астрономией и языками и получил в 1771 г. степень магистра, а в 1775 г. — действительного магистра. По возвращении в Россию преподавал математику в Морском кадетском корпусе, (с 1783 г. — главный инспектор классов корпуса). Был членом Российской академии.

Одновременно с Никитиным в Англии учился Прохор Игнатьевич Суворов (ок. 1748—1815), воспитанник Тверской семинарии, затем студент Оксфордского университета. Он также получил степень действительного магистра. По возвращении в Россию преподавал в Морском кадетском корпусе математику, латинский и английский языки и словесность. В 1798 г. перешел в Черноморское штурманское училище. С 1810 г. — ординарный профессор высшей математики в Московском университете.

В. Н. Никитин и П. И. Суворов совместно написали две математические работы — «Изложение элементов Евклида с значительными добавлениями и изменениями, произведенными Суворовым и Никитиным» и «Тригонометрии две книги, содержащие плоскую и сферическую тригонометрию» (1787 г.). Характерными особенностями обоих авторов являются высокая математическая культура, требовательность к точности и доказательности при изложении, а также стремление к созданию русских математических терминов.

Рассмотрим еще историю Горного училища, одной из наиболее старых русских технических школ. Еще при Петре I началась организация профессиональных горных училищ, причем основывались они, главным образом, в тех городах, где была непосредственная надобность в горных специалистах. Школы эти долго не просуществовали, сказались отсутствие учителей, учебников и малая заинтересованность государства в подготовке горных специалистов.

Однако развивавшаяся горная промышленность Урала особенно нуждалась в подобном учебном заведении. В 1761 г. несколько уральских горнопромышленников во главе с башкиром Измаиллом Тасимовым

возбудили ходатайство об открытии училища, указывая, в частности, что «для содержания в оном учащихся доколе оное училище не уничтожится они, промышленники, от своих собственных руд уступают из получаемой ими цены с каждого пуда руды по полупшке». Ходатайство увенчалось успехом: в 1773 г. при Берг-Коллегии было учреждено Горное училище. В докладе Сената об учреждении училища указывалось, чему именно надобно учить в открываемом заведении. «К совершенному же действию и исполнению того, необходимо нужно и совершенное знание потребных к тому сведений и наук: первое — Арифметики трех частей, Геометрии для снятия на поверхности местоположений заводских и их окрестностей, отводу лесов, высоты гор, и тому подобное; для рудников Маркшейдерское искусство..., Минералогия..., Химия..., Архитектура и Гидравлика..., Механика, для сооружения и сложения потребных членов в корпуса, нужные к заводским действиям, в замену человеческого бремени и к скорейшему в деле успеху, Физика...»⁴⁸.

Курс обучения в училище был рассчитан на четыре года. Для вступления требовалось знание основ математики и двух иностранных языков. Поэтому сначала было решено принимать в училище студентов Московского университета. Но затем требования к поступающим снизили до знания начал арифметики. Окончившие училище получали специальность шихтмейстеров XII и XIII класса. Первый выпуск состоялся в 1776 г. Всего в 1776—1799 гг. было выпущено около 140 чел.

Преподавали в училище профессора и адъюнкты Академии наук. Так, высшую математику читал член-корреспондент Академии наук А. М. Вильбрехт; преподавал также академик В.-Л. Крафт. Горное училище с самого начала своего существования не страдало многопредметностью, что выгодно отличало его от других русских технических школ XVIII в. Кроме того, оно никогда не имело функций подготовительной или средней школы, и поэтому черты высшего учебного заведения проявились в нем явственнее, чем в других русских технических и специальных школах.

Итак, военные и инженерные учебные заведения сыграли в XVIII в. значительную роль в развитии русского математического просвещения. В них работали известные тогда преподаватели математики, которые распространяли — непосредственно сами, своими книгами — математические знания, захватывая все большие и большие слои русского общества. В конце века в России уже были свои математики (ученые и преподаватели), самостоятельная русская математическая учебная и научная литература и математические науки преподавались во многих городах. В этом немалая заслуга и русской военной и инженерной школы.

⁴⁸ В память столетнего юбилея Горного института в Петрограде. — Горный журнал, 1923, № 11, стр. 658.

Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии от 40-х годов до конца XVIII в.⁴⁹

Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии в XVIII в. отличалось некоторыми особенностями, связанными с политико-экономическими условиями этих земель. Та часть их, что находилась под властью панской Польши, вплоть до последнего десятилетия XVIII в. в области образования испытывала на себе гнет шляхетско-иезуитской образовательной системы, принятой в Польском государстве. На тех же украинских землях, которые были еще в середине XVIII в. воссоединены в едином русском государстве, ведущие украинские высшие учебные заведения — Киевская академия и Харьковский коллегиум — готовили преподавателей и учащихся для школ всей страны. И в то же время на оба эти учебные заведения оказывали значительное влияние выдающиеся деятели русской культуры и науки, в первую очередь М. В. Ломоносов.

Объем математических знаний, сообщавшийся в этих школах, был незначительным. В них преподавали арифметику, основания практической геометрии (т. е., в сущности говоря, геодезии), некоторые теоремы планиметрии и элементы стереометрии в виде рецептов и примеров на определение объемов тел. В середине века добавились еще элементы алгебры. В качестве руководств в иезуитских коллегиях были приняты учебники математики, составленные иезуитом М. Хеллем⁵⁰.

Организованы были здесь такие же главные и малые народные школы, что и во всем русском государстве. Развитие же школы в Галиции, Буковине и Закарпатской Украине, оказавшихся под властью Австрии, происходило под сильным давлением австрийской политики.

Сложная система образования в Польше в XVIII в. нисколько не упростилась. Более того, кроме иезуитов за воспитание молодежи взялся католический орден пиаров, школы которого соперничали с иезуитскими коллегиями. К 1740 г. половина всех школ в Польше была в руках иезуитов и одна четверть — у пиаров. Однако на той части Украины и Белоруссии, которая была занята панской Польшей, основными школами оставались иезуитские.

Киевская академия и Харьковский коллегиум в значительной степени определили математическое просвещение Левобережной Украины. Влияние их было настолько значительно и уровень знаний, сообщавшихся в них, настолько превышал уровень знаний, дававшихся другими школами, коллегиями и семинариями этой части Украины, что они в течение всего XVIII в. служили высшими учебными заведениями. Были даже неоднократные проекты и попытки преобразования Киевской ака-

⁴⁹ Часть очерка, после звездочек, написана проф. Н. А. Чайковским.

⁵⁰ *Elementa mathematica naturalis philosophiae ancillantia ad praefixam in scholis nostris normam concinnata a. P. Maximiliano Höll a S. J. etc. Posnaniae, 1760; Elementa Algebrae, authore R. P. Maximiliano Höll a S. J. Posnaniae, 1760.*

демии в университет, не увенчавшиеся, однако, успехом и закончившиеся в 1817 г. преобразованием ее в Киевскую духовную академию — специальное богословское высшее учебное заведение. Что касается Харьковского коллегиума, то между ним и Харьковским университетом существует несомненная преемственность⁵¹.

Киевская академия была главным центром просвещения на Украине и единственным несословным высшим учебным заведением в России, в котором могли учиться даже выходцы из податных сословий. Известно, что в России в XVIII в. считанные лица из крестьян смогли получить образование. Большая часть из этого числа приходилась на Киевскую академию. Действительно, на протяжении всего столетия число студентов академии превышало иногда 1000 чел.⁵² Что касается их социального состава, то, например, в 1744 г. учеников духовного звания было 388, а разночинцев 772, в 1765 г. соответственно 485 и 674, в 1790 г. — 419 и 232⁵³.

О преподавании математики в академии в 1735—1750 гг. сведения не сохранились. Можно предполагать, что оно опять свелось к более или менее полному курсу арифметики. По сохранившейся математической рукописи⁵⁴ можно судить, что курс состоял из разделов, в которых излагались четыре действия с целыми числами и действия с дробными числами. Автор рукописи указывает, в частности, что «математическое учение простирается почти на все человеческое познание, служит к распознаванию ложного мнения или понятия с истинным, к утверждению разума уже в известных правдах и ко исследованию оных вновь; одним словом, такое подает просвещение разуму, что оный действовать имеет с достоверным совершенством во всех науках, какие человек только одним своим рассуждением приобрести в состоянии»⁵⁵. Все дореволюционные исследователи либо умалчивают о преподавании математики в Киевской академии, либо утверждают, что она не преподавалась. Однако факты доказывают обратное, и преподавание арифметики, хотя и в качестве второстепенного предмета, можно проследить на протяжении второй и третьей четвертей века.

Преобразования в Киевской академии связаны с именем одного из видных деятелей культуры XVIII в., бывшего ее ученика Самуила Миславского. Самуил (Симеон) Миславский (1731—1796) учился в академии вместе с Г. С. Сковородой. По окончании ее преподавал в ней, затем был префектом и ректором. Из Киева его перевели епископом в Белгород, затем в Москву, Ростов. В 1784 г. он вернулся в Киев уже в сане Киевского митрополита и занялся преобразованием Киевской академии. При нем русский язык стал основным языком в академии, было введено также преподавание новых языков и усовершенствовано преподавание общеобразовательных предметов. В 1784 г. Миславский назначил пре-

⁵¹ Д. И. Баглей. Опыт истории Харьковского университета. Т. 1. Харьков, 1893—1898.

⁵² М. Булгаков. История Киевской академии. СПб, 1843, стр. 108—109.

⁵³ Там же, стр. 108.

⁵⁴ Рукопись Публичной библиотеки АН УССР ДА/П-437.

⁵⁵ Там же, л. 186.

подавателем арифметики студента И. Фальковского и в качестве руководства арифметики предложил книгу профессора Аничкова. В 1784 г. в академии были открыты классы чистой и смешанной математики, архитектуры, всеобщей истории, естественной истории и географии, в 1798 г. — классы высшего красноречия, сельской и домашней экономики, в 1802 — класс медицины и в 1808 г. — российский класс. Почти каждый из этих классов имел 2—4 отделения. Так, математический класс подразделялся на классы смешанной математики и два класса чистой математики — низший и высший. Из прежних восьми классов самый низший — фара — был в 1774 г. упразднен, а три последующие класса — инфима, грамматика и синтаксима — были преобразованы в низший, средний и высший грамматические классы. Все добавочные классы не имели связи с основными, и учащиеся, подобно тому как это было в других учебных заведениях XVIII в., сами выбирали себе предметы занятий. В 1799 г. была издана инструкция о порядке обучения в Киевской академии, в которой были определены предметы во всех восьми классах, установлены часы учебной нагрузки по каждому предмету в неделю и указано, «каких классов ученикам каким другим наукам и языкам обучаться». Арифметике надлежало учить во II—IV классах, математику начинать в V классе. Однако за учениками старших классов, VII и VIII, оставлялось право свободного выбора изучаемых наук. В соответствии с этим было организовано три арифметических класса: в низшем изучали четыре арифметических действия, в среднем — действия с именованными числами, простые и десятичные дроби, квадраты и кубы чисел, в старшем — арифметическую и геометрическую прогрессии, пропорции, правила тройное, товарищества и пр. Чистую математику изучали в двух классах: в низшем — из геометрии лонгиметрию и планиметрию и из алгебры начальные действия, действия с дробями и квадраты чисел; в высшем математическом классе — стереометрию, окончание алгебры и тригонометрию. Наконец, к смешанной математике относились начатки гражданской и военной архитектуры, механики, гидростатики, гидравлики, оптики, катоптрики, диоптрики, перспективы, сферической тригонометрии, астрономии, математической географии, гармоники и математической хронологии.

Выше уже упоминалось о роли Киевской академии в обеспечении преподавателями и студентами других учебных заведений. Роль эта была довольно значительной. Только в Медико-хирургическую академию поступило в 1704—1768 гг. более 300 студентов Киевской академии. В Петербургскую учительскую семинарию было затребовано из Киевской академии в 1786 г. — 30 чел., в 1789 — 25 чел. Много ее студентов переходило в Московский и академический университеты.

Последняя проба усовершенствовать преподавание в академии и привести его в соответствие с современностью была сделана И. Фальковским. Ириней (Иван Акимович) Фальковский (1762—1823) был принят в академию в 1773 г. В 1777 г., в связи с переводом его отца в Венгрию, поступил в Токайское четырехклассное училище, откуда в следующем году перешел в Пештскую гимназию. В 1780—1782 гг. слушал экспериментальную физику, геометрию, механику, гражданскую архи-

тектуру, оптику и гидравлику в Будапештском университете. В феврале 1783 г. вернулся в Киев и поступил в последний класс академии. В 1784 г. начал преподавать в ней арифметику. В 1786 г. Фальковский был назначен преподавателем высшего класса грамматики, в 1787 преподавал поэзию, геометрию, алгебру и архитектуру.

В 1788 г. для преподавания высшей математики в академию был приглашен француз Брульон, который, однако, вскоре оставил преподавание, так как из-за незнания русского языка ему приходилось работать с переводчиком. С этого времени Фальковский был основным преподавателем математики и родственных дисциплин в академии. Ему удалось добиться того, что математические классы стали одними из наиболее посещаемых. С 1795 г. он начал читать курс смешанной математики. В 1803 г. был назначен ректором академии.

Как и в Московском университете, в Киевской академии математические науки преподавались по учебникам Аничкова и Вейдлера. По смешанной математике не было подходящего руководства. Фальковский составил и подготовил к печати такое руководство, однако издать его не успел. Оно сохранилось в рукописи «Сокращение смешанной математики, разделенное на две части, из которых первая содержит Механику, Идростатику, Аерометрию, Идравлику, Оптику, Катоптику, Диоптрику и Перспективу, а другая — Тригонометрию сферическую, начала Астрономии, Географию, Хронологию, Пиротехнию, Архитектуру гражданскую и военную — собранное из разных авторов в пользу киевского академического юношества. 1793 г.» Рукопись иллюстрирована самим автором ⁵⁶.

Несмотря на энциклопедичность содержания, курс Фальковского отличается ясностью и последовательностью изложения. «Сокращение» имеет ярко выраженную практическую направленность. Например, механику автор определяет как науку, которая «с сокращением времени или сбережением сил что-нибудь в движение приводит». В качестве примеров и задач он дает большое количество описаний различных механизмов и технологических процессов. При доказательстве теорем пользуется логарифмами. Не применяя явно анализ, он пользуется теорией пределов, хотя слово «предел» и не упоминает. Наиболее разработанной частью курса является астрономия. Известно, что Фальковский занимался астрономическими вычислениями на протяжении всей своей жизни.

В 1800 г. в Киевской академии учились 1146 студентов. Всего в академии изучали 33 предмета, также называвшихся классами. Шесть из них относилось к математике: три одногодичных арифметических класса, низший одногодичный класс чистой математики, высший двухгодичный класс чистой математики и трехгодичный класс смешанной математики. Таким образом, весь курс математики в академии изучался в течение девяти лет. По спискам 1800 г. в низшем арифметическом классе обучалось 215, в среднем — 179, в высшем — 85 чел., в низшем клас-

⁵⁶ Рукописи Киево-Софийского собора 580 и 581. В Публичной библиотеке АН УССР они хранятся под № 725/580 и 726/581.

се чистой математики — 108, в высшем — 18 и в классе смешанной математики — 55 чел. Одновременно философию изучали 75, а богословие — 56 чел. Естественно, что большинство учащихся уходило из академии, не дойдя до двух последних классов, дававших уже специализированное духовное образование. Последнее обстоятельство и явилось основной причиной преобразования академии в 1817 г. в духовное учебное заведение.

Во второй половине XVIII в. в качестве высшего учебного заведения служил также Харьковский коллегиум. В 1726 г. из Белгорода в Харьков была переведена и устроена при Покровском монастыре архиерейская школа, получившая наименование коллегиума. По своей структуре коллегиум представлял нечто вроде копии Киевской академии. Он состоял из семи классов (отделений) — аналогии (инфимы), грамматики, синтаксиса, пиитики, риторики, философии и богословия. Преподавание арифметики было введено в курс обучения в классах инфимы и грамматики в 30-х годах вместе с немецким и французским языками.

К середине XVIII в. Харьковский коллегиум представлял собой общеобразовательную школу с тенденцией профессионализации. В 1765 г. к нему были добавлены «классы преподавания французского и немецкого языков, математики, геометрии, а особенно инженерства, артиллерии и геодезии». На содержание этих классов были отпущены средства, благодаря чему они фактически превратились в отдельную школу, подчиненную гражданскому губернатору, так как старые классы коллегиума были на содержании духовного ведомства. Значительная часть учеников добавочных классов состояла из студентов коллегиума. В 1773 г. был открыт также класс вокальной и инструментальной музыки.

К этому периоду относится преобразование и основного учебного плана в коллегиуме. Связано это преобразование также с именем Самуила Миславского.

В «Инструкции», предложенной Миславским ректору коллегиума в 1769 г., подробно изложены содержание преподавания и методы, которых следует придерживаться при обучении в коллегиуме. В частности, он ввел в философском классе преподавание физики, причем по очень серьезным учебникам: «6. Прениям философским должно быть непременно и на российском языке, о чем выше и предписано. Способности по сему нельзя приобрести, разве толкованием философии на российском языке; того ради читать в философии непременно и если возможно, то и иметь всем ученикам следующую во первых книгу 1. Философические предложения сочиненные надворным советником и правительствующего сената секретарем Яковом Козельским 1768 года. 2. Краткое понятие о физике для употребления Его Императорского Высочества 1760 г. 3. Вольфианскую теоретическую физику с немецкого подлинника на латинском сокращенную переведенную на российский язык Борисом Волковым 1760 года. 4. Вольфианскую экспериментальную физику с немецкого подлинника на латинский язык сокращенную и на российский язык переведенную Михайлом Ломоносовым 1746 года. 5. Письма о разных физических и философских материях с французского языка на

русский переведенные Степаном Румовским академии наук членом и профессором. 6. Господина Даламберт о разных физических и философских материях на русском языке часть первую. 7. Некоторые Ломоносова речи о физических вещах, как о явлениях воздушных от электрической силы происходящих, о происхождении света, слово, новую теорию о цветах представляющее, о рождении металлов от трясения земли и прочие тем же подобные»⁵⁷.

Как видим, эта программа приближалась к программе Московского и академического университетов и предполагала значительную предварительную подготовку студентов. Студенты Харьковского коллегиума неоднократно направлялись для дальнейшего обучения в Московский университет, в медицинские и иные школы. Добавочные классы еще улучшили их подготовку. Первым преподавателем математики в добавочных классах был И. Н. Николаев.

Иван Николаевич Николаев родился в Казани. В 1758 г. был забран в солдаты во второй мушкетерский полк, а затем переведен в артиллерию, где был «произведен чинами»: в 1765 г. капралом, а затем фурьером, в 1766 г. — каптенармусом и в 1767 г. — сержантом. Трудно установить, где учился Николаев, но в Харьков он прибыл с солидными математическими и инженерными познаниями. Вначале он преподавал арифметику, геометрию, тригонометрию, артиллерию и фортификацию. Но поскольку математические классы были самыми обширными и один преподаватель не мог справиться с ними, то Николаев подготовил адъюнктов Н. Драгомирова, И. Золотарева, И. Гринева, которым и передал преподавание арифметики и геометрии, оставив за собой тригонометрию, артиллерию и инженерное дело.

В 1790 г. добавочные классы коллегиума были переименованы в Казенное училище, которое затем (в 1798 г.) было слито с Главным народным училищем. После слияния Главное народное училище получило программу, значительно превышавшую стандартную. В нем было 16 учителей, преподавались французский и немецкий языки, российская грамматика, риторика, логика, богословие, история, география, арифметика, геометрия, артиллерия, фортификация, физика, механика, гражданская архитектура, рисование, геодезия, полевое инженерство, тригонометрия, вокальный класс и для желающих латинский язык. В отличие от многопредметных школ XVIII в., которые учили многому и ничему, Харьковское казенное училище, а вслед за ним и Главное народное училище, имело характерную практическую направленность. И если Харьковский коллегиум в некотором отношении был предшественником Харьковского университета, то добавочные его классы были предшественником Харьковского технологического института, причем на протяжении трех четвертей XIX в. в Харькове не было учебного заведения, равного им по своему значению.

В 1800 г. в Главном народном училище все предметы физико-математического и инженерного цикла вели И. Н. Николаев и его ученики: Николаев читал полевое инженерство, фортификацию и артиллерию.

⁵⁷ Харьковский филиал ЦИА УССР, ф. 692, д. 413, 418.

А. Назаров — тригонометрию и геодезию, С. Туранский — геометрию, стереометрию, архитектуру, физику и механику и И. Золотарев — арифметику. Таким образом, как можно проследить по документам, на протяжении более четверти века И. Н. Николаев преподавал математические науки в Харькове и был одним из основных деятелей культуры на Украине в XVIII в. Около 1800 г. в Харьковском коллегиуме было до 1000, а в Главном народном училище — 380 учащихся (272 дворянина и 108 разночинцев).



Основным культурным центром западных областей Украины был Львов, в котором в XVIII в. было несколько школ и одно высшее учебное заведение — академия. Из средних школ особенное значение имела городская школа, бывшая «колония» Краковской академии.

В городской школе обучали «семи свободным искусствам», которые делились на тривиум (грамматика, риторика с поэтикой, диалектика) и квадривиум (арифметика, геометрия, астрономия и музыка), а также языкам: латинскому, немецкому, польскому, позднее и греческому. В 1784 г., после оккупации Галиции Австрией, Львовская городская школа была преобразована в пятиклассную гимназию с двухлетним философским курсом и названа академической гимназией.

Львовская иезуитская школа была основана в 1606 г. С самого начала существования школы иезуиты предпринимали шаги для преобразования ее в академию, хотя этому противилась Краковская академия. Кроме школы иезуиты имели во Львове также «конвикт» (пансион) — интернат для дворянской молодежи (*Collegium nobilium*, основан в 1749 г.). Иезуитские школы продолжали функционировать в Луцке, Каменце-Подольском, Перемышле, Остроге, Самборе, Станиславе, Кременце, Житомире.

В 1756 г. во Львове открыли школу с конвиктом для дворянских детей пиары, однако из-за козней иезуитов эта школа была закрыта и пиарам остался только конвикт. Подобный конвикт они имели также в Золочеве. Программа по математике в школах пиаров была следующей: в первом классе изучали сложение и вычитание, во втором — умножение и деление, в третьем — прогрессии, тройное правило и правило товарищества, линии, углы, плоские фигуры и некоторые сведения из практической геометрии, в четвертом — уравнения первой степени, тригонометрию, солидометрию.

После осуществления Брестской церковной унии на западноукраинских землях был основан униатский монашеский орден василиан, целью которого являлась пропаганда унии с Римом и искоренение православия. Василиане содержали на Украине несколько школ, среди которых наиболее крупной была Бучачская (основана в 1754 г.) восьмилетняя школа с философским курсом. В 1784 г. профессора-василиане переселились в Литву и школа закрылась. На месте ее осталась только нормальная школа, на базе которой австрийское правительство в 1804 г.

открыло пятиклассную гимназию⁵⁸. Обучение в василианских школах, как и в остальных школах Польши, велось на латинском и польском языках и не отличалось от обучения в иезуитских школах.

Некоторое представление о материале и уровне преподавания математики в василианских школах можно получить из рукописных учебников, хранящихся в рукописном фонде Львовской библиотеки Академии наук УССР⁵⁹. Самая полная из них — рукопись И. Ленского (около 160 страниц). Она содержит курс арифметики, включающий кроме действий над целыми, дробными и «взаимопротивоположными» числами также действия с многочленами, с десятичными и шестидесятичными дробями, извлечение квадратных и кубических корней, понятия арифметического и геометрического отношений, геометрическую пропорцию и ее применение к делению отрезка, тройное правило, правило пяти, понятие геометрической прогрессии, а также понятие логарифма.

В геометрическом разделе даны определения основных геометрических понятий, постулаты Евклида и доказательства некоторых теорем. Главное место отведено практическим применениям геометрии. Подробно рассмотрены измерения на местности и вычисление площадей. Обращает на себя внимание стереометрическая часть рукописи, где кроме основных понятий дан вывод некоторых формул для вычисления объемов и доказаны некоторые теоремы. Плоская и сферическая тригонометрии в рукописи представлены определением тригонометрических функций и решением треугольников без достаточных объяснений.

Как видно из содержания рукописи, автор уделяет большое внимание практическим применениям математики. А то обстоятельство, что упомянутые рукописи хранятся в книжном фонде василианского архива, позволяет сделать вывод, что подобные руководства употреблялись в качестве школьных учебников в василианских школах конца XVIII в.

Львовские иезуиты добились права на преобразование своей коллегии в академию, и 20 января 1661 г. был издан декрет об открытии во Львове академии. Впоследствии она была преобразована в университет.

О преподавании математики в иезуитской академии известно очень мало. В 1743 или 1744 г. была создана кафедра математики, которую возглавил иезуит Фаустин Гродзицкий, автор нескольких работ, из которых одна имеет некоторое отношение к математике — «Знание военного искусства... или лекции по математике» (Львов, 1746 и 1753). Семь лет Гродзицкий вел своего рода семинар по математике для будущих преподавателей физико-математических наук.

Преподавателями математики были также Михаил Радзиминский, Томаш Секержинский, автор книги «Арифметика», и Людовик Гошовский. Об их деятельности не сохранилось никаких сведений⁶⁰.

⁵⁸ K. S. S a d o k B a r ą c z. Pamiłki buczańskie. Lwów, 1882, st. 129—130.

⁵⁹ J. L e n s k i. Arytmetyka, Geometria..., 1790.— Ф. Бавоп., № 533. W o ł s k i K a z i m i r. Geometria, 1796.— Ф. Бас., № 350. Matematica, 1689.— Ф. Бас., № 350.

⁶⁰ K. S. S t. B e d n a r s k i. Dzieje kulturalne jezuickiego kolegium we Lwowie. T. 33. Lwów, 1936, st. 7.

Под владычеством Австрии на территории Восточной Галиции из всех описанных выше школ осталось только две — во Львове и Перемышле. В этих школах преподавание начали вести на немецком языке, а так как в Галиции мало кто знал этот язык, то австрийское правительство присылало учителей из своих немецких провинций. Преподавателями были почти исключительно духовные лица. Светских учителей тогда было мало, поэтому после ликвидации иезуитского ордена преподаватели-иезуиты остались в школах и руководили ими до 1787 г.

В этот период кафедральные и монастырские школы преобразовывались в гимназии. Основной их целью было прививать молодежи церковную мораль. Впоследствии, когда церковь потеряла свою политическую силу, в них еще долго держался клерикальный дух.

Гимназия состояла из пяти классов. Три младших класса назывались «грамматикальными» (I — инфима, II — средняя грамматикальная, III — высшая грамматикальная), два старших — «гуманиорами» (IV — поэтика, V — риторика). Впоследствии был учрежден подготовительный класс, получивший название «парва».

Верховную власть над школами Австрии осуществляла придворная школьная комиссия в Вене ⁶¹, а в отдельных австрийских провинциях, в том числе и в Галиции, — «краевые школьные комиссии», состоявшие из представителей административной власти, духовенства и директора школы. Во главе школ в уездах стоял «политический начальник» уезда, его заместителем был представитель духовенства, непосредственно же руководил школами уезда префект, отвечавший за весь воспитательный и учебный процесс. Учителя были государственными чиновниками.

Обучение в школах носило крайне схоластический характер. Учителя обязаны были строго придерживаться официально утвержденных учебников. От школы отстранялись все те, кто не подходил под мерку тупых бюрократов. Реакция приобретала все большую силу: усилилась цензура книг, заводились тайные квалификации на учителей, устанавливалась слежка за ними.

На преподавание математики отводилось по два часа в неделю во всех классах. В первом классе ученики изучали четыре действия, во II—IV — остальную арифметику, в V — геометрию и алгебру ⁶². В качестве учебников служили следующие книги. По арифметике — «Начала частной и общей арифметики для учащейся молодежи» (автор не указан), изданные на латинском и немецком языках. Учебник охватывал традиционную численную и буквенную арифметику, по квадратные уравнения включительно, и типичные для того времени тройное и другие правила. Написан на очень низком научном и методическом уровне, сухо и неинтересно. В нем дано только много не совсем ясных определений и правил с немногочисленными примерами без выводов и доказательств. Этот учебник может служить лишь доказательством того, как мало заботилась власть о средних школах, в частности о преподавании

⁶¹ А. Андронович. Образки з історії середнього шкільництва в Галичині в XVIII—XIX ст. — Записки НТШ. Т. 100. Львів, 1930, стор. 230.

⁶² D. S. Tomaszewski. Pogląd na rozwój gimnazjum brzeżańskiego (1789—1905). — Sprawozdanie Dyrekcji gimnazjum za r. szk., 1905—1906, st. 33.

математики. А ведь в то время уже был издан классический учебник Эйлера по алгебре на немецком (1770 г.) и на русском (1769 г.) языках. Геометрию изучали по четырем первым книгам «Начал» Евклида на латинском и немецком языках.

Переходной ступенью между средней школой и университетом были двухгодичные, позже трехгодичные «философские курсы», которые впоследствии существовали в больших городах (например, во Львове) при университете, а в меньших (например, в Перемышле) — самостоятельно. Элементарная математика в них преподавалась по учебникам Вольфа и Кестнера.

В 1784 г. во Львове был открыт университет. Он состоял из четырех факультетов: теологического, юридического, медицинского и философского и полной шестиклассной «академической» гимназии. Львовский университет был организован по традиции средневековых университетов. Преподавание велось на латинском языке, в схоластическом духе. Как и в средних школах, профессора были «прикованы» к учебникам. Их конспекты (skrypty) подлежали цензуре при «губерниуме». Цензура вычеркивала в них те места, которые могли «развращать» молодежь. В частности, запрещалось «с кафедры» выступать против религии. Предписывалось отвлекать молодежь от революционных идей.

Львовский университет был первым университетом, основанным в католическом государстве без разрешения папы и не имевшим своего «канцлера»⁶³. Задачей его австрийские власти ставили воспитание покорных чиновников и священников, которые должны были прививать подданным чувства австрийского патриотизма.

В 1805 г. австрийские власти решили, что для всей Галиции будет достаточно одного университета, Краковского, и слили с ним Львовский университет. Во Львове же остался лицей, лишенный права присуждать докторские степени и обескровленный в научном отношении, так как все знающие профессора были переведены в Краков.

Преподавание математики во Львовском университете велось тогда на довольно низком уровне. На философских факультетах австрийских университетов изучались предметы, служившие только подготовкой для дальнейших высших студий: богословских, юридических или медицинских. На первом курсе была обязательной элементарная математика, на втором — физика.

Официально утвержденными учебниками были «Начала чистой математики» Вольфа⁶⁴ и «Прикладная геометрия» Кестнера⁶⁵. Впоследствии были допущены также учебники Георга Веги⁶⁶, венского профессора Аппельтауэра⁶⁷ и геттингенского астронома Тобиаса Майера⁶⁸.

⁶³ В университетах чин канцлера занимал кардинал или другой высший церковный сановник.

⁶⁴ Christian Wolf. Elementa matheseos purae. T. 1—5, 1713—1741.

⁶⁵ Abraham Goltholf Kästner. Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Göttingen, 1792.

⁶⁶ Georg Vega. Vorlesungen über die Mathematik. T. 1—4, 1782—1790.

⁶⁷ Appeltauer. Elemente matheseos purae. Wien, 1814—1817.

⁶⁸ I. T. Mayer. Grundlinien zur praktischen Geometrie. Göttingen, 1792.

Вначале математику во Львовском университете преподавали бывшие иезуиты Иозеф Лизганиг и Игнац Райн. Для них она была случайным делом. Например, Райн оставил преподавательскую работу и получил приход в одном из львовских костелов.

Первым профессором математики в университете можно считать Франтишека Кодеша (1761—1831), воспитанника Пражского университета. Он получил кафедру в 1787 г. Преподавал чистую математику по Вольфу и геодезию по Кестнеру, а в летние месяцы проводил измерительные работы на местности. Ф. Кодеш был сердечным, отзывчивым человеком, большим другом молодежи. Кафедру «прикладной математики» занимал бывший иезуит Ян Гольфельд (1747—1814). Он отказался от духовного сана, стал землемером и выполнял геодезические работы.

При Львовском университете действовали также особые курсы для тех студентов богословия, которые не знали латинского языка, так называемые временные богословские и философские курсы для униатов-украинцев (*Studium Ruthenum*) и для католиков-поляков (*Studium Latinum*). На курсах для униатов-украинцев преподавали математику и физику два профессора-украинца из Закарпатья — Петр Лодий и Иван Земанчик.

Петр Лодий (1764—1829) был назначен профессором философии университета в 1787 г. В 1794 г. он получил кафедру в «*Studium Ruthenum*», преподавал математику и логику. В 1801 г. Лодий переехал в Краковский университет, а вскоре в Петербург.

Об Иване Земанчике сохранилось мало биографических данных. В 1786—1787 гг. он был адъюнктом по кафедре высшей математики в Будапештском университете, в 1787—1805 гг. преподавал в *Studium Ruthenum* математику и физику. В 1803—1804 гг. Земанчик был ректором Львовского университета, а в 1805—1809 гг. руководил кафедрой экспериментальной физики в Краковском университете.

7

Математические знания в Прибалтике до XIX в.

Немецко-скандинавская феодально-католическая агрессия в XIII в. прервала более или менее обычное и сравнительно мирное развитие балтийских народностей. После опустошительных войн Латвия и Эстония оказались под властью немецких завоевателей. Конечно, кроме феодалов-немцев были и феодалы местного происхождения, но и они онемечивались. В городах, среди купцов, особенно среди ремесленников, коренного населения было значительно больше, чем среди феодальной знати. Просвещение, долгое время бывшее монополией пришлого духовенства, велось в течение столетий на немецком или латинском языке.

Церковные школы известны на территории Прибалтики с XIII в., например Домская школа при Домской церкви в Риге. В XV в. появи-

лись школы светского направления — «городские». В городских и приходских (низших церковных) школах обучали чтению, письму, счету, молитвам, катехизису, в некоторых знакомили с основами латинской грамматики и простейшими латинскими текстами. Церковные школы высшего типа (монастырские, религиозных орденов или при соборах, с более длительным сроком обучения) следовали обычной для средневековой Европы программе: тривиум (грамматика, риторика, диалектика, затем необязательная более высокая ступень), квадривиум (арифметика, геометрия, астрология, музыка). Такие школы подразделялись на «внутренние» — для принимавших религиозный сан и «внешние» — для остальных учащихся.

Из арифметики в квадривиуме обучали только четырьмя действиями. Крайне невелик был и объем сообщавшихся геометрических сведений. Изучение астрономии заключалось, в основном, в ознакомлении с календарем, видимыми светилами, в описании комет, а также могло включать астрологические сведения. Но не везде и не всегда квадривиум был представлен полностью. По тем временам обучение в квадривиуме было равносильно получению высшего образования. Тривиум соответствовал среднему образованию.

Таким было состояние просвещения в Латвии и Эстонии до XVI в. Некоторые сдвиги наметились в XVI—XVII вв. В этом сыграли роль, разумеется, крестьянские и религиозные войны, реформации, а также тот подъем в области культуры, который называется в истории эпохой Возрождения. В основе же всего лежало развитие буржуазных отношений, хотя еще и в рамках преобладающего феодального строя. Событием, имевшим важное значение для развития математики, явилось основание первого в Прибалтике университета.

После окончившейся неудачно для России Ливонской войны территория Прибалтики оказалась разделенной между Польшей (часть Латвии и северная Эстония), Швецией (южная Эстония) и Данией (остров Саарема). В 1632 г. был открыт в Тарту университет, именовавшийся по обычаю того времени академией. Шведские власти не сразу пошли на развитие просвещения в Прибалтике. Так, немецкая городская школа в Таллине и другая городская школа, в которой учились, хотя и немногие, дети эстонских купцов и ремесленников, при шведском управлении были закрыты. В конце XVI в. католическая Польша с целью усиления своего влияния и борьбы с протестантством, оплотом которого была Швеция, поощряла деятельность ордена иезуитов. Иезуиты открыли в Тарту гимназию (коллегию). Эта коллегия и семинария переводчиков (для лиц, изучавших местные языки) с перерывами действовали в Тарту с 80-х годов XVI в. до 30-х годов XVII в. С установлением же в Таллине и Тарту шведского господства были закрыты учебные заведения иезуитов и открыты гимназии. В учебные планы гимназии входила и математика.

Тартуский университет состоял из четырех факультетов: философского, богословского, правоведческого и медицинского. Это был шведско-латинский университет. Он просуществовал 24 года. Шведские власти заявляли, что в нем могут учиться и дети латышских и эстонских крестьян,

а в гимназии, на базе которой открыт университет, были даже учреждены стипендии для беднейших учеников. Такие действия властей объясняются тем, что королевская власть в Швеции боролась в то время с крупными землевладельцами в своей стране, создавая централизованное управление, и отчасти опиралась в этой борьбе на зажиточное крестьянство. Такой же политики придерживались шведские власти и в Прибалтике, чтобы расположить к себе крестьян. Но на деле студентами университета были преимущественно немцы и шведы, так как прибалтийское дворянство не очень высоко ценило образованность, а крепостная зависимость и отсутствие сети низших школ делали университет недоступным для крестьянских детей.

На философском факультете университета было только одно место профессора геометрии и арифметики. Научного веса профессора математики не имели. Все обучение в университете носило схоластический характер и богословную направленность. И все же, «несмотря на свою ярко выраженную классовую сущность, несмотря на свою недоступность для эстонского народа, университеты XVII века сыграли определенную положительную роль в истории культуры Прибалтики. Среди университетских преподавателей были люди, оставившие след в истории науки, некоторые из них проявляли живой интерес к языку и фольклору порабощенного эстонского и латышского народов»⁶⁹.

В приведенной выше цитате говорится об университетах во множественном числе. Дело в том, что в 1656 г., во время русско-шведской войны, университет в Тарту был закрыт. Однако в 1690 г. он вновь был организован с несколько меньшим штатом. В 1700 г. этот университет был переведен в Пярну. В 1710 г. город очутился в руках русских войск. Русские власти пытались сохранить университет. В условиях капитуляции города, подписанных представителями лифляндского дворянства, земскими и городскими людьми, с одной стороны, и фельдмаршалом Шереметьевым — с другой, были предусмотрены соответствующие меры и обещаны льготы для университетской коллегии. Однако профессора университета, в подавляющем большинстве шведы, поспешили оставить Пярну и уехали в Швецию еще до осады города. Они увезли библиотеку, архив. Так университет снова прекратил свою работу.

В XVIII в., после присоединения к России, в Эстонии и Латвии уже заметны некоторые успехи математического просвещения. Еще при Петре I было открыто несколько общеобразовательных и профессиональных (цифирных и навигацких) школ. Начали работать городские школы и гимназии (в Таллине, Риге, позже в Елгаве). Власти пытались создать сеть сельских школ, чему упорно противодействовали помещики. Все же в конце XVIII — начале XIX в. школьное дело в Эстонии и Латвии развивалось. Общий характер обучения и объем сообщавшихся знаний по всем предметам, в том числе и по математике, были такими же, как в однотипных школах других краев и областей России. Преподавание в гимназиях велось на немецком языке, он же преобладал и в других школах.

⁶⁹ История Эстонской ССР. Т. 1. Эстгосиздат, Таллин, 1961, стр. 471.

Дворянство Латвии и Эстонии, немецкое по национальности и языку, опасалось русского культурного влияния и, хотя было против образования крестьян, старалось взять это дело в свои руки через духовенство. В 1784 г. Христоф Хардер (1747—1818), пастор Рубенского прихода в Видземе, издал азбуку для латышей. От других пособий такого рода азбуку Хардера отличала таблица умножения — первая таблица умножения, адресованная непосредственно латышскому крестьянству. В 1806 г. Хардер издал первый латышский учебник арифметики: «Книжечка счислений не для всяких невежд, а лишь тем на пользу сочинена, кто мудрость и светлый ум уважает». Крестьянских детей тогда арифметике еще не учили, поэтому это был самоучитель, в котором рассказывалось, как производить четыре действия, и давалось понятие об именованных числах. Но автор, стараясь расширить кругозор изучающего арифметику, приводил попутно сведения из истории, географии, даже астрономии, в задачах давал практические указания и советы, причем явно в пользу крестьянства. Поэтому для приходских школ, а эти школы контролировались непосредственно помещиками, бароны предпочли учебник арифметики «Поучение счислению, сколь людям крестьянского сословия требуется», составленный пастором Неретского прихода Вагнером. Этот учебник был впервые издан в 1821 г. и переиздавался крупными для тех времен тиражами в 1843, 1860—1867 гг.

В отличие от Хардера, который в своем «Обращении к читателю» вступает в разговор с любознательным латышским крестьянином, Вагнер адресует свое предисловие немцу — «покровителю» крестьянина. Предисловие написано по-немецки. Как бы извиняясь перед читателем за свое намерение просвещать латышей, Вагнер пишет, что «новые условия жизни» заставляют учить крестьян считать. С такой просьбой, по его словам, к нему неоднократно обращались крестьяне прихода. Далее он заверяет читателя-немца, что в своем учебнике не следует Хардеру и заимствует у него лишь некоторые технические приемы изложения.

Среднее образование можно было тогда получить в уездных училищах и гимназиях. Училища были преимущественно двухклассными. В них принимали тех, кто умел читать по-немецки, писать под диктовку и выполнять четыре арифметических действия. Основными предметами считались «закон божий» и немецкий язык. Это были немецкие учебные заведения с очень небольшой программой по математике, которая, кстати, часто изменялась. В них учились преимущественно дети германофильски настроенных ремесленников из местного населения. Немецкие же купцы и ремесленники стремились отдавать своих детей в гимназии, где тоже господствовал немецкий язык и куда латыши и эстонцы попадали редко.

В первые десятилетия XIX в. в Прибалтике появились учительские семинарии, готовившие учителей для расширявшейся системы школ. Подготовку же для работы в области математических наук смог дать только открытый в 1802 г. Дерптский (Тартуский) университет.

Несколько по-иному развивались просвещение и культура в целом у литовского народа. С XIII в. исторический путь Литвы становится осо-

бым. В двухвековой борьбе с немецко-католической феодальной агрессией Литовское государство сложилось, устояло и окрепло в значительной мере благодаря союзу со славянскими государствами и их помощи. С середины XIV в. Литовское государство — это Великое Княжество Литовское, в состав которого входили и некоторые белорусские земли. В период его существования завершился процесс формирования литовской нации. Тогда же было принято в Литве христианство. С христианством в Литву была перенесена и система преимущественно церковного обучения, чему способствовало также все большее политическое сближение с Польшей, где уже в течение XI—XIII вв. господствовала такая школьная система.

Во второй половине XVI в. эта система образования полностью утвердилась в Литве. Кроме того, представители литовской знати могли поступить в западноевропейские или в Краковский университет. В это время был развит «обмен студентами» между странами средневековой католической Европы. Известно, например, что часть польской шляхетской молодежи в конце XV — начале XVI в. училась в университетах Праги, Падуи, Лейпцига, Кельна, Базеля и др. В Краковском университете было также немало иностранцев.

Хотя католическая церковь держала в своих руках все виды официального обучения в Литве, ее позиции во второй половине XVI в. были значительно ослаблены. Начали распространяться идеи гуманизма, значительного успеха достигло реформационное движение. Для борьбы со всем этим «еретичеством» в Литву, как и в Польшу, были посланы иезуиты. В 1569 г. они прибыли в Вильно, где уже через десять лет настолько прочно обосновались и имели такие материальные средства, что смогли открыть академию — первое высшее учебное заведение в Литве. Виленская академия была открыта в 1580 г.⁷⁰

Открытие Виленской академии явилось как бы завершающим этапом в развитии системы школ в Литве. Эта система сохранялась без существенных изменений до второй половины XVIII в. Низшую ступень в школьной системе составляли начальные школы. Они находились, как в городах, так и в селах, под контролем «белого духовенства». Обучали в них чтению, немного письму, еще меньше — счету, больше всего ученики были заняты усвоением катехизиса, заучиванием молитв, церковным пением. Следующую ступень составляли школы, дававшие в том или ином объеме среднее образование. Все они тоже находились в ведении духовенства, преимущественно «черного», то есть различных монашеских орденов. Значительную часть таких школ составляли коллегии ордена иезуитов. В коллегиях было обычно по пять классов: низший, грамматика, синтаксис, поэзия и риторика. Изучали в коллегиях латинский и греческий языки, некоторые сочинения римских и древнегреческих авторов, например Цицерона, катехизис и молитвы, а также упражнялись в составлении панегириков и проповедей (на латинском языке). В коллегиях крупных и областных (воеводских) городов были еще классы теологии (четырёхлетний) и философии (трехлетний). В фи-

⁷⁰ Формально утверждена папой Григорием XIII в 1579 г.

лософском классе изучали кроме этики, логики и метафизики также физику и математику. О характере преподавания математики можно судить по учебникам, официально принятым в шляхетских коллегиях (никаких отступлений от программы и принятого учебника орден не допускал). Это «Начала» Евклида, учебник Тылковского и др.

В названных школах очень мало места отводилось всему не религиозному, обучение носило схоластический характер, методика преподавания была основана на зубрежке и тренировке механической памяти. Так же обстояло дело в школах других католических орденов. Протестантские школы (лютеранские, кальвинистские) давали сравнительно лучшее образование, но объем сообщавшихся в них сведений не был большим, чем в католических школах. Правда, в школах кальвинистов учили читать и писать по-литовски и по-польски, в Белоруссии — по-русски, но в обучении математике отличия не было. Таких школ было сравнительно немного (в Вильно, Кейданах, Слуцке), а во второй половине XVII в. они были совсем закрыты. Лютеранские же школы были преимущественно школами немецких колоний.

Виленская академия вначале мало чем отличалась от иезуитских коллегий, где были теологические и философские классы, разве что правом присваивать академические степени. Однако в середине XVIII в. положение изменилось. Церковь уже не могла бесконтрольно сохранять в своих руках руководство школами. Развитие капиталистических отношений даже в условиях феодального правопорядка заставляло учитывать новые запросы. Орден иезуитов, опасаясь худшего, пошел на введение новых предметов в своих коллегиях, немного расширил обучение точным наукам. В 50-х годах XVIII в. в Виленской академии были созданы астрономическая обсерватория и кабинет физики и математики. Астрономия появилась и в учебных планах. Более решительные изменения в академии были произведены после запрещения ордена иезуитов (1773 г.), когда она перешла в ведение государственной комиссии по образованию, а затем была преобразована (1780 г.) в Главную литовскую школу. На факультете физических наук этой школы преподавали элементарную, высшую (чистую) и прикладную математику, астрономию, физику, химию, ботанику, минералогию, медицину. В таком виде (позже было введено преподавание топографии и архитектуры) факультет существовал до преобразования Главной литовской школы (с 1797 г. Главной виленской школы) в Виленский университет (1803 г.), когда Литва была уже в составе России.

Среди преподавателей математических дисциплин этого периода ведущую роль играли астрономы. Правда, первый директор Виленской обсерватории Т. Жебровский проявил себя больше как организатор, а его преемник Я. Накцианович занимался в основном метеорологическими измерениями. Оба они преподавали в академии элементарную математику. Сохранились записи лекций Накциановича, относящиеся к 1759 г. (Библиотека АН Литовской ССР). Как отмечает П. В. Славенас, в них мало математического материала, главное внимание обращено на формальную взаимосвязь основных положений арифметики и алгебры. Но следующий директор обсерватории — Мартин Почобут-Одлянц-

кий (1728—1810) — оказал немалое влияние на преподавание математики.

Почобут был воспитанником и членом иезуитского ордена. Семь лет преподавал греческий язык. Затем начал заниматься астрономией. В течение четырех лет изучал ее в обсерваториях Италии и Франции, позже ездил за границу в поисках астрономических инструментов. Ему удалось хорошо оборудовать Виленскую обсерваторию. Почобут произвел немало ценных по тому времени наблюдений. Поддерживал связь с английскими, французскими и русскими учеными, был членом Лондонского королевского общества и членом-корреспондентом Пражской академии наук ⁷¹. Это был астроном-наблюдатель, деятельность которого «была подчинена интересам церкви» ⁷². И все же Почобут, как профессиональный астроном, содействовал повышению уровня преподавания математики.

Первым сдвигом в преподавании математики в Виленской академии был курс высшей математики, читавшийся в 60-х годах XVIII в. временно переведенными в Вильно французскими иезуитами Рассиньолом и Флери. Этот курс прослушал и Франциск Миликонт Норвайша (1742—1819). В Главной литовской школе он был профессором высшей математики. Читал основы анализа бесконечно малых, аналитическую геометрию, дифференциальные уравнения, теорию кривых третьего порядка (как специальный курс). Во многом он следовал Ньютону, но отчасти основывался и на трудах Эйлера, Крамера и Лагранжа. Читал также основы физики по Х. Вольфу и теоретическую механику, особенно останавливаясь на ее применении в астрономии. Более подробные сведения сохранились о его курсах, читанных в Виленском университете.

Деятельность Норвайши относится к переходному периоду в истории математического просвещения в Литве — от средневекового, по сути, обучения к ознакомлению с математической наукой нового времени, т. е. конца XVIII в. По-настоящему обновилось преподавание математики лишь в Виленском университете в начале XIX в.



Последняя четверть XVIII в. для русской математической науки была временем деятельности петербургских ученых-математиков. Ученики и преемники Эйлера — первое поколение русских математиков — Котельников, Румовский, Лексель, В.-Л. Крафт, находившиеся под влиянием выдающейся личности Эйлера, не смогли создать самостоятельных направлений в математике. Их заслуга заключается в развитии интенсивной педагогической деятельности. Они начали преподавание в России различных курсов высшей математики, составили ряд учебников и учебных пособий.

⁷¹ В. Л. Ч е н а к а л. Мартин Почобут и Петербургская академия наук. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1961.

⁷² П. В. С л а в е н а с. Астрономия в высшей школе Литвы в XVI—XIX вв. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 1. Гостехиздат, М., 1955, стр. 65.

Значительную роль в распространении и развитии математических знаний в России сыграли высшие учебные заведения — академический и Московский университеты. Почти все первые русские математики были выучениками академического университета. Возникший позже Московский университет готовил учителей математики для средних школ и стал организующим центром издания учебной математической литературы.

В распространении математических знаний большую роль сыграли также военные и инженерные школы. В связи с тем, что господствующим направлением в образовании в XVIII в. была профессиональная подготовка специалистов, математика в этих школах была признана основным и ведущим предметом. Поэтому в них также создавалась учебная математическая литература. Центрами распространения математических знаний на Украине, в Белоруссии и Прибалтике были Киевская академия, Харьковский коллегиум с добавочными классами и Главная виленская школа.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В СРЕДНЕЙ АЗИИ

1

Истоки науки и культуры Средней Азии

Древние культуры в Средней Азии зародились у народов, живших на территории, расположенной между верхними течениями Сыр-Дарьи и Аму-Дарьи к югу от Аральского моря. В Средней Азии перекрещивались мировые торговые и военные пути. Здесь непрерывно шли караваны купцов, связывавшие Средиземноморье с Китаем и Индией. Здесь же проходили и орды завоевателей, сметавшие древние и новые культуры. Поэтому культуры среднеазиатских народов возникли и развились позже средиземноморских цивилизаций. Народам Средней Азии столько раз приходилось восстанавливать разрушенные города и поселения, столько раз начинать все заново, что значительная часть их сил уходила на заживление ран, нанесенных различными завоевателями. И при всем этом они создали такие научные и художественные ценности мирового значения, внесли такой вклад в мировую науку и культуру, что ими по праву могут гордиться все народы нашей страны.

Как показали археологические раскопки и исследования, проведенные советскими учеными в 30—60-х годах XX в., в первой половине I в. до н. э. на этой территории происходило расселение ираноязычных племен, находившихся на стадии перехода к оседлому образу жизни. Со временем они сформировались в племенные объединения, главными из которых были хорезмийцы в районе Аральского моря, согдийцы в области среднего течения Аму-Дарьи и Сыр-Дарьи, бактрийцы у верховьев Аму-Дарьи. В нижнем течении Сыр-Дарьи и к северу от нее кочевали ираноязычные скифские и тюркоязычные племена, находившиеся на стадии родового строя. Ираноязычные и тюркоязычные племена и были автохтонами Средней Азии. Им принадлежит та блестящая культура, которая расцвела здесь в IX—XV вв. Она передавалась из рода в род, от поколения к поколению и выстояла под ударами завоевателей, которые пытались ее уничтожить. Не исчезли и творившие ее племена. Древние поселенцы Согдианы, Хорезма, Бактрии, Ферганы, Шаша являются предками таджиков, узбеков, туркмен и других народов Средней Азии. Таким образом, средневековая культура среднеазиатских народов — составная часть культуры Средней Азии.

Уровень математических знаний среднеазиатских народов до арабского завоевания не установлен, так как арабы полностью уничтожили всю древнюю письменность. Однако на основании косвенных данных можно предполагать, что он был не ниже, чем у вавилонян, китайцев, индийцев, египтян, народов Малой Азии. Действительно, еще в начале нашей эры города Мавераннахра вели оживленную торговлю с Китаем, Индией, Грецией, причем не только продуктами сельского хозяйства, но и металлами (железом, серебром), а также предметами художественного производства.

Пока трудно определить культурные связи между среднеазиатскими государственными образованиями первых столетий нашей эры и средиземноморскими и дальневосточными цивилизациями и степень их взаимовлияния. Все же можно полагать, что такие связи с Китаем, Индией и Византией были. Несторианские ученые, изгнанные из Византии, нашли себе убежище в Персии и Бактрии. Следы проживания несториан заметны во многих местностях Средней Азии, вплоть до границ Монголии. Культурное влияние несториан тем более бесспорно, что некоторые азиатские алфавиты возникли из несторианского.

Как и в Египте и Междуречье, в Средней Азии источником развития древней культуры было поливное земледелие. Технические и хозяйственные мероприятия, связанные с ирригацией засушливых земель, требовали знания приемов практической геометрии, арифметики, астрономии, естествознания, а также разработанного календаря. Содержание разработанных календарных систем в доарабской Средней Азии изложено в известном сочинении ал-Бируни. Потребности земледелия явились также причиной возникновения обработки металлов и горного дела. Известно, что руды добывались в Средней Азии еще до нашей эры, ремесленники Хорезма и Согдианы изготавливали металлические изделия даже для внешней торговли.

Со времен завоевательных походов Александра Македонского и образования греко-бактрийского государства среднеазиатская культура начинает испытывать влияние эллинистической культуры, с одной стороны, и буддийской культуры северной Индии — с другой. Сохранившиеся памятники изобразительного искусства в Средней Азии и Индии наглядно доказывают взаимовлияние этих культур.

Косвенным доказательством существования математической культуры в доарабской Средней Азии является ее последующий быстрый расцвет. Начало исламско-арабской математики было связано с освоением культурного наследия завоеванных стран. Именно благодаря тому, что Средняя Азия была перекрестком азиатских дорог и имела исторические связи с северной Индией, основы индийской математики, излагавшиеся в школах буддийских монастырей, попали на арабский Восток и таким образом стали достоянием средиземноморского культурного круга.

Арабское завоевание. Ал-Хорезми

Географическое положение среднеазиатских культурных центров — на перекрестке важнейших путей, связывающих Дальний Восток и Южную Азию с Восточной Европой, Кавказом и Средиземноморьем, — способствовало развитию новой и оригинальной культуры. Однако оно же было причиной тяжелых бедствий, которые терпели народы Средней Азии от нашествий кочевых воинственных орд, так как богатые и хорошо обработанные земли Согдианы, Хорезма и других государственных образований являлись большой приманкой для завоевателей. Одним из таких нашествий было арабское. Во время этого завоевания среднеазиатская культура была уничтожена. «И всеми способами рассеял и уничтожил Кутейба всех, кто знал письменность хорезмийцев, кто хранил их предания, всех ученых, что были среди них, так что покрылось все это мраком и нет истинных знаний о том, что было известно из их истории во время пришествия к нам ислама», — писал о нашествии арабов ал-Бируни.

Некоторые из западноевропейских ученых, исследовавшие историю науки Ближнего и Среднего Востока, объединяли ее под названием арабской науки. Однако арабы в первом периоде своей истории не только не были творческой силой, ибо культура их была значительно ниже культуры завоеванных ими народов, но в ряде случаев даже уничтожали культурное наследие прошлого, например малоазиатскую культуру. Характерно, что наивысшего развития арабоязычная культура достигла именно в тех странах, где местная культура уже имела длительную и насыщенную фактами историю, — в Средней Азии, Египте и южной Испании. Новая, исламская культура этих народов несла на себе ясно выраженную печать древних местных культур. Действительно, в VIII—IX вв. многие ученые, писавшие на арабском языке, были среднеазиатского, иранского и египетского происхождения.

Несмотря на исламское влияние, характерные черты местных культур, присущие им одним, продолжали развиваться. Существует, например, глубокое различие между изобразительным искусством и архитектурой Средней Азии и Испании, двух противоположных окраин мусульманского мира того времени. Подобное же наблюдается и в науке, в частности в математике: вклад хорезмийских ученых предполагает длительное предварительное развитие в местных условиях. Последствия арабского завоевания были частично изжиты лишь во второй половине XIII в. С этого времени наука и культура среднеазиатских народов развиваются, в какой-то степени приспособившись к новым условиям.

Борьба против арабских завоевателей продолжалась длительное время. Ухудшившееся положение населения, которое должно было платить налоги и местным феодалам, и чужеземным захватчикам, вызвало ряд восстаний. Самым крупным было восстание Муканны, охватившее в 70-х годах VIII в. весь Мавераннахр.

С середины VIII в. среднеазиатские города восстанавливают свою роль культурных центров. В частности, в 751 г. в Самарканде было начато производство бумаги. В течение более полутора столетий Самарканд был монополистом этой отрасли производства в халифате. С конца IX в. производством бумаги начали заниматься и другие центры халифата.

Не без влияния среднеазиатских ученых началось и накопление научной литературы на арабском языке. Обычно считается, что первым этапом развития арабоязычной литературы была серия переводов важнейших научных сочинений с греческих, главным образом, оригиналов. Но это не совсем так. Не наличие переводов вызвало развитие науки, а, наоборот, потребности развивавшейся науки стимулировали появление переводов необходимых сочинений. Большую роль в этом сыграли ученые, собранные при дворе халифов в Багдаде. Одним из наиболее выдающихся ученых был математик ал-Хорезми.

Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми (780—847) родился в семье, относительно поздно принявшей ислам, о чем свидетельствует его прозвище — ал-Маджуси из (семьи магов). Из-за тяжелого положения на родине, испытывавшей ужасы арабского завоевания, а может быть, и побаиваясь репрессий за свои связи с «магами», ал-Хорезми в последние годы VIII в. переселился в Багдад. В начале IX в. Багдад был развитым культурным центром. Ученые из разных стран, покоренных арабами, съезжались сюда, ибо только здесь у них была возможность заниматься научной работой. В Багдаде по образцу Александрийского музея был построен Бейтал-Хикма (Дом мудрости), представлявший собой нечто вроде академии с обсерваторией и библиотекой.

С 815 г. во главе Дома мудрости стал ал-Хорезми. Здесь им, а отчасти под его руководством, были выполнены работы по астрономии, географии и математике. Около 820 г. были составлены астрономические таблицы «Зидж», в основу которых положены известные таблицы Птолемея. До нас они не дошли и известны лишь в латинской рукописи 1126 г. К этому же времени относится измерение дуги меридиана, произведенное в районе между Тадмором и ар-Раккой, причем полученная величина расстояния между 35 и 36° с. ш. составила $56\frac{2}{3}$ арабских миль — 111 815 м, т. е. была лишь на 877 м больше истинной величины.

Из математических работ ал-Хорезми до нас дошли в более или менее цельном объеме два трактата — арифметический и алгебраический, — сыгравшие значительную роль в развитии мировой науки. Трактат по арифметике, в сущности, является первым в мировой литературе руководством для обучения счету. Полагают, что он попал в Европу в конце XI или начале XII в. через мавританскую Испанию. Известно его изложение на латинском языке (хранится в библиотеке Кембриджского университета). Начинается оно словами «Dixit Algorizmi», т. е. «Сказал Алгоризм (ал-Хорезми. — *Ред.*): пусть бог позволит нам вознести хвалу нашему вождю и защитнику». Рукопись обрывается на умножении дробей. О дальнейшем содержании трактата можно судить по другим двум рукописям, также содержащим его изложение: «Книга Алгоризма

о практике арифметики» («*Liber Algorismi de practica arismetricalae*») и «Книга введения Алхоризма в астрономическое искусство, составленная магистром А» («*Liber ysagogarum Alchorismi artem astronomicam a magistro A composito*»). Оба сочинения также, очевидно, южноиспанского происхождения.

Основными разделами трактата являются нумерация, действия с простыми числами и учение о дробях. В первом разделе ал-Хорезми излагает «индийский» способ записи чисел при помощи десяти знаков. Во втором — действия с простыми числами, их он насчитывает шесть — сложение, вычитание, удвоение, раздвоение, умножение, деление (почему он выделил удвоение и раздвоение, не совсем ясно; скорее всего эти действия заимствованы им из среднеазиатского народного счета).

Дроби ал-Хорезми делит на немые и выговариваемые, в связи с особенностью арабского языка, в котором есть особые слова для дробей со знаменателями от 2 до 9. Эти дроби называются выговариваемыми, а все прочие — немymi. Учение о дробях делится на два раздела: действия с шестидесятеричными и обычными дробями. Последовательность шести операций та же, что и при действиях с простыми числами. Действиям с обычными дробями предшествует приведение числителей к единице, т. е. они производятся так же, как в древнем Египте. К этому следует добавить несомненное индийское происхождение нумерации и ссылку ал-Хорезми на индийское происхождение действий с шестидесятеричными дробями, что также свидетельствует о сложности образования среднеазиатских культур. Все средневековые руководства по арифметике являлись, в сущности говоря, вариантами и переделками этого сочинения ал-Хорезми.

Не менее плодотворным было влияние и второго математического трактата ал-Хорезми, посвященного алгебре. Трактат этот называется «Краткий трактат об исчислении восстановления и противопоставления» и представляет собой практическое руководство по математике. Сохранился в ряде рукописей. Содержит учение об уравнениях первой и второй степеней, тройное правило, правила решения некоторых геометрических задач при помощи алгебры и учение о расчетах по мусульманскому наследственному праву, занимающее почти половину всего сочинения.

Этот трактат ал-Хорезми является первым в мировой литературе руководством по алгебре. Изложение в нем ведется в словесной форме, так как ал-Хорезми не применял символики. Само название трактата дало название науке: от слова «ал-джабр» (восстановление) произошло слово «алгебра». Ал-Хорезми применил это слово, как и слово «ал-мукабала» (противопоставление), в качестве указания на метод решения изложенных в сочинении задач. Противопоставление определяет операцию, при которой подобные члены сводятся в один, а восстановление показывает, что члены обеих частей уравнения приводятся к положительной форме.

Все уравнения ал-Хорезми приводит к шести типам:

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. $ax^2 = bx$. | 4. $x^2 + bx = c$. |
| 2. $ax^2 = c$. | 5. $x^2 + c = bx$. |
| 3. $bx = c$. | 6. $x^2 = bx + c$. |

Пусть, например, дана некоторая задача ¹, условие которой можно записать в виде

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58,$$

или

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Ал-Хорезми производит следующие преобразования:

$$\text{ал-джабр} - 2x^2 + 100 = 58 + 20x;$$

$$\text{ал-мукабала} - x^2 + 21 = 10x$$

(делит на 2 и приводит подобные члены), в результате чего получается уравнение, относящееся, по классификации ал-Хорезми, к пятому типу. Он не объясняет, как выполняются эти операции. Можно полагать ², что они были достаточно хорошо известны современникам автора и поэтому в пояснениях не нуждались.

Далее в трактате на нетрудных примерах поясняются действия с алгебраическими выражениями. В этой части трактата отражено как индийское, так и греческое влияние. Второй, весьма краткий раздел о тройном правиле и, собственно, не относящийся к алгебре, носит следы индийского влияния. Третий раздел, озаглавленный «Масахат» («Измерения»), посвящен некоторым применениям сведений, полученных в первом разделе, и решению ряда геометрических задач. Ал-Хорезми приводит теорему Пифагора с доказательством, измеряет площадь 12 геометрических фигур, в том числе треугольников, четырехугольников и круга, находит объем прямой призмы, цилиндра, пирамиды, усеченной пирамиды и конуса. Для числа π он дает три значения: $\frac{22}{7}$ (для практического употребления), $\sqrt{10}$ и $\frac{62\,832}{20\,000}$ (применявшиеся геометрами). Этот раздел, равно как и предыдущие, отражает влияние индийской и греческой математики.

В последней части трактата изложены задачи, связанные с мусульманским наследственным правом. Поскольку имущественные взаимоотношения, обусловленные этим правом, принимали зачастую очень сложные формы, то возникла необходимость в достаточно подробном практическом руководстве. Задачи решались с применением тех же алгебраических операций — ал-джабр и ал-мукабала. В латинских переводах, выполненных в Западной Европе, этой части нет, так как она не представляла никакого интереса для читателя.

Есть сведения о том, что кроме упомянутых ал-Хорезми написал еще несколько трактатов, но они пока не найдены. Однако и дошедшие до нас его сочинения свидетельствуют о том, что он был одним из наиболее выдающихся математиков раннего средневековья. Сочинения ал-Хорезми

¹ А. П. Юшкевич. История математики в средние века. Физматгиз, М., 1961, стр. 193.

² М. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd 1. Leipzig, 1907, S. 722.

имели большое методическое значение, они послужили образцом для создания учебников в странах как Ближнего Востока, так и Западной Европы. Сочинения его очень характерны для ученого среднеазиатского происхождения, для которого не были чуждыми ни рассуждения греков, ни умозаключения индийских ученых. Широта охвата и способность объединить результаты таких разнородных культур знаменуют переход от замкнутой местной науки к науке, являющейся достоянием каждого, не зависимо от происхождения. Эта широта была особенно характерна для среднеазиатских ученых эпохи Средневековья.

С Домом мудрости связаны и первые работы в области тригонометрии. Один из ученых Дома мудрости Ахмед ибн Абдалла ал-Мервази из Мерва (ок. 770 — ок. 870), которого называли ал-Хабаш — «вычислителем», пользовался в гномонике тангенсом и котангенсом, как отношениями сторон прямоугольного треугольника. Он составил таблицы значений тангенсов и котангенсов для некоторых величин угла с точностью до секунды. Он же ввел понятие косеканса. К этому времени относится и начало применения тригонометрии для астрономических вычислений.

Ал-Аббас ибн Саид ал-Джаухари, возможно, из Фараба, современник и сотрудник ал-Хорезми, занимался исследованием теории параллельных. Насираддин ат-Туси сообщает, что ал-Джаухари доказал постулат о параллельных, используя свойство накрестлежащих углов. Во всяком случае примечательным является сам факт, что «Начала» Евклида уже вошли в обиход ученых Дома мудрости.

Таким образом, к середине IX в. среднеазиатские ученые уже обладали знаниями, необходимыми для начала самостоятельной работы в области математики. Стимулом для развития последней продолжали оставаться требования практики — земледелия, техники и имущественных взаимоотношений.

3

Развитие математики в Средней Азии в IX—XI вв.

IX—X вв. для народов Средней Азии — это период относительной стабилизации и связанного с ней развития хозяйственной и культурной жизни. Экономической основой развития среднеазиатских народов было сельское хозяйство — земледелие и скотоводство. Некоторое значение имело горное дело, техника которого была очень невысокой. Разрабатывались главным образом серебряные и свинцовые руды, а иногда и железо. В городах были сосредоточены ремесло и торговля.

Рост производительных сил обусловил ряд существенных изменений в производственных отношениях: резко сократилась доля рабского труда, использовавшегося в сельском хозяйстве, горном деле и ремесле. «В источниках почти ничего не говорится об использовании рабов... Конечно, это не означает, что рабы в производстве уже не использовались

совершенно, однако не вызывает сомнений тот факт, что рабство в Северном Хорасане и Хорезме в IX—X вв., как и в других странах Востока, стало еще больше приобретать характер домашнего рабства, столь характерного для феодального Востока и сохранявшегося там вплоть до XIX в.»³.

Характерным явлением для среднеазиатских государств IX—X вв. были рост феодальной собственности на землю и потеря земли крестьянами. В Мавераннахре вся обрабатываемая земля принадлежала султану, светским и духовным феодалам. Владельцы земли дробили ее на мелкие участки и сдавали крестьянам на правах аренды. Поскольку сельскохозяйственное производство целиком зависело от состояния оросительных систем, то управление водой уже очень рано стало важнейшей государственной задачей. С орошением было связано и развитие местной техники — водоподъемных приспособлений.

В середине IX в. власть в Средней Азии захватил местный феодальный род Тахиридов, члены которого были сначала наместниками халифа, а затем самостоятельными властителями. Затем Саманиды, находившиеся прежде в ленной зависимости от Тахиридов, захватили власть в Мавераннахре и Хорасане.

Период правления Саманидов (приблизительно X в.) характеризуется значительным подъемом культуры и науки. Растет роль городов: Самарканд, Мерв, Бухара, Ургенч становятся не только торгово-ремесленными, но и культурными центрами мирового значения. Начинает распространяться просвещение. Появляются школы, в которых обучают чтению корана, толкованию его, основам мусульманского права и арифметике или, во всяком случае, счету, необходимому для торговли. Можно предполагать, что значительного распространения достигло индивидуальное профессиональное ученичество. Более состоятельные люди для обучения своих детей приглашали домашних учителей.

Значительная международная торговля, которую вели Самарканд, Ургенч, Мерв и другие города, была бы совершенно невозможной без основательных математических знаний: слишком резкое различие существовало тогда между единицами измерения и монетными системами даже соседних народов. Кроме того, косвенным доказательством распространности познаний в счете и геометрии является сооружение оросительных систем.

Другим косвенным доказательством наличия математических знаний у широких слоев среднеазиатского населения являются памятники архитектуры. Характерная для этого времени конструкция — куб, перекрытый полусферическим куполом. Несколько позднее появляются своды, подобные сводам ранней готики. Один из наиболее ранних памятников этой эпохи — мавзолей Исмаила Саманида в Бухаре. Он представляет собой кубическую кирпичную конструкцию, которая переходит в полусферу купола при помощи стрельчатых парусов и промежуточных восьмигранника и шестнадцатигранника. Пространственные построе-

³ История Туркменской ССР. Т. 1. Кн. 1. Изд-во АН Туркменской ССР, Ашхабад, 1957, стр. 223.

ния такого типа свидетельствуют об основательных познаниях в стереометрии и, во всяком случае, о хорошем знании трактата ал-Хорезми, а может быть, и о других, не дошедших до нас сочинений. В то же время сооружения этой эпохи указывают на остатки древних, доарабских познаний у архитекторов: доарабские ступенчатоарочные паруса развились в паруса сводов. Трехчетвертные колонны по углам мавзолея Саманида также заимствованы из доарабской согдийской архитектуры.

В конце X в. кочевые тюркские племена заняли Мавераннахр и проникли в южные области Средней Азии, основным населением которых были ираноязычные земледельцы. В 999 г. они заняли Бухару, и уже в первые годы XI в. на месте единого государства Саманидов было два новых государственных образования — империи Караханидов и Газневидов. В государство Караханидов входили часть восточного Туркестана, Семиречье, Шаш, Фергана и Согдиана. Аму-Дарья отделяла его от империи Газневидов, граничившей с северной Индией и простиравшейся до южных берегов Каспийского моря. Хорезм первое время сохранял некоторую самостоятельность, но в 1017 г. также был включен в состав государства Газневидов.

Эпоха феодализма оказалась более благоприятной для развития культуры и искусства, чем время деспотий. Феодалы покровительствовали наукам и приглашали ученых к себе на службу, чтобы придать блеск своему двору, а также в узкопрактических целях, связанных со строительством дворцов, крепостей и мечетей, с астрологическими наблюдениями (желание узнать свою судьбу часто было даже у самых жестоких и невежественных властителей) и с торговлей. Поэтому не удивительно, что величайшие ученые арабоязычных стран IX—XI вв. были среднеазиатского происхождения. Абу Али Ибн Сина (Авиценна), ал-Фараби, ал-Фергани, Абу Рейхан ал-Бируни — все они родились в городах Средней Азии и все провели свою жизнь в скитаниях, в поисках покровителя, а иногда и просто куска хлеба. Это только крупнейшие ученые, но уже само их появление было возможно при наличии очень глубоких математических традиций и означало, что до них был достигнут некоторый средний культурный уровень. Выше упоминалось, что Самарканд того времени поставлял бумагу почти всему арабскому Востоку, несколько позже распространилась слава среднеазиатских переплетчиков; Ибн Сина говорит о том, что в его время в Бухаре были книжные лавки.

В IX в. в Доме мудрости вместе с ал-Хорезми работал уроженец Ферганы знаменитый астроном и математик ал-Фергани (Алфраганус). Его имя было хорошо известно не только в исламских, но и в западноевропейских странах. Он написал комментарий к Птолемею и «Начала астрономии», представляющие собой энциклопедию знаний его эпохи по астрономии и географии.

К следующему поколению ученых, работавших в начале X в., относится Абу Наср Мухаммед ибн Тархан ал-Фараби из Фараба (Отрар). Он родился около 870 г. в семье феодала. Учился у себя на родине, затем в Багдаде, жил в Средней и Малой Азии, под конец жизни поселился в Сирии, в Алеппо, где и умер в 950 г. Занимался ал-Фараби

в основном философией и был последователем Аристотеля в арабоязычных странах, за что его называли «вторым Аристотелем». Кроме того, изучал медицину, теорию музыки и математику. Известнейшее его математическое произведение «Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида» дошло до нас в древнееврейском переводе. В нем ал-Фараби дает определение и объяснение ряда математических понятий в трактовке перипатетиков. Так, о точке, линии, поверхности он пишет следующее: «В сочинениях математиков все это мыслится без этих качеств, будучи отвлеченными и обособленными от них, в то время как в физике все это рассматривается вместе с качествами. И когда разум выделяет их и исследует, рассматривая их без этих качеств, то он трактует только о том, что входит в их сущность и отвлечено от ощущения»⁴. В разделе, посвященном «выразимым и невыразимым числам», он рассматривает понятие иррациональности.

Из других сочинений ал-Фараби большую известность приобрели философский трактат «Рождение наук» и трактат по теории музыки «Великая книга музыки» (сам ал-Фараби был прекрасным музыкантом). По сочинениям ал-Фараби учились Ибн Сина и Омар Хайям.

Абу Мухаммед Хадим ибн ал-Хидр ал-Ходженди (дата рождения не известна, ум. в 1000 г.), математик и астроном, родился в Ходженде, жил и работал в Рее. Он сформулировал частный случай теоремы Ферма: не существует таких натуральных чисел x, y, z , чтобы выполнялось равенство

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

В тригонометрии доказал теорему синусов. В астрономии ему принадлежит изобретение секстанта, названного им в честь султана «секстантом Фахри». Секстант был главным инструментом в обсерватории Улугбека.

Одним из выдающихся математиков X в. был Абу-л-Вафа Мухаммед ибн Мухаммед ибн Яхья ибн ал-Аббас ал-Бузджани (940—980). Он родился в Бузджане (Хорасан). Жил и работал в Багдаде. Занимался математикой, астрономией, а также другими областями знания. Был одним из последних переводчиков греков.

Сохранилось его геометрическое сочинение «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений», состоящее из введения и 12 глав. В нем Абу-л-Вафа рассматривает решение трех типов задач. К первому типу он относит около 18 задач, решаемых при помощи постоянного раствора циркуля: построение перпендикуляра к данному отрезку, деление угла пополам, деление отрезка на несколько равных частей, построение правильных трех-, четырех-, пяти-, шести-, восьми- и десятиугольников на данном отрезке, вписанных в данный круг, и др. Вторую группу составляют задачи о преобразовании квадратов. К ним относятся преобразование в квадрат суммы нескольких квадратов и разложение квадрата в сумму нескольких квадратов. К третьей группе относятся задачи на описание правильных сферических многоугольников и на разбиение сферы на многоугольники.

⁴ А б у Н а с р а л - Ф а р а б и. Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида — Проблемы востоковедения 1959, № 4, стр. 94

Подобную же практическую направленность имеет и другое сочинение Абу-л-Вафы — «Книга для писцов», представляющая собой руководство по элементам арифметики и геометрии. Правила в книге даны без доказательств. В ней весьма подробно изложено учение о дробях. Абу-л-Вафа различает три типа дробей: главные (доли единицы от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$), составные (со знаменателем 10) и соединенные дроби, являющиеся произведением главных дробей. Предварительным приемом при действиях с дробями у него, как и у многих других восточных математиков, служит приведение к шестидесятеричным дробям с числителем, равным единице.

В геометрическом разделе Абу-л-Вафа дает решения ряда практических задач. В частности, указывает правила вычисления поверхности сферы при помощи площади большого круга и вычисления объема шара. В вычислениях Абу-л-Вафы $\pi = \frac{22}{7}$. Интересно, что он не выделил геометрию в особый раздел. В книге ей посвящена третья глава (первая и вторая — действия с простыми числами и дробями, четвертая и седьмая — задачи из области практической арифметики).

Есть сведения о том, что Абу-л-Вафа написал трактат об извлечении корней третьей, четвертой и седьмой степеней, однако этот трактат до нас не дошел.

Особенно значительными представляются результаты Абу-л-Вафы в области тригонометрии, хотя тригонометрия у него, как и у большинства восточных математиков, играет роль лишь инструмента для решения астрономических задач. В своей обработке «Алмагеста» Птолемея он излагает основы тригонометрии, причем исходит уже не из сторон прямоугольного треугольника, как ал-Мервази, а из линий в круге. Дополнительно к известным уже синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу Абу-л-Вафа ввел секанс и косеканс. Ему уже были известны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha : r &= \sin \alpha : \cos \alpha; \\ \operatorname{ctg} \alpha : r &= \cos \alpha : \sin \alpha; \\ \operatorname{tg} \alpha : \sec \alpha &= \sin \alpha : r; \\ \operatorname{tg} \alpha : r &= r : \operatorname{ctg} \alpha; \\ \sec \alpha &= \sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \sqrt{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Синус суммы и разности двух дуг Абу-л-Вафа выражает только через синусы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Результатами, полученными таким образом, он пользуется на практике, при составлении тригонометрических таблиц. Ему принадлежит способ вычисления данных для этих таблиц, по точности своей значительно превосходящий все известные до него способы.

Вопросами сферической тригонометрии в применении к астрономии занимался младший современник Абу-л-Вафы, уроженец Хорезма, Абу Наср ибн Ирак (960—1020). По-видимому, независимо от ал-Ходжен-ти он дал одно из доказательств теоремы синусов. Перевел и снабдил полным комментарием «Сферику» Менелая Александрийского.

Вопросами практической математики занимался Абу-л-Хасан Али ибн Ахмед ан-Насави (дата рождения не известна, ум. ок. 1030 г.). Родился в Насе (Ашхабаде), жил и работал в Багдаде при дворе Буидов, а затем в Газне у султана Махмуда Газневида. Написал сочинение — «Достаточное об индийской арифметике», — посвященное практической арифметике и содержащее кроме обычных разделов извлечение квадрат-ных и кубических корней. Занимался также комментированием гречес-ких математиков, в частности Архимеда и Менелая Александрийского.

Одним из величайших ученых этой эпохи был энциклопедист Абу Али ал-Хусейн ибн Абдаллах ибн Сина, известный под именем Авиценны (980—1037). Он родился в Афшане, возле Бухары, в семье состоятель-ного чиновника. Ранние годы жизни провел в Бухаре. Родители пригласи-ли домашнего учителя, который обучал его чтению корана, исламско-му богословию, философии, а также началам математики и астрономии. В возрасте 10 лет он ознакомился с «индийским счетом», и с этих пор математика стала одним из его любимых занятий. В Бухаре в одной из книжных лавок он случайно купил сочинения ал-Фараби, по которым познакомился с учением Аристотеля. Благодаря удачному врачеванию султана он получил доступ в дворцовое книгохранилище, одну из бога-тейших среднеазиатских библиотек. «В это время, — пишет Ибн Сина, — я не досыпал ни одной ночи, да и в течение дня не занимался ничем иным, кроме наук... Возвращаясь к ночи в мое жилище, я ставил перед собой светильник и погружался в чтение или письмо. Если меня начинало клонить ко сну или я чувствовал слабость — несколько глотков из кубка возвращали мне силы и я вновь углублялся в работу... Когда же сон окончательно одолевал меня, то и во сне продолжал я обдумывать те вопросы, которыми занимался наяву, — многие проблемы уяснил я себе именно во сне. Такую жизнь вел я, пока не усвоил твердо всех наук и не овладел ими настолько, насколько это вообще доступно чело-веку»⁵.

В 999 г., когда пала династия Саманидов, Ибн Сина переехал в Хо-резм, но в 1017 г., спасаясь от Махмуда Газневида, бежал в Иран, где жил, переезжая из города в город. Последние годы жизни он провел в Исфагане.

Ученый энциклопедических знаний, Ибн Сина занимался многими науками, в том числе философией, математикой и химией. Однако ми-ровую славу принесли ему занятия медициной. Его медицинская энцик-лопедия в Западной Европе была основным врачебным руководством вплоть до XVII в.

Другие произведения Ибн Сины охватывают многие отрасли зна-ния. Так, в «Книге исцеления» он рассматривает вопросы философии,

⁵ История народов Узбекистана. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1950, стр. 259.

естествознания и математики. В IX—XII частях даны комментарии к «Алмагесту» Птолемея, кратко изложены «Начала» Евклида и «Введение в арифметику» Никомаха. «Книга исцеления» писалась как практическое руководство, поэтому и математические ее разделы изложены так, чтобы по ним можно было изучать предмет. В частности, комментируя Евклида, он перерабатывает излагаемый материал и стремится сделать его более удобным для усвоения.

«Данеш-наме» («Книга знания») Ибн Сины, написанная на таджикском языке, также является энциклопедическим сочинением и содержит разделы, посвященные математике. Известно, что Ибн Сина написал и несколько комментариев к переводам работ греческих математиков.

Величайшим ученым средневековой Средней Азии был Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед ал-Бируни (973—1048). Родился он в Хорезме в небогатой семье, жившей в предместьях города (Бируни — «человек из предместья», от слова «бирун» — предместье). В 995 г. ал-Бируни уехал из Хорезма и жил некоторое время в северном Иране. В 1010 г. он возвратился на родину и поселился в г. Ургенче, где при дворе хорезмшаха Абу-л-Аббаса ал-Мамуна был научный кружок, в который входили такие ученые, как Ибн Сина, Абу Наср ибн-Ирак, врач Ибн-ал-Хуммар, философ Абу Сахл ал-Масихи, историк Ибн Мискавейх. Членом кружка стал и ал-Бируни.

В 1017 г. Ургенч был захвачен Махмудом Газневидом. Газневид перевез к себе в Газну виднейших хорезмийских ученых, в том числе и ал-Бируни. Сопровождая Махмуда в его походах, ал-Бируни несколько раз посетил северную Индию.

Проведя значительную часть своей жизни в скитаниях и путешествиях, ал-Бируни научился уважать и понимать людей, к какому бы народу они не принадлежали. Качество это, крайне редкое в эпоху раннего феодализма, ставит его на голову выше современных ему и многих живших после него ученых. В нем нет и следа исламского фанатизма. С ранним беспристрастием он описывает обычаи индийцев и евреев, огнепоклонников и христиан.

Бируни был ученым-энциклопедистом, поэтому его труды охватывают почти все области знания, которыми занимались в те времена на арабоязычном Востоке. Одно из первых его сочинений посвящено воспитанию Муканны («Известие об одетых в белое и о карматах»). Несколько позже, около 1000 г., он написал первый из своих знаменитых трактатов — «Памятники минувших поколений», в котором излагает способы исчисления времени у различных народов, сопоставляет их и показывает, как следует переходить от одних систем к другим. Уже здесь проявляются глубокие знания ал-Бируни в области астрономии и математики.

Основные математические работы Бируни — это «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства» и «Канон Масуда об астрономии и звездах», посвященный султану Масуду Газневиду. В третьей книге «Канона» собраны все знания по тригонометрии, которыми обладали народы арабоязычного Востока, а также внесены дополнения самого Бируни. Книга состоит из десяти глав.

В I главе вычисляются длины сторон правильных вписанных треугольника, квадрата, пяти-, шести-, восьми- и десятиугольника на основе построений хорд с помощью циркуля и линейки. Во II главе доказываются теоремы о хордах, равносильные теоремам о синусе суммы двух углов, разности двух углов, удвоенного угла, половинного угла и т. д. В III главе строится сторона правильного вписанного девятиугольника. Эту задачу ал-Бируни сводит к решению кубического уравнения при помощи геометрических построений. В результате одного из построений он получает уравнение $x^3 = 1 + 3x$, другое построение приводит к уравнению $x^2 + 1 = 3x$, а также решает эти задачи с помощью специального итерационного процесса. IV глава посвящена задаче трисекции угла. В ней рассмотрено 12 способов решения трисекции угла с помощью вставки и аналогичных приемов, предложенных различными математиками, начиная от Архимеда. В V главе на основе результатов предыдущей главы вычисляется отношение длины окружности к диаметру.

Глава VI содержит таблицы синусов. Правила пользования ими изложены в VII главе. Среди этих правил — правила линейного и квадратичного интерполирования. В VIII главе рассмотрены тангенсы и котангенсы, приведены таблицы тангенсов и правила пользования ими. В этой же главе доказывается теорема синусов плоской тригонометрии. Главы IX и X посвящены сферической тригонометрии. В частности, доказывается сферическая теорема синусов ⁶.

Тригонометрическими вычислениями ал-Бируни пользовался при составлении астрономических таблиц и в других своих астрономических сочинениях, например в работе «Расчет удаления солнечного апогея от точки весеннего равноденствия» ⁷.

Есть сведения о том, что ал-Бируни написал сочинение об извлечении корней третьей и высших степеней. В трактате «Об индийских рашиках» он рассматривает тройное и производные от него правила решения арифметических задач. «В Индии, говорит ал-Бируни, он встречал задачи не более чем с одиннадцатью величинами, но их может быть любое нечетное число. Сущность правил и схемы выкладок подробно поясняются на практических примерах, исходные данные которых заносятся в два столбца. Особенно удачным было рассмотрение нескольких задач на пятерное правило с одинаковыми числовыми данными, но с величинами, находящимися в различных отношениях прямой или обратной пропорциональности. В приводимых задачах находится до 17 величин. Все примеры ал-Бируни — целочисленные, но тройные правила обоснованы с помощью общей теории составных отношений. При этом он ссылается на Евклида и его комментаторов. Доказательства ал-Бируни носят поэтому общий характер» ⁸.

⁶ А. П. Юшкевич. История математики в средние века, стр. 288.

⁷ Х. У. Садыков. Астрономическое учение Бируни. — В кн: Бируни. Изд-во АН СССР. М.—Л., 1950.

⁸ А. П. Юшкевич. История математики в средние века, стр. 201.

Всего ал-Бируни написал более 150 трудов из разных областей знания. Арабский ученый Якут сообщает, что в одной мечети он нашел список работ ал-Бируни на 60 страницах. Однако большинство из них до нас не дошло. Но и тех, что остались, достаточно, чтобы считать ал-Бируни крупнейшим ученым. Следуя своим гуманистическим идеям, он писал для людей. Практическая направленность его работ видна в каждой написанной им строчке.

4

Средняя Азия в XII в. Математическое творчество Омара Хайяма

В XI и XII вв. в государственных образованиях Средней Азии повысилась роль тюркского этнического элемента. Тюркские кочевые племена, проникшие с севера и востока на территорию Мавераннахра в Хорезме, населенного ираноязычными народами, сами перешли к оседлой, земледельческой жизни и мало-помалу начали сливаться с автохтонами, образуя единый двуязычный народ при главенствующем значении тюркского языка. Во второй половине XI в. Махмуд Кашгарский писал: «Были люди, которые говорили по-тюркски и по-согдийски, были люди, которые говорили только по-тюркски, но не было людей, которые говорили только по-согдийски». В 1040 г. был наголову разбит Масуд Газневид. Южная часть Средней Азии, Иран и северный Ирак попали под власть Сельджукидов. Мавераннахр остался караханидским. Однако вскоре империя Караханидов распалась на множество феодальных государств и начал опять расти Хорезм. К этому времени относится подъем культурной и хозяйственной жизни в городах. Число их росло, они обстраивались новыми общественными и частными зданиями. Самарканд конца XII в. насчитывал 400 тыс. чел.

В городах развивалось ремесло, в частности производство ювелирных и художественных изделий, бытовой и строительной керамики, оружейное дело, ткацкое и кожевенное производство, выработка стекла и стеклянных изделий, производство бумаги, переплетное дело — весьма характерная для высокой культуры эпохи отрасль ремесла. Вместе с тем основой хозяйственной жизни Средней Азии оставалось сельское хозяйство. Изменился только характер эксплуатации непосредственных производителей. С XI в. в Средней Азии распространилось право условного землевладения — «икта». Икта представляла собой систему взаимоотношений между властителем и ленником: получавший икту имел право на некоторую постоянную долю доходов, главным образом налогов, с некоторого земельного участка. Право икты бытовало, главным образом, у Караханидов и Сельджукидов. Со временем наблюдался процесс перехода икты из права личного в право наследуемое. Крестьяне, имевшие личную свободу, должны были платить налог, в среднем составлявший до $\frac{2}{3}$ урожая, из которых половина шла помещику, а половина — государству.

Источником математических знаний оставалось поливное земледелие. Как и в Древнем Египте, в Средней Азии геометрия имеет ясно выраженную практическую, в частности землемерную, направленность. Тригонометрия же вообще длительное время не воспринималась как наука, а употреблялась исключительно в качестве вспомогательных расчетных методов для астрономии и гномоники. Это в значительной степени было связано с отсутствием алгебраической и тригонометрической символики.

Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (ок. 1048—1131). Родился в Нишапуре (Хорасан). О его жизни сохранилось очень немного сведений. После учебы в Нишапуре или в Балхе он покинул Хорасан и некоторое время жил в Самарканде, где написал свой алгебраический трактат, затем — в Бухаре. В 1074 г. по приглашению сельджукского султана Маликшаха Хайям приехал в Исфаган и начал работать при астрономической обсерватории. К этому периоду относится его второй математический трактат — «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида».

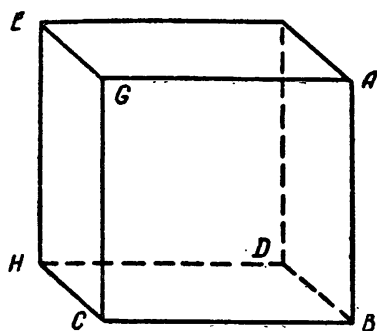
Некоторое время Хайям жил в Мерве и в Балхе. По-видимому, незадолго до смерти он снова поселился в Нишапуре. Последние его годы были омрачены преследованиями мусульманского духовенства, препятствовавшего развитию науки. В сущности, вся история среднеазиатской науки представляет собой непрерывную борьбу суннитского и шиитского духовенства с учеными, представителями «древней науки». Религиозный фанатизм позже явился причиной деградации среднеазиатской (да и вообще арабоязычной) науки.

Научное наследие Хайяма охватывает кроме двух уже отмеченных математических трактатов и «Маликшахских астрономических таблиц», сохранившихся только во фрагментах, один физический трактат и шесть историко-философских сочинений. Однако более известен Хайям как поэт. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что в его лице впервые в истории мировой науки гармонически слились «физик» и «лирик».

Алгебраический трактат Хайяма «О доказательствах алгебраических проблем» написан между 1069 и 1074 гг. Он содержит введение, решение уравнений первой, второй и третьей степеней, а также некоторых специальных видов уравнений.

Введение посвящено истории вопроса. «Один из поучительных вопросов, необходимых в разделе философии, называемом математикой, — пишет Хайям, — это искусство алгебры и алмукабалы, имеющее своей целью определение неизвестных, как числовых, так и измеримых. В нем встречается необходимость в некоторых очень сложных видах предложений, в решении которых потерпело неудачу большинство этим занимавшихся. Что касается древних, то до нас не дошло сочинение, в котором они рассматривали бы этот вопрос. Может быть, они искали решение и изучали этот вопрос, но не смогли преодолеть трудностей, или их исследования не требовали рассмотрения этого вопроса, или, наконец, их труды по этому вопросу не были переведены на наш язык»⁹.

⁹ О м а р Х а й я м. Трактаты. Изд-во восточной литературы, М., 1961, стр. 69—70.



Чертеж к исследованию уравнения $x^3 = a$.

Далее Хайям пишет об условиях, в которых приходилось работать ученым, его старшим современникам и ему: «... Я был лишен возможности систематически заниматься этим делом и даже не мог сосредоточиться на размышлении о нем из-за мешавших мне превратностей судьбы. Мы были свидетелями гибели ученых, от которых осталась малочисленная, но многострадальная кучка людей. Суровости судьбы в эти времена препятствуют им всецело отдаться совершенствованию и углублению своей науки. Большая часть из тех, кто в настоящее время имеет вид ученых, одевают истину ложью, не выходя в науке за пределы подделки и притворяясь знающими»¹⁰.

Непосредственно после введения Хайям переходит к определению основных понятий науки, используемых им в трактате. При изложении Хайям пользуется геометрическим методом. Этим он добился как наглядности, так и ясности в изложении, чего нельзя было бы сделать иным путем, учитывая отсутствие символики.

Уравнения до третьей степени Хайям делит на простые и сложные. Шесть видов простых уравнений в принятой ныне символике имеют вид:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) $x = a$; | 4) $x^2 = bx$; |
| 2) $x^2 = a$; | 5) $x^3 = cx$; |
| 3) $x^3 = a$; | 6) $x^3 = bx$. |

Сложные уравнения бывают трехчленные и четырехчленные. Существует 12 видов трехчленных уравнений:

$x^2 + bx = a$;	$x^3 + cx^2 = bx$;	$x^3 + bx = a$;	$x^3 + cx^2 = a$;
$x^2 + a = bx$;	$x^3 + bx = cx^2$;	$x^3 + a = bx$;	$x^3 + a = cx^2$;
$x^2 = bx + a$;	$x^3 = cx^2 + bx$;	$x^3 = bx + a$;	$x^3 = cx^2 + a$.

Две разновидности четырехчленных уравнений охватывают следующие семь видов:

$x^3 + cx^2 + bx = a$;	$x^3 + cx^2 = bx + a$,
$x^3 + cx^2 + a = bx$;	$x^3 + bx = cx^2 + a$;
$x^3 + bx + a = cx^2$;	$x^3 + a = cx^2 + bx$.
$x^3 = cx^2 + bx + a$;	

Все эти виды уравнений Хайям исследует, как уже отмечалось, геометрическим способом. Рассмотрим, например, простое уравнение третьего вида

$$x^3 = a.$$

Хайям исследует этот вид уравнения следующим образом (см. рисунок): «Третий вид: число равно кубу. Если предмет задачи — число, будет из-

¹⁰ О м а р Х а й я м Трактаты, стр. 69—70.

вестен куб этого числа. Нет другого средства найти его ребро, кроме последовательного подбора. Это относится и ко всем числовым степеням, как квадрато-квадрат, квадрато-куб, кубо-куб, о чем мы говорили выше.

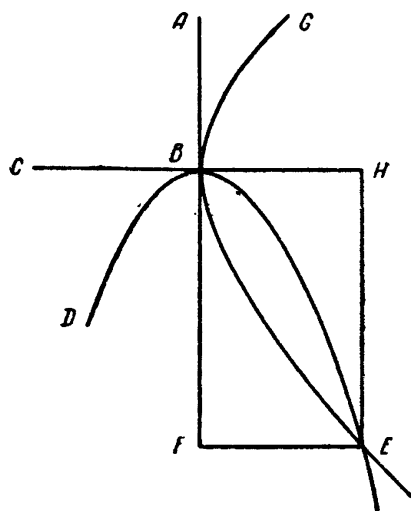
В геометрическом доказательстве предположим, что квадрат AD есть квадрат единицы, т. е. AB равна BD и каждая из этих двух сторон равна единице. Далее восстановим к плоскости AD в точке B перпендикуляр BC , как это показал Евклид в XI книге своего сочинения, и сделаем этот перпендикуляр равным данному числу. Дополним тело $ABCDEFGH$. Известно, что мера этого тела равна данному числу. Далее построим куб, равный этому телу. Однако построение этого куба производится только с помощью свойств [конических] сечений. Поэтому мы отложим это до тех пор, пока не приведем предварительных предложений, относящихся к этим свойствам.

Всякий раз, когда мы будем говорить: число равно телу, мы будем понимать под числом тело с параллельными гранями и прямыми углами, имеющее основанием квадрат единицы и высоту, равную данному числу»¹¹.

В качестве примера исследования Хайямом трехчленного уравнения рассмотрим уравнение вида (см. рисунок)

$$x^3 = bx + a.$$

«Третий вид: куб равен ребрам и числу. Положим [линию] AB равной стороне квадрата, равного числу ребер, и построим равное данному числу тело, основание которого есть квадрат AB . Пусть высота этого тела будет BC и пусть она будет перпендикулярна AB . Затем продолжим AB и BC в их направлениях и построим параболу, вершина которой — точка B , стрела имеет направление AB , а прямая сторона которой есть AB . Это будет [парабола] DBE . Она будет известна по положению и будет касаться линий BH в соответствии с тем, что показал Аполлоний в 33-м предложении I книги. Затем построим другое коническое сечение, гиперболу, вершина которой — точка B , стрела имеет направление BC , а обе стороны, прямая и поперечная, равны BC . Это будет гипербола GBE . Она будет известна по положению и будет касаться линий AB . Эти два конических сечения необходимо пересекутся. Пусть они пересекаются в точке E . Эта точка также известна по положению. Опустим из точки E два перпендикуляра EF , EH . Они будут известны и по положению и по величине. Линия EH — координатная линия [гиперболы], и, как показано выше, ее квадрат будет равен произведению CH и BH . Поэтому CH будет относиться к EH , как EH к HB . Но EH , равная BF , относится к HB , равной EF , которая есть ордината другого



Чертеж к исследованию уравнения $x^3 = bx + a$.

¹¹ Омар Хайям. Трактаты, стр. 75—76.

конического сечения, как EF к AB , являющейся прямой стороной параболы. Эти четыре линии пропорциональны: AB относится к HB , как HB к BF и как BF к CH , и квадрат AB , являющейся первой, относится к квадрату HB , являющейся второй, как HB , являющаяся второй, к CH , являющейся четвертой. Следовательно, куб HB будет равен телу, основание которого есть квадрат AB , а высота CH , так как их высоты обратно пропорциональны их основаниям. Но это тело равно телу, основание которого есть квадрат AB , а высота BC , которое мы сделали равным данному числу, вместе с телом, основание которого есть квадрат AB , а высота BH , равная данному числу ребер куба BH . Поэтому куб BH равен данному числу вместе с данным числом его ребер. Это и есть искомое.

Этим показано, что у этого вида нет многообразия случаев и что в его задачах нет ничего невозможного. Он был решен при помощи свойств параболы и гиперболы»¹².

В решении Хайям учитывает только один из корней уравнения — положительный. «Если данное уравнение имеет вид

$$x^3 = bx + a,$$

то $AB = \sqrt{b}$, $BC = \frac{a}{b}$ и построенные Хайямом парабола и равноугольная гипербола могут быть определены уравнениями $x = \sqrt{e}y$ и $\left(x + \frac{a}{2b}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$ или $x\left(x + \frac{a}{b}\right) = y^2$, вследствие чего абсцисса точки пересечения этих кривых удовлетворяет данному уравнению (положительное направление оси абсцисс здесь — направо). Хайям получает это, сравнивая пропорцию $CH : EH = EH : HB$, т. е. $\left(x + \frac{a}{b}\right) : y = y : x$, с пропорцией $EH : HB = EF : AB$, т. е. $y : x = x\sqrt{b}$, откуда

$$b : x^2 = x : \left(x + \frac{a}{b}\right) \text{ или } x^3 = b\left(x + \frac{a}{b}\right), \text{ т. е. } x^3 = bx + a \gg^{13}.$$

Второй трактат Хайяма озаглавлен «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» и состоит из трех книг. Первая книга — «Истина параллельных и напоминание об известных сомнениях» — посвящена доказательству постулата Евклида. Хайям считает, что полностью разрешил все сомнения и предлагаемые им положения следовало бы включить в «Начала».

Вторая и третья книги — «Напоминание об отношении и смысле пропорции и их истине» и «Составление отношений и его исследования» — посвящены исследованию отношений и пропорций, роль которых в решении арифметических задач была весьма велика, так как, в сущности, в основу всех правил арифметики, разработанных средневековыми арабоязычными и западноевропейскими математиками, положены теории,

¹² Омар Хайям. Трактаты, стр. 87—88.

¹³ Там же, стр. 255 (комм. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича).

изложенные в «Началах» Евклида. По-видимому, и у Хайяма первоначальный интерес к математике связан с арифметикой. Известно, что первым математическим трактатом Хайяма было сочинение «Проблемы арифметики», в котором, в частности, он изложил способ определения целых корней с любым натуральным показателем из целых чисел. А. П. Юшкевич полагает, что Хайяму был известен бином Ньютона для целых показателей ¹⁴.

Работы Хайяма являются высшим достижением среднеазиатской и иранской математики XI—XII вв. Одновременно с ним работали и другие математики, но это были уже ученые меньшего размаха. Да и обстоятельства не благоприятствовали развитию наук. Сельджукские султаны, которым были подчинены юг Средней Азии, Иран и Ирак, не только не покровительствовали наукам, но даже подозрительно относились к ученым, сомневаясь в их исламской правоверии. Подобное положение было и в караханидском Мавераннахре.

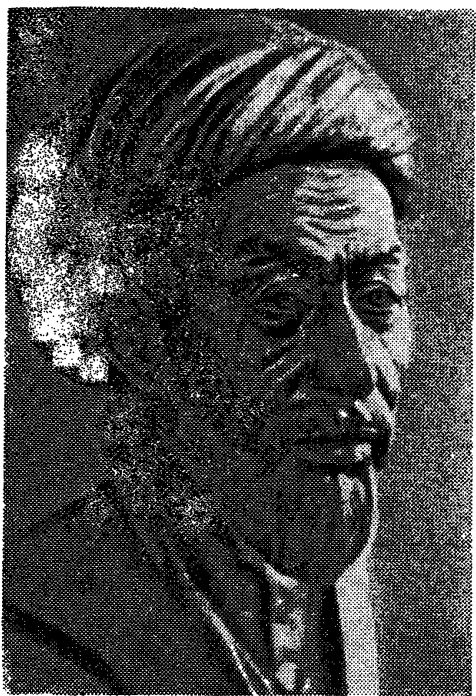
Б

Монгольское завоевание Средней Азии и его последствия. Улугбек и его школа

Упадок империи Караханидов привел к ослаблению всех северных областей Средней Азии. Этим воспользовался Хорезм. В первой половине XII в. Хорезм входил еще в состав Сельджукского султаната, однако, благодаря оживленной торговле и развитому сельскому хозяйству, он все более и более усиливался. В 1138 г. орда каракитаев нанесла сокрушительный удар господству Караханидов и вскоре полностью овладела Мавераннахром. Выиграл от этого Хорезм, который поспешил овладеть соседними княжествами. К концу XII в. государство Хорезмшахов представляло собой уже самое мощное государственное образование в Средней Азии. Кроме собственно Хорезма оно владело северным Ираном и прикаспийскими областями. Хорезмшах Мухаммед (1200—1220) овладел Бухарой и значительной частью Мавераннахра, войдя в непосредственное соприкосновение с владениями каракитаев и частично поставив их в зависимость от Хорезма.

Еще раз воскресли древние культурные традиции Хорезма: новый подъем переживали литература, наука и искусство. В 1178—1179 гг. ученый Фахраддин ар-Рази закончил энциклопедический труд «Собрание наук», в котором представлены 57 отраслей наук, в том числе естественные и технические. Значительного развития достигла архитектура: хорезмские строители изобрели новые типы сводчатых и купольных перекрытий. Начала развиваться живопись. Происхождение живописи в Средней Азии имеет глубокие, местные корни, связанные с гре-

¹⁴ А. П. Юшкевич. Омар Хайям и его «Алгебра». — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2, 1948, стр. 499.



Скульптурный портрет Улугбека. Реконструкция М. М. Герасимова по черепу.

ко-бактрийским искусством и с религиозным течением манихеев. Сохранились сведения, что сам Мани (III в. н. э.) был крупным художником.

В 20-х годах XIII в. среднеазиатские народы пережили монгольское нашествие. Их города были сожжены и разрушены монгольскими ордами Чингис-хана. Точно так же, как Русь преградила монголам дорогу на запад и спасла западноевропейскую культуру, Средняя Азия, ценой своих бедствий и гибели культурных ценностей, спасла южные арабоязычные культуры.

Война 1219—1221 гг. была для среднеазиатских народов не меньшим несчастьем, чем арабское завоевание. Монголы уничтожили многочисленные материальные и культурные ценности. Они превратили в развалины города Ургенч, столицу Хорезма, и Мерв, уничтожили систему орошения — основу среднеазиатского зем-

леделия. Ущерб был настолько велик, что даже через 100 лет после нашествия Чингис-хана, в первой четверти XIV в., не все еще было восстановлено. Особенно в тяжелом положении оказалось трудовое население — крестьяне и ремесленники, которым пришлось платить подати и своим феодалам и монгольским завоевателям. Городская беднота восставала. Одним из первых было восстание Тараби в Бухаре в 1238 г.

Хозяйственная разруха обусловила упадок науки и культуры. Как и после арабского завоевания, развитие науки прекратилось на полтора-два десятилетия. Немногие ученые спаслись во время нашествия, но и они бежали в Ирак, Египет, Северную Африку. Можно предположить, что школы все же продолжали свое существование и в первые десятилетия после монгольского нашествия, но они все в большей и большей степени приобретали религиозный характер. Очевидно, что процесс захвата школы мусульманскими богословами, начавшийся еще при господстве Махмуда Газневида и сельджукских султанов, был завершен при власти монголов. В начале XIV в. в Средней Азии (входившей в то время в состав улуса Чагатай) была проведена реформа монетной и весовой системы. Уже сам характер монетно-весовой системы показывает, что лица, создавшие ее, обладали значительными познаниями в математике. Это свидетельствует о том, что среднеазиатская научная традиция все же в какой-то мере продолжала существовать.

До второго десятилетия XIV в. в Средней Азии существовала сложная правительственная система. Положение начало изменяться лишь в царствование Кебек-хана (1318—1326), когда была установлена единая

ханская власть. Во второй половине XIV в. происходил процесс некоторого сращивания монголов с местным населением. Монголы, оседая среди значительно более культурного тюркоязычного населения, постепенно начали сливаться с автохтонами. Одновременно наблюдалось и ослабление центральной власти за счет растущего могущества отдельных феодалов.

Феодалной раздробленностью Мавераннахра воспользовался один из эмиров — Тимур (Тамерлан). В 1366 г. он начал захватывать мелкие феодальные владения своих соседей, а к 1370 г. весь Мавераннахр уже был под его властью. В 1388 г. Тимур захватил Хорезм. К этому времени уже почти все среднеазиатские земли входили в состав его владений. Затем он разгромил сельджуков и захватил их земли. Своей столицей Тимур сделал Самарканд, который, таким образом, стал столицей огромного государства, объединявшего кроме Средней Азии, Иран, значительную часть Малой Азии и северную Индию.

Однако эта империя продолжала оставаться феодальным образованием и ненадолго пережила своего властелина. С 1405 по 1409 г. продолжались войны между потомками Тимура и подчинявшимися ему эмирами. Только в 1409 г. удалось создать в некотором смысле единую монархию с двумя центрами — в Герате и Самарканде. Во главе первого был сын Тимура Шахрух (1409—1447), а второго — сын Шахруха Улугбек, один из наиболее выдающихся среднеазиатских ученых.

Мухаммед Тарагай Улугбек родился в 1394 г. Правление его не славилось особенными военными победами, но зато составило эпоху в восстановлении среднеазиатской культуры и в дальнейшем ее развитии. Роль Улугбека как крупного, по тому времени, ученого и организатора науки и культуры трудно переоценить. Он построил три медресе — в Самарканде, Бухаре и Гиздуване. Есть сведения, что в Самаркандском медресе, которое было закончено в 1420 г., в числе других наук преподавалась и астрономия.

Улугбек был представителем нового типа ученого — ученого-специалиста. Всю свою научную деятельность он посвятил астрономии. Математическими вычислениями он занимался лишь постольку, поскольку они были нужны ему для астрономии. При нем в Самарканде была построена знаменитая обсерватория (обсерватория Улугбека). Это было трехэтажное высокое круглое в плане здание. Остатки основной конструкции его — гигантского секстанта Фахри — сохранились до наших дней. Самарканд времени Улугбека стал виднейшим центром науки и искусства. Здесь жили и творили астрономы, математики, историки, географы, философы, художники и поэты. Ко времени Улугбека относится и развитие самаркандской школы миниатюрной живописи. Однако реакционные круги высшего духовенства и знати видели в Улугбеке враждебную силу, которая могла подорвать влияние ислама. И 27 октября 1449 г. по их указке Улугбек был убит.

Из сохранившихся трудов Улугбека с точки зрения истории математики представляют интерес астрономические таблицы, составленные на основании наблюдений Улугбека и его учеников и помощников,

географические таблицы, таблицы летоисчисления и тригонометрические таблицы.

Выполнение всех этих работ требовало глубоких знаний математики и умения применять методы вычислений. «Так как,— пишет Улугбек,— построение таблиц для дробных частей градуса потребовало бы слишком много труда, то столбец с вводными (начальными) цифрами располагается в такой последовательности, которая более всего соответствует каждому объекту, и против каждого числа помещаются пропорциональные им части. Если после этого мы хотим найти пропорциональную часть какого-нибудь (промежуточного) числа, не вошедшего в столбец с начальными (основными) числами, то мы выбираем в этом столбце два других числа таким образом, чтобы первое из них было меньше искомого числа, а второе — больше его; затем мы находим разность между пропорциональными частями, соответствующими этим двум числам; мы умножаем эту разность на разность первого из двух вводных (начальных) основных чисел и искомого числа и произведение делим на разность двух вводных чисел; частное мы прибавляем к пропорциональной части меньшего числа, если пропорциональные числа расположены в восходящем порядке, в противном случае, чтобы найти (соответствующую) пропорциональную часть искомого числа, мы производим вычитание...»¹⁵

Точность этих таблиц весьма высока. Например:

в таблицах Улугбека				в современных таблицах			
α	$\sin \alpha$			α	$\sin \alpha$		
20	0.342	020	142	20	0.342	020	143
23	0.390	731	129	23	0.390	731	128
26	0.438	371	147	26	0.438	371	147

Из ученых, работавших вместе с Улугбеком, наибольшей известностью пользовался Гиясаддин Джамшид ибн Масуд ал-Каши, уроженец Кашана (Иран; род. в третьей четверти XIV в., ум. в 1429 г.). Он занимался математикой и астрономией. Из математических его сочинений прославился «Ключ к арифметике», представляющий собой наиболее полное руководство по арифметике и другим разделам элементарной математики. Сочинение состоит из пяти книг: об арифметике целых, об арифметике дробей, об исчислении астрономов, об измерении и о нахождении неизвестных.

В первой книге, в главе «Об определении основания степени», ал-Каши дает правило извлечения корня любой степени из целых чисел и поясняет его на примере извлечения корня пятой степени.

¹⁵ Т. Н. К а р ы - Н и я з о в. Астрономическая школа Улугбека. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 144.

Корень $\sqrt[n]{a^n + r}$ он приравнивает приближенному выражению $a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$, которым и пользуется при вычислении корней, и получает

$$\sqrt[5]{44\,240\,899\,506\,197} \simeq 536 \frac{21}{414\,237\,740\,281}.$$

Для более точного вычисления иррационального корня ал-Каши умножает его и одновременно делит на некоторую степень 10:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{2k}N}}{10^k}.$$

Для приближенного вычисления дробной части иррационального корня он пользуется правилом возведения двучлена (бинома) в любую степень. Ал-Каши составил таблицу биномиальных коэффициентов:

9							
36	8						
84	28	7					
126	56	21	6				
126	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

Формула, которой он при этом пользовался, в современных обозначениях имеет вид

$$(a+b)^n - a^n = C'_n a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

и для $b = 1$

$$(a+1)^n - a^n = C'_n a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \dots + 1.$$

Во второй книге изложена теория десятичных дробей.

Четвертая книга трактата посвящена измерениям геометрических фигур и тел. При вычислениях ал-Каши пользуется не только алгебраическими, но и геометрическими формулами. Как известно, у средневековых арабоязычных математиков тригонометрия, в сущности, являлась подсобной наукой, вернее собранием правил, применяемых при астрономических вычислениях, а также в вычислениях, связанных с гномоникой. Ал-Каши применяет тригонометрию в практических целях. Так, при вычислении площади треугольника он пользовался формулой радиуса вписанного круга:

$$r = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c}.$$

Умножая радиус на полупериметр, получал искомую формулу:

$$S = \frac{r(a + b + c)}{2}.$$

Вычислял также объемы некоторых тел. В приложенной таблице даны характеристики пяти правильных тел. Кроме того, ал-Каши выполнил ряд сложных геометрических расчетов и построений некоторых архитектурных конструкций.

Содержание последней, пятой, части трактата относится к алгебре и к теории пропорций. Рассмотрены действия с многочленами, решение линейных уравнений с помощью «правила двух ложных положений», приведены формулы для суммы членов числовых рядов.

Энциклопедическая работа ал-Каши играла значительную роль в развитии математики в арабоязычных странах в течение сотен лет. Литографированное издание «Ключа к арифметике» было выпущено в Тегеране в 1889 г.

Второе математическое сочинение — «Трактат об окружности» ал-Каши написал на арабском языке около 1424 г. Содержанием его является вычисление значения числа π . Постановка задачи следующая: необходимо выразить длину окружности через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в вычислении длины окружности, диаметр которой равен 600 000 диаметрам Земли, не превышала толщины конского волоса. При определении длины окружности ал-Каши пользуется методом вычисления длин последовательности хорд $c_1, c_2, \dots, c_n$ для дуг в $120, 150, 165, 172,5^\circ, \dots$, т. е. для дуг, выражаемых общей формулой

$$\alpha_n = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^{n-1}}.$$

Но по теореме Пифагора

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2}.$$

Таким образом, с помощью этой последовательности хорд можно вычислить последовательность сторон вписанных многоугольников, ибо сторона a_n правильного вписанного в круг многоугольника и является хордой дополнения дуги α_n до 180° .

В результате серии вычислений ал-Каши получает значение 2π , которое переводит в десятичную дробь с 16 знаками:

$$2\pi = 6,283\,185\,307\,179\,5865.$$

«Трактат о хорде и синусе» известен в изложении Мирима Челеби (в его комментариях к астрономическим таблицам Улугбека). В нем ал-Каши решает задачу определения $\sin 1^\circ$ по известному $\sin 3^\circ$ и сводит ее к решению кубического уравнения

$$x^3 + Q = Px,$$

где

$$Q = \frac{r^2}{4} \sin 3^\circ \text{ и } P = \frac{3r^2}{4},$$

с помощью следующего итерационного приема.

Пусть P и Q — положительные числа и P значительно больше Q . Следовательно, x^3 , чтобы удовлетворить уравнению, должен быть соответственно меньше Q . Тогда $x = \frac{Q + x^3}{P}$ и $x \sim \frac{Q}{P}$. Обозначим: a — частное, R — остаток. Получим

$$Q = aP + R.$$

При этом точное значение $x = a + \beta$ больше a . Тогда

$$a + \beta = \frac{Q + (a + \beta)^3}{P} = a + \frac{R + (a + \beta)^3}{P} \sim a + \frac{R + a^3}{P}.$$

Обозначим далее: b — частное $\frac{R + a^3}{P}$, S — остаток. Тогда, полагая $x = a + b + \gamma$, получим

$$\begin{aligned} a + b + \gamma &= \frac{Q + (a + b + \gamma)^3}{P} = a + \frac{R + (a + b + \gamma)^3}{P} = \\ &= a + b + \frac{S - a^3 + (a + b + \gamma)^3}{P} \sim a + b + \frac{S + (a + b)^3 - a^3}{P}. \end{aligned}$$

Решение продолжаем этим способом до получения требуемой степени точности ¹⁶.

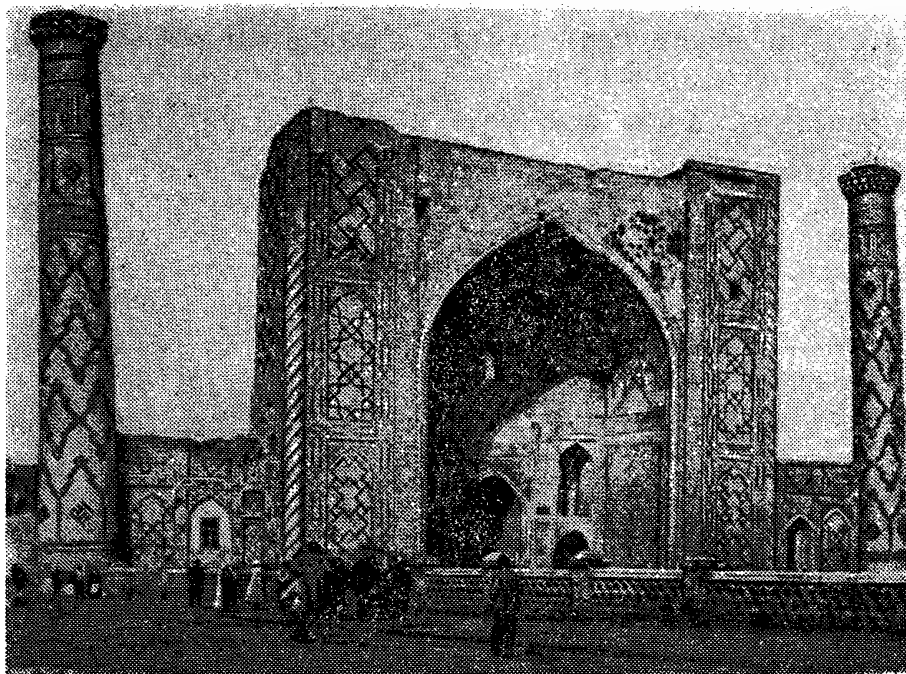
Наиболее известными астрономическими работами ал-Каши являются: «Усовершенствованные Ильханские таблицы хакаана» (написаны на таджикском языке, 1413—1414 гг.), «Лестница небес» (об измерении небесных тел, на арабском языке), «Услада прекрасных садов» (описывается изобретенный им астрономический инструмент).

В деятельности ал-Каши ярко выражена его заинтересованность инженерным делом, чего не было у других ученых Средней Азии. Об этом свидетельствуют его изобретения астрономических инструментов и расчеты архитектурных конструкций. Представляется совершенно определенным, что именно ал-Каши принадлежала основная роль при выполнении сооружений Улугбека.

Значительную роль в группе ученых, работавших с Улугбеком, играл его учитель Салахаддин Муса ибн Мухаммед ибн Махмуд Казизаде ар-Руми (1360—ок. 1437). Он родился в Малой Азии, по-видимому, греческого происхождения, жил и работал в Самарканде. После смерти ал-Каши руководил астрономическими наблюдениями. Ему принадлежат следующие работы: «Трактат об арифметике» (написан на арабском языке), геометрическая работа «Комментарий к „Основам фигур“» Шамсадина ас-Самарканди и «Трактат о синусе», в основу которого положен метод ал-Каши.

Остальные работы ар-Руми относятся к астрономии. Он написал, в частности, комментарий к «Сущности астрономии» Махмуда ибн Мухаммеда ал-Чагмини, долгое время служивший руководством для изучения астрономии.

¹⁶ M. C a n t o r. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd 1, S. 782—783.



Медресе Улугбека.

Большую известность приобрел на Востоке ученик Улугбека и ар-Руми — Алааддин Али ибн Мухаммед Кушчи (последние годы XIV в. — 1474). Его называли Птолемеем своего времени. Он родился в Самарканде. После смерти Улугбека переселился в Стамбул.

Из работ Кушчи известны: «Трактат по арифметике», посвященный индийской математике (написан на таджикском языке), «Трактат Мухаммедия», посвященный арифметике и алгебре (написан на таджикском языке и самим автором переведен на арабский язык), «Трактат о решении лунообразной фигуры», а также ряд астрономических трактатов и комментариев.

Кроме названных выше в обсерватории Улугбека работало много других-ученых астрономов. Абдаллах ибн Мухаммед ибн Хусейн Бирджанди написал ряд астрономических трактатов, в частности составил комментарии к астрономическим таблицам Улугбека. Внук и ученик ар-Руми — Мирим Челеби (первая половина XV в. — 1524) также составил комментарий к этим таблицам. Ему принадлежит «Полный трактат о синусе» и ряд других сочинений.

Как уже отмечалось, после убийства Улугбека его ученики и помощники, спасаясь от преследований, бежали в Азербайджан, Иран и Турцию, унося с собой не только знания, но и значительное количество ценнейших научных трудов. Самаркандское медресе Улугбека превратилось в простую духовную школу, астрономическая же обсерватория была разрушена настолько, что уже через несколько поколений у жителей Самарканда не осталось даже памяти о ней. Так Самарканд был низведен с пьедестала одного из наиболее крупных научно-культурных центров Средней Азии.

Культурное развитие Средней Азии в XVI—XVIII вв. Уровень математических знаний

В XVI в. ссоры между Тимуридами, выражавшиеся в феодальных войнах, не прекращались. Этим воспользовались узбекские ханы, которые еще во второй половине XV в. начали завоевание орошаемых земель. В 90-х годах столетия узбекский хан Шейбани закрепился в низовьях Сыр-Дарьи, а в 1500 г. овладел Самаркандом, Бухарой, Ташкентом, Ферганой и другими городами. К 1507 г. вся Средняя Азия, включая область Герата, была уже во власти узбекского хана. Независимым остался лишь Хорезм, хотя в нем утвердился династия также узбекского происхождения. Хорасанские владения тимуридов были захвачены Ираном.

В XVI в. Средняя Азия находилась под властью двух узбекских династий, правивших в Бухаре и Хиве. На севере к Бухарскому и Хивинскому ханствам примыкали земли, в которых кочевали казахи и каракалпаки; с северо-востока начали проникать в области Ферганы и Кашгара киргизы. Значительное большинство туркменских племен, частью оседлых, частью кочевых, находилось под властью Хивы. Основное же население составляли ираноязычные таджики и тюркоязычные узбеки. К этому же периоду относится начало торговых и дипломатических связей среднеазиатских ханств с Московским государством. В 1558 г. Иван IV направил ханам письмо, в ответ на которое в Москву прибыли хивинское и бухарское посольства. А в XVII в. «размеры торговых оборотов между Средней Азией и Московским государством были довольно значительны. По имеющимся приблизительным подсчетам, общий оборот торговли между названными странами выражался в сумме около 100 000 руб. ежегодно, что составляло около $\frac{1}{5}$ части основной заграничной торговли Московского государства через Архангельский порт»¹⁷.

Внутренняя жизнь обоих среднеазиатских ханств в XVII в. характеризуется развитием феодальных взаимоотношений, в результате чего правившая в Бухаре династия потомков астраханских ханов к концу столетия уже не имела реальной власти. Подобное явление происходило и в Хиве. Процесс этот продолжался приблизительно до середины XVIII в. К середине же столетия относится возникновение в области Ферганы третьего крупного государственного образования в Средней Азии — Кокандского ханства. Впрочем, кроме трех феодальных монархий в XVIII в. в Средней Азии существовали и более мелкие княжества.

Во второй половине XVI в. культурным центром Средней Азии

¹⁷ П. П. Иванов. Очерки по истории Средней Азии. Изд-во восточной литературы, М., 1958, стр. 78.

становится столица узбекских ханов — Бухара. Изменяется и направленность культуры. Ее создают уже не астрономы, математики и естествоиспытатели, а богословы, философы и литераторы. Одной из основных причин такой направленности среднеазиатской культуры был затянувшийся феодализм, который из прогрессивного в свое время превратился в регрессивный хозяйственный уклад, потерявший возможность дальнейшего развития. Определенную и весьма существенную роль сыграло также мусульманское духовенство, разгромившее «еретиков» и проводившее в Средней Азии (да и вообще в исламских странах) политику своего рода контрреформации.

Немаловажную роль в этом сыграло еще одно обстоятельство. Географические открытия и освоение новых морских путей в конце XV—XVI вв. отразились на хозяйственной жизни Средней Азии. Она мало-помалу сходит со сцены как основной узел караванных путей, связывавших Запад с Востоком. Падение удельного веса торговли вызвало, в свою очередь, снижение роли ремесла, работавшего на экспорт. Средняя Азия в определенной степени начала возвращаться к натуральному хозяйству, и важнейший культурный центр Востока к XVIII в. начал терять свое прежнее значение. Впрочем, как центр религиозного просвещения Бухара еще долго продолжала сохранять свое влияние.

Однако едва ли будет справедливым говорить о полном отсутствии математической культуры в Средней Азии XVI—XVIII вв. Для поддержания в рабочем состоянии весьма сложной оросительной системы, для проведения новых каналов и для перераспределения земель, годных для сельскохозяйственной обработки, требовались и математические и астрономические знания. Их получали путем изучения трудов и учебных трактатов древних ученых. Доказательством этому служат рукописи сочинений классиков, переписанные в XVI и XVII вв. Известно также, что архитекторы Бухары продолжали самаркандскую традицию, требовавшую для выполнения идеи зодчего значительных математических познаний.

Что же представляла собой школьная математика в Средней Азии в XVI—XVIII вв.? Насколько можно судить по имеющимся данным, в тех медресе, где математика вообще преподавалась, она составляла более или менее подробный курс арифметики с некоторыми начатками геометрии. Сохранилась рукопись¹⁸ учебника на персидском языке, найденная в 1947 г. научной краеведческой экспедицией Кара-Калпакской АССР. Она датирована 1806 г., и, следовательно, по ней в некоторой степени можно судить об уровне преподавания математики в медресе во второй половине XVIII в. Это краткий учебник арифметики с приложением некоторых геометрических сведений. Начинается он определением арифметических действий, автор насчитывает их шесть — удвоение, раздвоение, сложение, умножение, деление, извлечение квадратного корня.

¹⁸ А. А. Х а л и л о в. Математическое наследие среднеазиатских народов. — В кн.: Труды Туркменского пединститута. Вып. 6. № 5. Чарджоу, 1959.

Сначала изучали удвоение: записывали в столбец единицы и числа, кратные 2, до определенного предела, затем — раздвоение. Записывали это следующим образом:

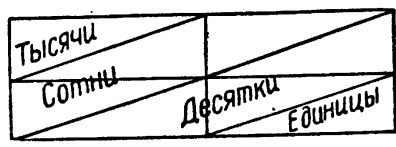
1
 2
 4
 8
 16
 ...
 1024

 1024
 512
 ...
 2
 1

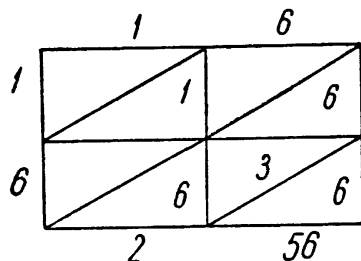
После раздвоения проходили сложение, а затем — умножение. Таблица умножения начиналась с 3×3 и кончалась на 8×9 (умножение 9×9 проходили позднее). Она имела следующий вид:

9	8	7	6	5	4	3
$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{9}$
9	8	7	6	5	4	
$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{16}$	
.....						
9	8					
$\frac{8}{72}$	$\frac{8}{64}$					

Действие умножения включало также возведение в степень. Способ умножения отличался от принятого в настоящее время. Так, для того чтобы умножить два числа, их записывали около левой и верхней сторон прямоугольника, который делили горизонтальными и вертикальными чертами на несколько меньших прямоугольников, в зависимости от числа разрядов. Полученные меньшие прямоугольники делили пополам диагоналями. Результат умножения записывали внутри прямоугольника, например:



При умножении 16 на 16 действие принимало следующую форму:



$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 1 \quad (\text{сотня}) \\ 6 \times 10 &= 6 \quad (\text{десятков}) \\ 6 \times 10 &= 6 \quad (\text{десятков}) \\ 6 \times 6 &= 36 \end{aligned}$$

Имел свои особенности и алгоритм деления. Знаки действий автор рукописи не применяет.

Существовало два способа извлечения квадратного корня. Для проверки правильности действия рекомендовалось умножить полученное число само на себя, а затем прибавить остаток. Сравним первый способ с современной формой записи:

в записи рукописи

0	
1	0
	1
3	
3	

в современной записи

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= 3 \\ 3 \cdot 3 &= 9; 9 + 1 = 10 \end{aligned}$$

6			
.			
4			
4	0	9	6
	4		
1	2	4	

$$\sqrt{40'96} = 64$$

$$\begin{array}{r} 124 \overline{) 496} \\ 4 \overline{) 496} \end{array}$$

Пример извлечения квадратного корня из 65536 по второму способу:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 45 \\ 65536 \quad 2 \quad 10 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \overline{4} \quad 55 [\sqrt{65536} = 256] \\ 2 \quad 56 \\ \hline 24536 \\ 10 \\ \hline 55 \end{array}$$

После изучения извлечения квадратного корня переходили к определению площадей треугольников по формуле Герона. Разумеется, и эта формула давалась в чисто рецептурном виде. Затем решали еще несколько занимательных задач. Этим и исчерпывается все содержание рукописи.

Однако в рассмотренной рукописи представлены не все математические знания, сообщавшиеся в медресе. Известно, например, что в медресе изучался трактат «Фараиз», содержащий решение различных задач на раздел наследства. Есть сведения, что автором трактата был ал-Хорезми. Насколько можно судить по конспекту, обучение носило рецептурный характер и не включало никаких методов для развития самостоятельного мышления учащихся.

□

Математика у народов Средней Азии имеет длинную и яркую историю. Прямые источники, по которым можно было бы судить о развитии математики в доарабское время, до нас не дошли, однако косвенные источники указывают на существование довольно древней математической традиции, развивавшейся во взаимовлиянии с культурами Востока, Египта, Месопотамии, Индии и Китая, а также с эллинистической культурой Средиземноморья.

Начиная с VIII в. математика становится одной из наиболее важных наук в арабоязычных странах. В ее развитии наиболее значительную роль сыграли среднеазиатские и, несколько позже, азербайджанские ученые. Однако развитие математики и математических знаний в Средней Азии не представляет собой один непрерывный процесс. Географическое положение этих стран, благоприятное для торгово-культурного обмена между Востоком и Западом, в то же время было причиной нападения бесчисленных кочевых орд, двигавшихся с северо-востока на юго-запад. Во время непрерывных войн с кочевниками, а также междоусобных войн местных феодалов неоднократно уничтожались огромные культурные ценности и народам приходилось заново строить свою жизнь и создавать свою культуру. Достойно удивления, что, несмотря на тяжелые испытания, среднеазиатские народы дали таких выдающихся мыслителей, как ал-Хорезми, ал-Бируни, Омар Хайям, Улугбек и многие другие. Однако условия феодализма с XVI в. оказались губительными для дальнейшего развития математики и естественных наук. И вплоть до XIX в. преподаватели медресе и отдельные любители наук в лучшем случае занимались переписыванием древних трактатов. Преподавание математики в Средней Азии до XVII в. находилось примерно на уровне преподавания в школах других стран. Однако отсутствие самостоятельной научной работы в области математики на протяжении более чем трех столетий привело и преподавание ее к деградации: уровень преподавания в конце XVIII в. был уже не сравним с уровнем преподавания в России и странах Запада в этот период и, повидимому, даже ниже, чем в XVII в.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ЗАКАВКАЗЬЕ

1

Исторические пути народов Закавказья

Подобно Средней Азии, Закавказье в древности входило в сферу влияния великих средиземноморских культур — Египта, Месопотамии и Греции. Однако между ними было и существенное различие. Средняя Азия расположена на перекрестке всех военных и торговых дорог, связывавших Средиземноморье со Средним и Дальним Востоком и с Севером. Закавказье же, расположенное у естественной границы — Кавказского хребта, — было тупиком. И только Азербайджан благодаря своему географическому положению был тесно связан со Средней Азией, чем и объясняется близкое родство их культур.

Наиболее древним из государственных образований Закавказья является рабовладельческое государство халдов Урарту, расцвет которого относится к XIV—VI вв. до н. э. Приблизительно в VI в. до н. э. на исторической арене появляются армяне, иберы (предки грузин) и албаны (предки азербайджанцев). Около III в. н. э. в Закавказье начинает проникать христианство. В IV в. оно становится господствующей религией во всех трех государственных образованиях, не имевших ни четких границ, ни какого-либо стабильного состава населения. Постоянная борьба между Римом (с V в. — Византией) и Парфией за захват этих государств, сопровождавшаяся ожесточенным сопротивлением армян, грузин и албанов, а также междоусобные войны непрерывно изменяли границы отдельных царств, а иногда и еще больше дробили их. Последнему способствовало и начавшееся внутри рабовладельческого общества развитие феодальных отношений.

В 428 г. Армянское царство подпало под владычество Персии. В конце столетия та же участь постигла Албанию (так называлась северная часть современного Азербайджана), а в первой половине VI в. — Грузию. Так полтора-два столетия все Закавказье находилось под властью империи Сасанидов.

Таким образом, в течение первых четырех столетий нашей эры культура народов Закавказья развивалась под сильным влиянием соседних стран. Грузия и Армения находились под влиянием византий-

ской культуры (сохраняя все же черты национальной самобытности), Албания — преимущественно иранской. В начале V в. епископ Месроп Маштоц создал армянский алфавит. Несколько позже появились грузинский и албанский алфавиты — возникла национальная письменность.

Письменные источники, по которым можно было бы судить о математических знаниях народов Закавказья до арабского завоевания, не сохранились. Но существуют косвенные доказательства их значительности. Сохранившиеся памятники архитектуры и фрагменты предметов материальной культуры свидетельствуют о том, что математические знания народов Закавказья в рассматриваемый период были на уровне практической геометрии и некоторых сведений из арифметики. Многие уроженцы Закавказья, однако, учились в византийских университетах и внесли значительный вклад в создание византийской культуры.

От доарабского периода сохранились лишь фрагменты рукописей, главным образом религиозного содержания. Однако до нас дошли копии этих рукописей, по ним можно судить о развитии феодальных культур народов Закавказья в V—VII вв. н. э. Сводное сочинение по истории Армении знаменитого историка Мовсеса Хоренаци (V в.) уже само по себе указывает на существование в Армении научной литературы и до этого времени. К VII в. относятся жизнь и деятельность ученого-энциклопедиста Анании Ширакаци. Была историческая литература также у грузин и албанов.

Впервые арабские завоеватели вторглись в пределы Армении в 640 г.: они захватили и разграбили столицу Армении Двин. Полностью овладеть Закавказьем арабам удалось лишь в начале VIII в., так как армяне, грузины и албаны оказывали им упорное сопротивление. Это сопротивление не прекратилось и после окончательного завоевания. Большинство албанов приняло ислам лишь в X в., а грузины и армяне сумели сохранить христианство в своих национальных формах.

Сельское хозяйство, основа экономики, начало приходить в упадок. Пособы и налоги, которые платили крестьяне своим феодалам, теперь увеличились за счет податей наместникам и чиновникам халифата. Как и народы Средней Азии, народы Закавказья восставали: одновременно с восстанием Муканны в 774—775 гг. произошло восстание крестьян и горожан Армении. Крестьянская война в южном Азербайджане, возглавленная Бабеком (первая половина IX в.), происходила уже под социальными лозунгами. Она распространилась на значительную часть Ирана и Закавказья и была подавлена халифатом с большим трудом.

Приблизительно в первой половине IX в. страны Ближнего Востока и Средней Азии вступили в полосу развитого феодализма. В Закавказье в это время возникает целый ряд крупных самостоятельных и зависимых царств, княжеств и эмиратов с еще более неустойчивыми границами, чем у древних царств. В IX—X вв. наблюдается значительный рост городов, в которых концентрируется ремесло

и торговля: Ани, Арци, Двин в Армении, Артануджа и Тбилиси в Грузии, Бердаа, Гянджа в Азербайджане и др. К этому времени относится и начало торговых взаимоотношений народов Закавказья с Русью.

Освобождение закавказских народов от власти халифата было лишь кратковременной передышкой в их борьбе с завоевателями. В начале XI в. Армению захватила Византия. Несколько позже начались вторжения на территорию Закавказья сельджуков, которые к 1080 г. овладели Азербайджаном, значительной частью Армении и восточной Грузией.

Борьбу за освобождение от сельджукских поработителей начали грузины. В течение первой четверти XII в. Грузия была очищена от сельджуков. Несколько позже от них освободился Ширван (северный Азербайджан), а в начале XIII в. объединенными усилиями грузин и армян была освобождена северная Армения.

В XII—XIII вв. наблюдается развитие экономики стран Закавказья. Этому способствовал начавшийся в Грузии и Азербайджане процесс усиления централизации власти. Организуются оросительные работы, появляются объединения купцов и ремесленников, усиливаются связи с Русью.

В X—XI вв. в Грузии и Армении строилось много культовых зданий. К этому времени относится создание национальных стилей в архитектуре. Начала развиваться и светская культура. Нападение сельджуков затормозило этот процесс, но после освобождения он возобновился и усилился. В школах и академиях Грузии и Армении наряду с богословием начали преподавать математику и космографию, появились литературные и исторические произведения. К концу XII — началу XIII в. относится творчество величайшего грузинского поэта Шота Руставели. Его старший современник Низами Гянджеви, писавший на фарси, создал ряд глубоких по своему философскому содержанию поэм. Дело в том, что Азербайджан в политическом отношении в те времена был связан со Средней Азией и Ираном, чему способствовала общность религии. Поэтому азербайджанские ученые писали на фарси и на арабском языке, хотя основное население страны было тюркоязычным. Между всеми же тремя крупнейшими народами Закавказья — грузинами, армянами и азербайджанцами — существовали тогда экономические и культурные связи.

Монгольские завоеватели, разрушившие цветущие культуры Средней Азии, не пощадили и Закавказья. Несмотря на отчаянное сопротивление закавказских народов, к середине XIII в. Азербайджан, Армения и часть Грузии были захвачены монголами. Часть Грузии, сохранившая независимость, платила монгольским ханам большую дань. Начавшийся в Закавказье процесс национальной консолидации замедлился и уступил место вновь растущей феодальной раздробленности, в которой были заинтересованы как завоеватели, так и более мощные соседи. Последним обстоятельством и объясняется затянутость периода феодальной раздробленности в Закавказье по сравнению с другими странами.

На рубеже XIV и XV вв. Грузия, Азербайджан и Армения были завоеваны Тимуром. После распада его империи Азербайджан попал под власть огузов, независимость сохранил лишь Ширван. Грузия платила огузам дань. Армения, еще не оправившаяся после нападения Тимура и вновь разорявшаяся бесконечными наездами огузов и других кочевников, потеряла часть своего населения за счет увода в плен и эмиграции. Естественно, что эти трудные годы отразились и на развитии культуры. Однако уже с конца XIII в. намечается постепенное оживление культурной жизни. К XIII в. относится творчество крупнейшего армянского поэта Фрика, писавшего на народном языке и отразившего в своих произведениях протест против социального и имущественного неравенства. Тогда же писали на народном языке и поэты Азербайджана. Таким образом, тяжелые годы, перенесенные народами Закавказья, стимулировали рост национального самосознания. В связи с необходимостью восстановления хозяйства после монгольского нашествия возникла потребность и в точных науках. Появились сочинения по математике и механике, были переведены на армянский язык труды Евклида. Натурфилософией занимались крупнейшие армянские ученые: Ованес Софист, Вартан Великий, Ованес Воротнеци и Ованес Ерзинкаци. Последний высказал мысли о шарообразности Земли, о вращении небесных светил, об изменении, которому подвержено все существующее. «Изменение, — говорил он, — есть не что иное, как уничтожение, уничтожение вида. Так, соль под воздействием земли и воды изменяет свой вид — уничтожается... На наших глазах соль на огне превращается в нечто другое и растворяется в воздухе. То же самое происходит и с другими предметами, когда они уничтожаются как виды. Однако вещество как таковое, материя никогда не уничтожается»¹.

XV век принес Армении новые испытания: османская Турция обратила внимание на свои северные границы. Одновременно восточные армянские земли начала захватывать усилившаяся Персия. По договору 1555 г. Турция и Персия разделили между собой Грузию. Под властью Персии оказался также Азербайджан. Таким образом, в течение XVI—XVII вв. борьба за владение Закавказьем шла в основном между двумя империями. Остатки армянской государственности в виде отдельных феодальных владений постепенно перешли во владение кочевых туркменских и курдских ханов. Правители царств и самостоятельных княжеств Грузии старались улаживать свои отношения с Персией и Турцией, вступая в ленные отношения то с султаном, то с шахиншахом, что им не всегда удавалось. Во всем Закавказье господствующими были отношения развитого феодализма, а основным производителем — крепостной крестьянин, зачастую лишенный и личной свободы. Значительное развитие ремесла и торговли наблюдалось в Азербайджане, через который проходили караванные пути на Север.

В XVI и XVII вв. развивались экономические и культурные

¹ В. К. Ч а л о я н. Армянский ренессанс. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 116.

связи Закавказья с русскими землями. С XIV в. центром армянских колоний становится Львов, где армяне даже получают права самоуправления. До 150 тыс. армян переселились в Крым и в страны Западной Европы. Значительные армянские колонии осели в Астрахани и Москве. В 1564 г. Иван Грозный принял под свое покровительство кахетинского царя Левана II, а в 1587 г. Кахетия присоединилась к России, принеся присягу Федору Иоановичу. Однако Россия не могла тогда оказать достаточную помощь закавказским народам против их южных завоевателей, поэтому борьба их за национальное освобождение продолжалась еще два столетия.

Длительный мир (1639—1722 гг.) между Персией и Турцией в некоторой степени обусловил развитие городов и сельского хозяйства в Азербайджане и Армении. «В XVII в. исчезают следы рабовладельческого уклада, сохраняется лишь домашнее рабство... Государство покровительствует крупной оптовой торговле, представляет налоговый иммунитет ряду городов, привилегии английским, голландским и французским купцам и католическим миссионерам». Однако «начиная с последней четверти XVII в. заметно наступление хозяйственного упадка стран Закавказья, как и всех других стран Передней и Средней Азии. Одной из причин этого был трактованный в исторической литературе процесс перемещения главных путей европейско-азиатской торговли в результате освоения в XVII в. европейцами морского пути вокруг Африки, открытого еще Васко да Гама. Сухопутные караванные пути, пролежавшие через страны Передней Азии, в частности и через страны Закавказья, утратили теперь прежнее значение, посредническая торговля закавказских городов сократилась»². Вследствие этого увеличилось ограбление крестьянства со стороны государства и феодальной знати. Положение крестьян было настолько тяжелым, что уже в первые годы XVIII в. в странах Закавказья начались стихийные восстания крестьян и ремесленников, принявшие форму борьбы за национальное освобождение. В числе лозунгов, под которыми проходили восстания в Грузии, начавшиеся в 1721 г., и армянское восстание 1722—1730 гг., были призывы к соединению с Россией. Напомним, что еще при Петре I были установлены дипломатические отношения значительной части Грузии с Россией и многие грузины были приняты на русскую службу.

По Константинопольскому трактату 1724 г. Закавказье было разделено на две части. К России отошел северный Азербайджан с городом Баку. Остальную территорию оккупировала Турция. В 1736 г. Закавказье вновь было подчинено Персией. Грабительская политика турецкого султана сменилась не менее грабительской политикой персидского шаха. Только во второй половине XVIII в., когда владычество Персии фактически пало, в Закавказье начался медленный хозяйственный подъем. Однако ему мешало как постоянное стремление Турции и Персии восстановить утраченные позиции, так и феодальная раздроб-

² И. П. Петрушевский. Очерк по истории феодальных отношений в Азербайджане и Армении в XVI — начале XIX в. Изд-во ЛГУ, 1949, стр. 83.

ленность самого Закавказья. В конце XVIII в. оно распалось более чем на 20 ханств, царств и княжеств, из которых многие в свою очередь имели вассальные султанства и княжества. Только присоединение к России (в первой половине XIX в.) восстановило экономику Закавказья и спасло его народы от национального уничтожения.

2

Математика в Азербайджане

На территории Азербайджана есть много памятников культуры эпохи первобытнообщинного строя. Наиболее ранним политическим образованием при переходе к рабовладельческому строю было государство Манна (области южнее оз. Урмия). Оно возникло в IX в. до н. э.

В IX и VIII вв. до н. э. Ассирия и Урарту не раз воевали с Манна. Например, ассирийские летописи отмечают за 810—777 гг. до н. э. 14 походов на государство Манна. Сохранившиеся данные об этих войнах позволяют сделать вывод о значительном экономическом и культурном развитии областей, входивших в государство Манна. В Манна хорошо было поставлено земледелие и скотоводство, добывались и обрабатывались металлы (медь, железо, серебро), изготавливалась бронза, было развито керамическое ремесло, значительного уровня достигла строительная техника. По косвенным данным можно заключить о наличии в нем письменности. Однако прямых сведений об уровне знаний в области математики и астрономии в Манна нет, и мы даем эту краткую справку об этом государстве потому, что она все же позволяет, разумеется, на основании аналогии, представить, каким могло быть культурное наследие, в известной мере перешедшее от Манна к возникшим после его распада в VII в. до н. э. новым государственными образованиям. Первым среди них по времени была Мидия (VII—VI вв. до н. э.).

После падения Мидии почти вся территория Азербайджана вошла в состав Персии. Персия же пала под ударами Македонии. Наследницей ее была весьма недолговечная империя Александра Македонского, а после распада ее на ряд государств на территории Азербайджана, в южной его части, образовалось новое эллинистическое государство — Атропатена. Позднее оно вошло в состав Парфии. В северной же части современного Азербайджана, которую, как упоминалось выше, тогда называли Албанией, примерно во II в. до н. э. — IV в. н. э. тоже зародилась государственность, однако в ней устойчивость надплеменных объединений в первые века в общем была еще слабой. Албанию нельзя отнести к эллинистическим государствам, хотя ее связи с миром эллинизма, а затем с Римской империей были весьма многообразны.

Относительно Атропатены и Албании мы также не располагаем письменными данными из области науки, поэтому судить об уровне их культуры можно только на основании аналогий. В III—IV в. н. э.

в Албании и Атропатене начинают развиваться феодальные отношения. В V—VII вв. н. э. феодальный строй на территории нынешнего Азербайджана укрепляется. В этот период идет борьба против захватившей Албанию сасанидской Персии. Временами Албания достигает самостоятельности. С начала V в. н. э. она имеет свою письменность. Албанский алфавит родствен грузинскому и армянскому. В VI—VII вв. появляются школы для детей знати и духовенства, религиозные книги и исторические сочинения на албанском языке. Памятники материальной культуры свидетельствуют о значительном уровне искусства и ремесла в Албании. Какой-то составной частью всего этого была, конечно, и математическая, а также, вероятно, астрономическая культура.

В середине VII в. территория Азербайджана была завоевана арабами. В IX—XI вв. с ослаблением и распадом Арабского халифата в Азербайджане образовался ряд независимых феодальных государств, часть из которых, выдержав новое нашествие турок-сельджуков, в XII в. усилилась и выросла за счет своих соседей (например, Ширван).

В XI—XII вв. в Азербайджане временами складывались благоприятные условия для экономического и культурного развития. Достаточно было нескольких десятилетий мирной жизни, чтобы на такой территории, где проходили важные торговые пути, где были старые центры ремесла, прикладного искусства и давние культурные традиции, где можно было заниматься сельским хозяйством и добывать полезные ископаемые, создавались вновь условия для экономического и культурного развития.

В XIII—XIV вв. Азербайджан пережил ужасы монгольского нашествия. Но и в этот период в отдельных культурных центрах продолжали интересоваться наукой, в частности математикой.

Азербайджанские ученые внесли вклад в развитие таких областей знаний, как география, история, медицина, философия, астрономия и математика. Правда, нам известны только имена подавляющего большинства из них, но анализ немногих дошедших до нас работ достаточно убедительно показывает, каков был уровень математической мысли этой эпохи.

В XII в. жил астроном Фазим Фаридаддин Ширвани (из Ширвана). Он 30 лет занимался астрономией и составил ряд таблиц с данными о положении звезд. О том, что математика и астрономия входили в систему знаний, которыми должен был обладать образованный человек того времени, свидетельствуют такие факты. Известный поэт этой же эпохи Фелеки Ширвани хорошо знал астрономию, логику и другие науки. О другом выдающемся поэте — Хагани Ширвани (1120—1199) — сохранилось много биографических сведений. В частности, известно, что в число наук, которые он изучал, входила математика. Широкое образование получил и выдающийся поэт Низами Гянджеви (1141—1209).

К XIII в. относится жизнь и деятельность крупного ученого Мухаммеда Насираддина ат-Туси — математика, астронома и философа, основателя обсерватории в Мараге (1259 г.), руководителя и учи-

теля целой группы математиков и астрономов. Из последней до нас дошли имена Фахраддина Мараги и Шамсаддина Ширвани, тбилисца Фахраддина Ихлати и др. Один из учителей Насираддина ат-Туси — Шарафаддин ал-Масуди «определил девятнадцать задач, кроме известных шести, и доказал свойства определения их неизвестных в тех случаях, когда это возможно»³. Известные шесть уравнений — это уравнения видов — одно линейное и пять квадратных, рассматриваемые ал-Хорезми, а 19 задач — различные виды уравнений третьей степени. Поскольку именно 19 видов уравнений третьей степени исследованы Омаром Хайямом, то книга ал-Масуди, как предполагают исследователи творчества ал-Каши Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич, была, возможно, изложением трактата Хайяма «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

В начале XIV в. важный научный центр создается в Тавризе. Здесь был построен городок, известный под названием Дар аш-шифа (дом исцеления), с больницами, школами, обсерваторией и библиотекой. Школ было несколько, в том числе и «высшая», насчитывавшая в иные годы до 6—7 тыс. учащихся. Изучали в ней, главным образом, богословие и философские дисциплины, а также медицину, астрономию, естествознание. Из ученых тебризского круга профессиональным математиком был Убейд Табризи, известный как автор «Книги по арифметике».

Рассмотрим более подробно деятельность и работы Насираддина ат-Туси.

Мухаммед Насираддин (1201—1274) родился в Тусе (Хорасан) — в то время крупном культурном центре. В этом городе жили Фирдоуси и много учеников и последователей Ибн Сины, один из которых — Кемаладдин Мусам ибн Юнис и был учителем Насираддина. Насираддин много занимался изучением трудов греческих и восточных астрономов и математиков. Плодом этого изучения были его переводы сочинений Евклида, Птолемея, представляющие собой, скорее, критическую переработку их. Часто при переводах Насираддин вносил немало нового. Кроме того, он написал самостоятельные трактаты по астрономии, математике и философии. Свои труды Насираддин представил на рассмотрение багдадскому халифу Мустасиму. Но халиф (следует понимать — багдадские ученые) не одобрил их. Вероятно, Насираддин продолжал искать условия для работы в области астрономии. Одно время (в 50-х годах XIII в.) он был при дворе правителя Кухистана (в Иране) и главы секты ассасинов Насира. (К этому периоду относится его философское произведение «Ахлак-и Насири» — «Мораль Насира».) Но и здесь Насираддин не добился своих целей, навлек на себя немилость преемника Насира и был посажен в крепость. Освобожден был лишь при завоевании Кухистана монголами. Внук Чингис-хана — Хулагу-хан взял его к себе в советники. Когда Хулагу-хан сделал своей столицей город Марагу вблизи Тавриза, Насираддин добился отпуска средств

³ А л - К а ш и. Ключ к арифметике. Трактат об окружности. Гостехиздат, М., 1956, стр. 192.

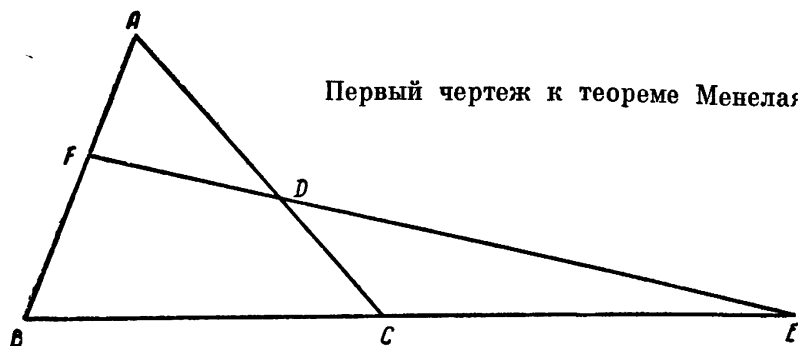
на строительство обсерватории. Марагинская обсерватория начала свою деятельность в 1259 г. и просуществовала до конца столетия. Насираддин был руководителем обсерватории и сумел привлечь к работе в ней большую группу ученых. Обсерватория была оборудована лучшими по тому времени наблюдательными приборами, наблюдения за светилами велись систематически и результаты наблюдений обрабатывались математическими методами. При обсерватории была создана богатая библиотека рукописей. В ней постоянно велись теоретические исследования, способствовавшие развитию необходимых для астрономии математических дисциплин — в первую очередь тригонометрии, а также геометрии. По-видимому, к этому периоду относятся важнейшие научные труды Насираддина — трактаты: по теории отношений и сферической тригонометрии («Шакл ал-кита»), по геометрии и астрономии.

Насираддин сочетал в себе астронома и математика, и многое в его математических исследованиях (прежде всего по тригонометрии) связано с астрономией. Поэтому общая оценка научных достижений эпохи не может быть полной без рассмотрения его астрономической деятельности⁴. Насираддин не мог работать в области астрономии, не определив своего отношения к двум основным школам, соперничавшим между собой со времен Птолемея и Гиппарха. Одну из этих школ составляли приверженцы Птолемеевой геоцентрической системы, другую — последователи Аристотеля в области физики и космологии, тоже признававшие геоцентризм. Обе школы не признавали гелиоцентрической системы, однако они отличались между собой своими принципиальными установками.

Насираддин ат-Туси должен был сделать выбор между системами Птолемея и Аристотеля. Поскольку он превосходно изучил накопленные астрономами данные и сам был астрономом-наблюдателем, то его выбор был предопределен. Он видел несогласуемость системы Аристотеля с наблюдаемыми явлениями и поэтому стал сторонником Птолемея. В «Кратком руководстве по астрономии» Насираддин изложил систему Птолемея со всеми усовершенствованиями, внесенными другими учеными и им самим. Конечно, согласовать систему Птолемея с физикой или механикой того времени Насираддин ат-Туси не мог. Но как настоящий исследователь природы, он, по-видимому, понимал, что решение этих вопросов следует искать не путем искусственных построений, а накапливая надежные данные, совершенствуя математические методы их обработки и строя свои представления в виде некоторой теории. Ему удалось создать замечательную по тому времени обсерваторию и организовать на ней систематические наблюдения. С помощью своих помощников он составил известные «Ильханские таблицы».

Как уже отмечалось, заслуга Насираддина состояла также в усовершенствовании математических методов, применяемых в астроно-

⁴ М. Ф. С у б б о т и н. Работы Мухаммеда Насирэддина по теории движения Солнца и планет.— Известия АН АзССР, 1952, № 5.



Первый чертеж к теореме Менелая.

мии. Ему принадлежат важные результаты в области тригонометрии, которую именно он сделал самостоятельной наукой. В упомянутом выше трактате о полном четырехстороннике — «Шакл ал-кита» (дословно — «Фигура, составленная из секущих») — Насираддин изложил свои, а также известные до него результаты исследований по тригонометрии.

Полный четырехсторонник — это совокупность четырех отрезков на плоскости (или четырех дуг больших кругов на сфере), каждый (каждая) из которых пересекается с остальными тремя в трех точках. Во второй книге трактата Насираддин детально рассматривает полный четырехсторонник и доказывает теорему Менелая о составном отношении, связанном с этой фигурой. В применении к плоскости теорема Менелая дает соотношение (см. рисунок)

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{CE} = 1. \quad (1)$$

В фигуре, образованной на сфере дугами больших кругов (см. второй рисунок), вместо входящих в выражение (1) отрезков появятся удвоенные хорды соответствующих дуг. Древнегреческие астрономы, не имея еще тригонометрических функций, вместо синусов брали хорды.

Применительно ко второму рисунку можно записать одно из выражений для указанной выше теоремы в виде

$$\frac{\text{хорда } 2BC}{\text{хорда } 2CE} \cdot \frac{\text{хорда } 2DE}{\text{хорда } 2DF} \cdot \frac{\text{хорда } 2AF}{\text{хорда } 2AB} = 1. \quad (2)$$

Насираддин все такого рода зависимости записывает в виде «составного отношения». Например, вместо выражения (1) он пишет

$$\frac{CD}{DA} = \frac{FB}{AF} \cdot \frac{CE}{BE}.$$

Далее в этой книге рассматриваются различные разновидности основной фигуры и для каждого отдельного случая даются доказательства основной теоремы. Так, для доказательства соотношения (1) из точек A , B , C проводятся прямые $АН$, $ВН$ и $СН$, параллельные одной из сторон, не проходящих через такую точку, до пересечения

определения одних дуг, хорд и синусов через другие с помощью геометрических методов, как это изложено в начале «Алмагеста» и в некоторых других книгах.

К этому следует добавить, что в астрономических вычислениях так же, как и при изучении фигур, необходимо уметь определять не только стороны, но и углы плоского прямоугольного треугольника. Для этого устанавливают теоремы о дугах и хордах или же о дугах и синусах»⁵.

Сначала Насираддин излагает три случая решения прямоугольного треугольника, а затем различные случаи решения непрямоугольных треугольников. Он указывает также случаи, когда решение из-за неполноты данных невозможно. В этой книге Насираддин пользуется только синусами.

В четвертой книге детально рассмотрена теория полного сферического четырехсторонника. Здесь мы находим теоремы, аналогичные теоремам второй книги и получающиеся из них, если вместо отношений отрезков рассматривать отношения синусов дуг.

Примером может служить следующее доказательство: в сферическом полном четырехугольнике $AB C D E F$

$$\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD} \cdot \frac{\sin DC}{\sin CA}.$$

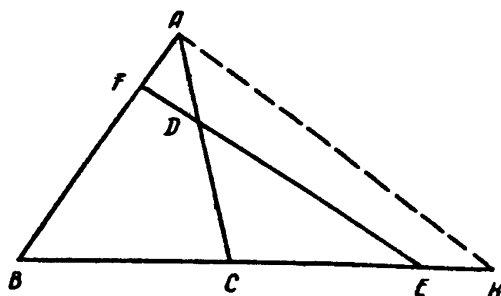
Для доказательства проводятся хорды AB , AD , BD и радиусы HE , HC и HF . Эти хорды и радиусы соответственно пересекаются в точках G , L и K , находящихся на прямой, по которой пересекаются плоскости ABD и ECF . Получается полный плоский четырехсторонник $AB D C K L$. Применяя к нему теоремы, выведенные во второй книге, Насираддин получает

$$\frac{BG}{GA} = \frac{BK}{KD} \cdot \frac{DL}{LA}.$$

Остается применить теорему из третьей книги, чтобы доказать, что входящие в последнее равенство отношения равны отношениям синусов соответствующих дуг.

В пятой книге трактата даны классификация сферических треугольников по их углам и сторонам и решение этих треугольников. Основой для классификации сферических треугольников является разбивка их углов на острые, прямые и тупые, а сторон — на меньшие, равные и большие четверти окружности. Получаются, таким образом, две классификации, которые Насираддин и сопоставляет.

⁵ М у х а м м е д Н а с и р а д д и н Т у с и. Трактат о полном четырехстороннике. Изд-во АН АзССР, Баку, 1952, стр. 85.



Доказательство теоремы Менелая (второй вариант).

Далее, кроме синуса он вводит косинус дуги, как синус дуги, дополнительной до четверти окружности, тангенс дуги — «тень дуги», под которой он понимает линию тангенса угла, соответствующего дуге, котангенс дуги, как тангенс дуги, дополнительной до четверти окружности, а также секанс и косеканс дуги. Затем выводит теоремы синусов и тангенсов. Рассмотрев сначала известные уже доказательства, он устанавливает эти теоремы весьма просто, на основании «теоремы древних астрономов».

Трактат заканчивается подробным изложением различных случаев решения сферических треугольников. Как отмечали некоторые исследователи (Г. Г. Цейтен и др.), особенно замечателен прием, которым Насираддин сводит решение сферического треугольника по трем углам к рассмотренному им перед этим случаю решения прямоугольного треугольника по трем сторонам. Суть этого приема состоит в том, что по данному треугольнику строится новый, являющийся, по современной терминологии, полярным по отношению к исходному. Решение сферических треугольников по трем углам впервые рассмотрено Насираддином и является его значительным достижением. Полярные треугольники начали рассматривать лишь тремя столетиями позже (В. Снелль).

Оценивая заслуги Насираддина в области тригонометрии, можно сделать следующие выводы. Насираддин первый, задолго до Региомонтана, посвятил изложению тригонометрии отдельную книгу, выделив тем самым тригонометрию в самостоятельную математическую дисциплину. Он также первый дал последовательное изложение плоской и сферической тригонометрии на единой методической основе, значительно упростив изложение и доказательство ряда теорем. Большую историческую и методическую ценность представляет проведенный им анализ работ его предшественников в этой области, тем более что почти все важнейшие исследования предыдущих эпох ему были известны. Насираддин показал новый случай решения сферических треугольников (по трем углам), причем существенное значение имеет сам новый метод решения — использование треугольника, полярного данному. Все это дает основание считать Насираддина ат-Туси основоположником плоской и сферической тригонометрии как особой математической дисциплины.

Остановимся теперь на вкладе Насираддина ат-Туси в теорию отношений. Этой теории он касается в своих геометрических работах прежде всего в «Изложении Евклида» («Тахрир Укклидис»). В наиболее полном и законченном виде трактовка теории отношений дана в его первой книге рассмотренного выше сочинения «Шакл ал-кита».

Напомним сначала, что у Евклида, и вообще в греческой математике, было существенное различие между отношениями соизмеримых и несоизмеримых величин. Теория отношений несоизмеримых величин строилась независимо от теории соизмеримых величин и в особых терминах. В восточной математике IX—XII вв. можно проследить тенденцию к преодолению этой пропасти между двумя видами отношений

и к выработке широкого подхода к понятию числа. Стимулом являлось развитие вычислительных методов математики. Но этот процесс был далеко не завершен к тому времени, когда работал Насираддин. Так, в начале VII книги «Изложение Евклида» он пишет, что величина — это всякое явление, которое может быть разделено или которое может принимать в себя части. Если части величины имеют общие границы, то она — непрерывна, если нет — она дискретна. В этом определении существенным является объединение двух видов величин. Далее, важно, что в первой редакции «Изложения Евклида» Насираддин утверждает, что число — это величина, состоящая из совокупности единиц, так как оно есть всякая вещь, занимающая место в порядке счета, поэтому сама единица также является числом. Это уже существенное продвижение вперед по сравнению со взглядами Аристотеля, для которого единица находится в особом положении — она неделима. Это также продвижение вперед по сравнению со взглядами Хайяма, для которого существовало два вида единиц — абсолютная, т. е. неделимая, и неабсолютная — делимая единица.

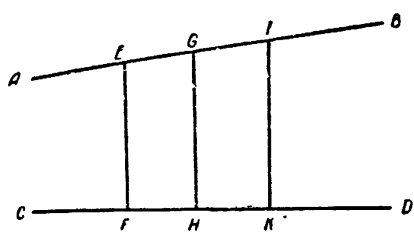
Насираддин вводит понятие «количество отношения» («Шакл ал-кита»), рассматриваемое им как число. Он определяет составное отношение как такое, значение которого равно произведению двух других отношений независимо от того, являются величины, входящие в отношения, соизмеримыми или несоизмеримыми, причем отношения несоизмеримых величин рассматриваются как числа. Каждое из этих отношений, пишет он, может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов отношения определяется другими. Эти взгляды были выработаны в Западной Европе лишь в XVII в.

Таким образом, принципиальное значение взглядов Насираддина по рассматриваемым вопросам весьма велико.

Рассмотрим геометрические работы Насираддина. Наиболее известной является его работа «Изложение Евклида» в двух редакциях. Кроме того, он написал «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий», содержащий комментарии к геометрическому трактату Хайяма.

Ценность «Трактата, исцеляющего сомнение по поводу параллельных линий» (написан до 1251 г.) состоит в критике теорий параллельных линий, принадлежащих предшественникам Насираддина — Ибн ал-Хайсаму и Хайяму, а также в изложении теории ал-Джаухари, которая до недавнего времени была не известна историкам математики. Прежде всего укажем на один важный с методической точки зрения факт: Насираддин допускает движение в геометрии. В этом он решительно расходится с Аристотелем и Хайямом. Известно, что Хайям критиковал Ибн ал-Хайсама за то, что тот пользовался движением при определении геометрических понятий. Насираддин уже во второй редакции «Изложения Евклида» определяет линию как результат движения точки.

Европейским ученым до конца XIX в. было известно «Изложение Евклида» только в первой редакции. В нем Насираддин пытается дока-

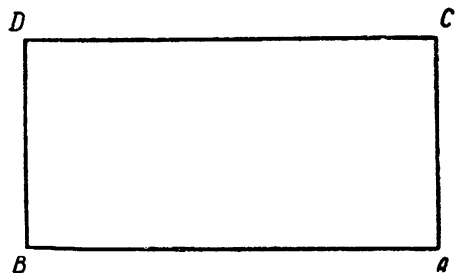


Чертеж к доказательству V постулата Евклида.

зуют с первой прямой неравные углы, острые с одной стороны (к A) и тупые с другой (к B), то эти две прямые, пока они не пересекаются, сближаются в сторону острых углов и расходятся в сторону тупых;

2) обратно, если рассматриваемые перпендикуляры становятся короче в одном направлении (к AC) и длиннее в другом (к BC), так, что наши две прямые сближаются в одну сторону и расходятся в другую, то каждый перпендикуляр образует с AB неравные углы — острый в сторону A , тупой в сторону B .

Далее Насираддин доказывает третью лемму (см. рисунок). Если из концов отрезка AB восставить к нему перпендикуляры AC и BD , отложив от них равные отрезки AC и BD , и провести прямую CD , то каждый из углов будет прямым, а CD будет равно AB . Исходя из этой леммы, Насираддин строит свое доказательство V постулата Евклида. Разумеется, доказательство Насираддина содержит ошибку. Надо думать, что Насираддин заметил свою ошибку. Во всяком случае, в лемме второй редакции «Изложения Евклида» он приводит V постулат и вместо рассмотренных выше рассуждений пишет, что предложил взамен его другой постулат, а именно: если несколько прямых линий, расположенных в одной плоскости, расходятся в одном направлении, то они не могут в этом направлении сходиться. Этот постулат долгое время приписывали шотландскому математику XVIII в. Р. Симпсону, который пришел к нему, скорее всего, самостоятельно. На самом деле, постулат Насираддина сильнее V постулата Евклида. Исходя из своего постулата, Насираддин вполне строго получает V постулат в качестве теоремы, причем в ходе вывода он получает также ценные для теории результаты. Во всех этих рассуждениях Насираддин исходит из рассмотренного выше четырехугольника, и эту фигуру, конечно, следует называть четырехугольником Хайяма — Насираддина.



Чертеж к третьей лемме Насираддина.

затем V постулат Евклида. В этом доказательстве, конечно, ошибочном, но поучительном как своей ошибкой, так и своей рациональной частью, он исходит из следующих двух положений, принимаемых без доказательства:

1) если две прямые AB и CD (см. рисунок) расположены так, что перпендикуляры, опущенные из точек одной из них (AB) на другую (CD), всегда обра-

Итак, в теорию параллельных линий Насираддин ат-Туси внес следующее: систематическое использование четырехугольника Хайяма — Насираддина, формулировку нового постулата, заменяющего V постулат Евклида, вывод ряда утверждений, равносильных либо V постулату, либо постулату Насираддина.

Основу азербайджанской системы обучения в XV—XVIII вв. составляла религиозная школа — медресе, которая давала лишь слабые начатки знаний в области математики. Такая система обучения явилась следствием общего экономического, политического и культурного упадка, следствием господства религиозной идеологии. Немногочисленные и ранее центры научной мысли сошли со сцены, так как не могли ничего противопоставить этой догматической по методам и устаревшей по своему содержанию «медресской» школе.

Саид Яхья Бакуви (ум. в 1464 г.) известен в основном как автор философских трактатов. Ему принадлежит также несколько трудов по астрономии, но эти труды, вероятно, не были оригинальными по своему содержанию.

Бадрадин Эмир Сеид Ахмед Ляляви (ум. в 1506 г.) — автор ряда сочинений (они не были напечатаны, как и сочинения Бакуви) по логике и грамматике. Среди современников он слыл знатоком математики. Однако были ли у него собственно математические работы, неизвестно.

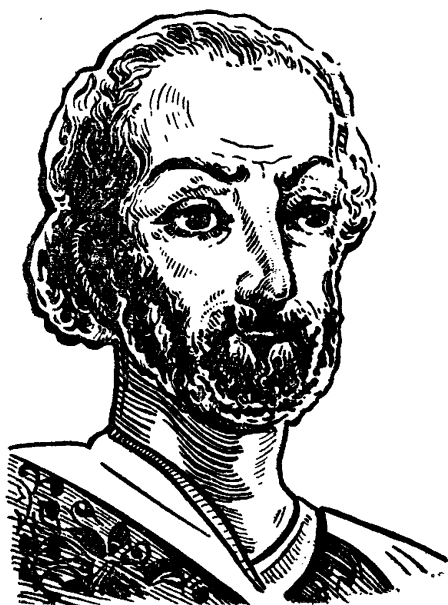
В начале XVI в. временно возобновила свою деятельность Маргинская обсерватория. Руководил ею астроном и математик Гиясaddin Ширани.

Из ученых XVII в. известно немало имен историков, филологов, философов. С математикой же связывают лишь имя Насираллаха Хамхани. От XVIII в. до нас не дошло ни одного имени математика или астронома. Объем математического образования в тех школах, где оно давалось, представлял собой начальные элементы арифметики и геометрии, предлагавшиеся в виде частных практических советов, главным образом по исламскому праву.

3

Математика в Грузии

В VII—IV вв. до н. э. грузинские племена соседствовали с государством Урарту. Можно считать достаточно обоснованным, что по происхождению и языку древние грузинские племена были близки к основному населению Урарту и их следует отнести к хетто-субарской группе. Следовательно, культурное наследие Урарту является в известной мере составной частью культуры древнегрузинских племен в период, когда на территории Грузии впервые начали формироваться государства. Первые грузинские государства Картли (Иберия) и Колхида возникли как раз после падения Урарту. Частично они попали под власть Персии и восстановили свою самостоятельность после того, как Александр Македонский покорил персидское государство. Археологические данные свидетельствуют о проникновении в Грузию эллинистической культуры. Позже Западная Грузия (Колхида) попала в зависимость от Понтийского государства, а в I в. до н. э. — от Рима, после разгрома последним Понта. Восточную Грузию (Картли) Рим сделал своим вассальным государством.



Иоане Петрици (по рисунку худ. Л. Гудиашвили).

О периоде римского владычества (примерно до III—IV вв. н. э.) историки располагают достаточными данными, чтобы охарактеризовать грузинскую культуру того времени. В горных районах, где еще господствовал родовой строй, преобладали примитивные формы быта и культуры. В равнинных же местностях экономика и культура были значительно развиты, что и привело здесь к возникновению рабовладельческих государств, хотя внутриплеменные связи оставались достаточно сильными. Памятники материальной культуры, позволяющие судить об уровне техники, развитии ремесла и наличии торговли, дают основание утверждать, что в грузинских царствах того времени сведения из области физико-математических наук были известны примерно в том же объеме, что и в соседних эллинистических государствах.

Речь идет о сведениях, имевших практическое значение и применение (необходимых для ведения календаря и летоисчисления, для выполнения измерений на местности).

Однако о том, были ли здесь в какой-то мере восприняты достижения научной математики и астрономии эпохи эллинизма, никаких данных нет. Более того, надо считать маловероятным распространение здесь теоретических знаний; тем более, если учесть, в сколь малой мере они были восприняты в древнем Риме, где условия для этого были гораздо благоприятнее.

Примерно в III в. в Грузии начал зарождаться и постепенно укрепляться феодализм. К IV—VI вв. относится распространение христианства. Христианская церковь, по-видимому, полностью уничтожила памятники древней письменности. Наиболее древними памятниками грузинской литературы из дошедших до нас являются книги религиозного содержания.

В политическом отношении Грузия становится ареной борьбы между Персией и Восточной Римской империей. К VII в. значительно усилился процесс сближения различных грузинских племен. У народов Восточной и Западной Грузии, находившихся примерно в одинаковых экономических условиях, были уже общая письменность, общий литературный язык и общая религия.

Затем последовали столетия арабского господства. В X—XI вв., после ряда восстаний и войн, Грузия почти полностью освободилась от гнета арабов и, несмотря на феодальные неурядицы и турецкое нашествие (в конце XI в.), в ней начался заметный подъем экономики и культуры. Эпоха экономического и культурного подъема Грузии

охватывает X—XIII вв. К X—XI вв. относятся и дошедшие до нас рукописи математического содержания, по которым можно судить о грузинской математике этой эпохи.

По условиям того времени в Грузии, как и в ряде стран средневековой Европы, важными культурными центрами были монастыри. Многие крупные грузинские монастыри находились за пределами страны — в Греции (Афонский), Сирии, Палестине, Болгарии (в Петрицоне, ныне Бачково). С последним монастырем был связан известный грузинский философ XII в. Иоане Петрици. Петрици не был математиком, но, вероятно, довольно глубоко изучил математические сведения. В одном из его трудов даны комментарии к работам древнегреческого философа и математика Прокла. В нем есть такое высказывание: «Геометрия полагает свои три измерения первичнее всего и два из них производит от одного. Подобно тому, как сын и дух происходят от одного единственного отца, так и прямая линия... и затем поверхность... то есть верхняя видимая часть пространства, вовсе не имеющая глубины [образуются от одного из измерений]. Вот как произошло это от одной сими, то есть точки. Если точка потечет, она создаст прямую, которая есть первый ее отпрыск. А если линия распространится, она производит поверхность, которая является силой или душой ее совершенства, от нее производятся все прочие фигуры и построения, а именно, первая из фигур—треугольник $\triangle$ и затем четырехугольник $\square$ и далее круглое и сферическое построение $\bigcirc$, которое не имеет ни начала ни конца, ибо где начинается, там же кончается»⁶. Мы выделяем это высказывание потому, что в нем такие математические понятия, как линия и поверхность, определяются с помощью движения, вопреки основной методологической установке, созданной Аристотелем и преобладавшей в древней и средневековой математике. К сожалению, от рассматриваемой эпохи до нас не дошли специальные работы по основным проблемам математики того времени. Об уровне математической культуры в Грузии этих столетий можно судить только по нескольким рукописям, в основном математического содержания, но практической направленности. Это рукописи о хронологических вычислениях, изданные Броссе в переводе на французский язык вместе с грузинским текстом еще в 1868 г. Одна из них представляет собой трактат, написанный в 907 г. грузинским монахом Иоане в Иерусалиме. Автором другой является грузинский писатель XII в. Иоане Шавтели. Она дошла до нас в списке 1234 г. Кроме того, сравнительно недавно Д. Г. Цхакая изучил еще одну рукопись сходного содержания, относящуюся к 974 г. (рукопись А-38 по каталогу Музея Грузии).

Система числительных в грузинском языке соответствует, в основном, десятичной системе счисления, но, по данным грузинского историка Ив. Дерахашвили, в древности счет в Грузии во многих случаях велся на основе девятичной системы. Например, верхнюю

⁶ Д. Г. Ц х а к а я. История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1959, стр. 146.

одежду, белье, пуговицы и т. п. считали девятками, что встречается в записях приданого даже XVIII в. Тем примечательнее, что уже в упомянутой рукописи 974 г., а также в некоторых надписях на церковных зданиях, построенных в начале XI в., есть записи чисел, сделанные на основе позиционного принципа, цифрами, весьма близкими к арабским. Вообще же в Грузии господствовала алфавитная система нумерации.

Остановимся на применяемых в древних грузинских рукописях вычислительных методах. В рукописях не разъясняется, как следует производить арифметические действия. Предполагается, что читатель для этого вполне подготовлен, хотя и даются указания, как применять формулируемые в рукописи правила, чтобы, например, вычисленный объем был по возможности меньше. При этом вводятся, в сущности, операции со сравнениями по известному модулю. Так, в рукописи 974 г. дается правило для отыскания лунного периода, возраста и фазы Луны. Согласно этому правилу, действие следует начинать с вычисления некоторого индекса года. Чтобы получить индекс, необходимо прежде всего отнять по 19 возможно большее число раз от номера года, т. е. получить остаток от деления номера года на 19.

В рукописи 1234 г. приведен такой пример на выполнение указанного действия: «6837 лет... [грузинская эра исчисления: $5604 + 1233 = 6837$ год], когда составлена рукопись, по 19 так отнимай: от двадцати единицу возьми, от ста и от ста пять и пять, и от тысяч пятьдесят соберется, как излишек над 19; и от его сорока [то есть от числа 40, входящего в состав «излишка»] два возьмут и к нему десять прибавят и он тоже по 19 уйдет, и так с тысяч составим двенадцать, как излишек над девятнадцатью, и с каждой тысячи двенадцать и двенадцать возьмишь и что получится от их сложения, от того тоже по девятнадцать отними». В современной символике это выглядит так:

$$\begin{aligned} 20 &\equiv 1 \pmod{19}, \\ 100 &\equiv 5 \pmod{19}, \\ 1000 &\equiv 50 \pmod{19}, \\ 10 &\equiv 10 \pmod{19}, \\ 40 &\equiv 2 \pmod{19}, \end{aligned}$$

и отсюда

$$1000 \equiv 12 \pmod{19}.$$

Используя эти упрощения, автор рукописи получает результат, который мы теперь записали бы в виде

$$6837 \equiv 16 \pmod{19}.$$

Для вычисления ряда других данных, необходимых при хронологических расчетах, применялись следующие правила (в современных обозначениях):

некоторая искомая величина f находится из сравнения

$$f \equiv k + a + \left[\frac{a}{n} \right] \pmod{7},$$

где k и a — данные числа, или же

$$f \equiv N + 4 \pmod{28},$$

где N — данное число.

Как видим, содержание рукописей рассчитано на читателя, хорошо владеющего арифметическими действиями, и тем самым свидетельствует о наличии определенной вычислительной культуры.

Указанные рукописи, а также рукопись 1188 г. (А-65 по каталогу Музея Грузии) содержат и собственно астрономические сведения. Эти сведения соответствуют уровню астрономической науки того времени, и на основании их можно сделать вывод, что в Грузии поддерживалась в какой-то форме связь с астрономами и математиками арабоязычных стран.

В течение XIV—XVII вв. Грузия находилась в исключительно тяжелых условиях. Монгольское нашествие поставило население восточной Грузии под угрозу полного физического истребления. Позже тяжелый ущерб был нанесен вторжением турок и персов. Лишь к XVIII в., благодаря поддержке России и на основе политического и культурного сближения с ней, создаются более благоприятные условия для развития Грузии. С конца XVII в. начинается постепенный подъем культурного уровня страны. Самостоятельных научных трудов этот период не дал, но в области математического просвещения работа проводилась: вырабатывалась терминология, создавались учебники.

К началу XVIII в. относится рукопись (Н-2115 Музея Грузии) учебника арифметики Димитрия Цицишвили. Она состоит из 13 глав. В первой главе излагается нумерация. В следующих четырех — арифметические действия, причем таблица умножения однозначных чисел приводится в сокращенном («треугольном») виде, а деление излагается по Луке Пачоли, хотя и весьма неясно. Шестая глава содержит сведения о мерах (европейских) длины, площади, жидкости и денег. В седьмой кратко изложены прогрессии, в восьмой — извлечение квадратного и кубического корней. В последних пяти главах рассмотрено тройное правило и действия с простыми и десятичными дробями. Известна небольшая рукопись XVIII в., содержащая учение о логарифмах. Очевидно, это часть какого-то утерянного курса алгебры. Она интересна стремлением автора заменять латинские и греческие термины национальными, в математическом же отношении не является оригинальной.

Рассмотрим наиболее обширную из известных математических рукописей этого периода — рукопись Н-2180 Музея Грузии. Д. Г. Цхакая считает автором ее Иоане Батонишвили (1767—1830), сына последнего грузинского царя Георгия XII. Иоане Батонишвили был литератором и ученым. С 1801 г. жил в Петербурге, где занимался наукой и литературой.

Указанная рукопись (740 с.) содержит арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию и аналитическую геометрию. В изложении арифметики автор следует обычным для его времени стандартам.

Определения не всегда отличаются точностью и не во всем соответствуют уровню науки того времени. Например: «Части математики — арифметика, геометрия, тригонометрия и алгебра. Части эти и еще другие составляют чистую математику. К смешанным (частям) приписываются астрономия, гномоника, оптика, гидростатика, механика, гидравлика, хронология, ноты для музыкальных инструментов и для поющих»; «Арифметика есть учение о вычислениях, дающее легкий и простой закон числа».

Изложение геометрии не выдержано в едином стиле. Некоторые теоремы даны без доказательств. Автор заменяет последние чертежами. Без вывода даны и величины сторон правильных многоугольников (с 6, 12, 24, 48 и 96 углами). Для числа π автор принимает значение, равное $\frac{22}{7}$.

Материал по тригонометрии изложен в весьма кратком виде. В разделе об аналитической геометрии даны некоторые сведения о конических сечениях, в частности выведено уравнение эллипса.

В целом рукопись представляет собой труд, написанный человеком, для которого математика не была специальностью и который поэтому не мог быть в достаточной мере осведомлен об уровне математических знаний того времени.

Подобный характер носят и другие математические рукописи. Известны также некоторые рукописи, включающие переводы, полные или частичные, русских математических учебников XVIII в.

4

Математика в Армении

На территории Армении в эпоху, непосредственно предшествовавшую началу формирования армянской нации, существовало довольно крупное государство Урарту. Наследниками и преемниками культуры Урарту были именно армяне и грузины, но об этом можно судить только на основании косвенных данных и сопоставлений, так как до нас не дошли памятники дохристианской письменности армян и грузин.

В Урарту еще до IX в. до н. э. существовала письменность. Это древнее письмо было иероглифическим. Оно не получило широкого распространения и в IX в. до н. э. было вытеснено системой клинописи. Клинописные надписи на урартском языке сохранились в большом количестве. Они содержат и обозначения чисел, по которым можно судить об урартской нумерации.

Числительные урартской клинописи, как и само клинописное письмо, ассирийского происхождения. Единица обозначалась вертикальным клином, остальные числа до 10 записывались соответствующим числом вертикальных клиньев, причем числа 2 и 3 обозначались длинными вертикальными клиньями, а выше трех — короткими. Впро-

чем, число 9 записывалось не только девятью короткими клиньями, но и тремя клиньями, поставленными один над другим. Для числа 10 применялся новый знак — горизонтальный клин (уголок), 20 обозначалось двумя уголками и так до 70. Числа 70, 80, 90 записывались вертикальным клином, аналогичным знаку для единицы и обозначающим здесь 60, с добавлением, соответственно, одного, двух и трех уголков. В этом, конечно, надо видеть влияние или пережиток шестидесятеричной системы, тогда как в основном урартская нумерация является десятиричной.

Число 100 записывалось двумя клиньями — вертикальным и горизонтальным, 1000 — как 100 с уголком впереди, т. е. как $10 \cdot 100$. Как видим, здесь уже выступает принцип умножения. Несколько сотен и несколько тысяч тоже фиксировались по принципу умножения: перед знаком 100 или 1000 выписывалось соответствующее число единиц. К этому еще следует добавить, что число 10 000 не имело самостоятельного знака и всегда выписывалось фонетически («atibi»).

Сохранившиеся многочисленные памятники материальной культуры Урарту — сосуды различных размеров (в том числе и очень большой емкости, доходившей до нескольких тысяч литров) для жидкостей и сыпучих тел, сложные постройки и другие, — данные о высокой культуре земледелия и садоводства, наличии больших поместий царя и крупных рабовладельцев, значительных храмовых угодий с хорошо поставленным учетом, а также качество изделий из металла, камня, глины — все это свидетельствует о том, что в Урарту был достигнут уровень культуры примерно такой же, как в соседней Ассирии. Данные об экономике Урарту показывают, что искусство счета и практическая геометрия были там на том же уровне, что в Ассирии и Вавилоне в первые столетия I тысячелетия до н. э.

По древнему периоду истории армянского народа (от VI—V вв. до н. э. до начала V в. н. э.) мы не располагаем какими-либо литературными памятниками. Однако известно, что в течение этого тысячелетия в Армении были периоды значительного экономического подъема. Например, в I в. до н. э. она достигла высокого политического могущества и стала сильной для того времени державой⁷. Учитывая памятники математической культуры, наличие культурного наследия Урарту, связи со странами Средней Азии, а также то, что империя Тиграна Великого была в сущности эллинистическим государством, и то, что Армения за это время перешла от родового строя через крупное рабовладельческое государственное объединение к феодализму, можно сделать вывод, что у армян была письменность, а уровень математической культуры был таким, какого достигли в эпоху эллинизма государства Малой Азии. Есть достаточно данных о том, что после введения христианства в Армении (IV в.) церковь сделала все, чтобы уничтожить языческую литературу. Достижение такой цели облегчалось тем, что с V в. был введен новый алфавит, а также тем, вероятно, что образо-

⁷ Я. А. Манандян. О торговле и городах Армении в связи с мировой торговлей древних веков. Издательство Ереванского университета, Ереван, 1954, стр. 63.

ванная верхушка армянского общества эпохи расцвета древней Армении была сильно эллинизирована и говорила преимущественно на греческом языке. Этот язык был господствующим, очевидно, и в аппарате управления, чем и объясняется, что немногочисленные надписи, уцелевшие от языческого периода, сделаны на греческом языке. Добавим к этому, что в Византии V в. среди купцов, духовенства и военных было немало армян и что есть основания считать ученого математика Восточной Римской империи Аганиса (V—VI вв.) армянином⁸.

Все это позволяет сделать вывод, что к V—VI вв. н. э. математическая культура армянского народа была на том же уровне, что и в соседней Византии. Известно, что и в начале VI в. широко практиковался отбор лучших учеников армянских школ для получения высшего образования в Константинополе, Риме, Афинах, Александрии, Эдессе. Историки армянской литературы называли ученых, получивших образование в этих школах, переводчиками. Так именовались и самые крупные деятели того времени, например философ Давид Анахт («Непобедимый»), историк Мовсес Хоренаци. Это свидетельствует о том, какое место в деятельности ученых-переводчиков занимала работа по приобщению армян к науке и литературе эллинизма.

Каковы же конкретные сведения о математике у армян в V—VI вв.? Армяне пользовались в это время алфавитной системой нумерации, система счисления была десятичной. Армянский алфавит состоял из 36 букв, поэтому можно было записывать числа не до 1000, как при греческой алфавитной системе, а до 10 000. Способ записи — слева направо. Для отличия букв — числовых знаков от букв — звуковых знаков над буквами ставили горизонтальную черту или же буквы, обозначающие числа, отделяли слева и справа точками. Для 10 000 было специальное слово («бюр» — гр. мириады). Для обозначения больших чисел вводили специальные знаки, ставившиеся возле букв. Применялись и дроби, с числителем единиц. В астрономических вычислениях использовались вавилонские (шестидесятеричные) дроби. Некоторые особенности в технике арифметических действий совпадают с особенностями урартских записей, например помещение при действии вычитания вычитаемого перед уменьшаемым. Г. Б. Петросян пришел к выводу, что сравнение армянской арифметики этого периода с урартской выявляет наличие непосредственной связи между ними. На основании анализа трудов философов того времени можно сделать заключение, что у армян математика была существенной частью высшего образования. В «Комментариях к первым десяти книгам „Начал“ Евклида» математик IX—X вв. ан-Найризи (в европейской математической литературе известен под именем Анарициуса) приводит доказательство V постулата, данное математиком Аганисом и дошедшее до ан-Найризи через греческого ученого VI в. Симпликия. Из текста ан-Найризи можно заключить, что Аганис жил незадолго до Симпликия или одновременно с ним и писал на греческом языке. Если

⁸ Г. Б. Петросян и Б. А. Розенфельд. Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида. — Известия АН АрмССР, 1960, № 1.

учесть, что Аган — армянское имя, встречающееся с V в., и что некоторые армянские собственные имена в греческом языке принимают окончание «ης», то надо считать Аганиса армянином. Другими сведениями о нем мы не располагаем. Его доказательство занимает видное место в истории вопроса. Отрывок с этим доказательством из книги ан-Найризиде переведен на русский язык и прокомментирован Б. А. Розенфельдом.

В истории культуры армянского народа VII век является частью того же периода, который охватывает и предыдущие два столетия. Но от VII в. до нас дошли и собственно математические сочинения — работы известного энциклопедиста того времени Анании Ширакаци.

Анания Ширакаци (нач. VII в. — 80-е годы VII в.) родился в с. Ани вблизи Ширака. После окончания начальной школы при местном монастыре, «сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, — так пишет о себе Ширакаци в своем сборнике задач, — что без числа никакое философское рассуждение не излагается, всей сей мудрости матерью его почитая»⁹. Ширакаци долго скитался по стране в поисках сведущего преподавателя и наконец нашел греческого математика Тюхика (Тюкикоса) в Трапезунде. В школе Тюхика он учился восемь лет. По отзыву Ширакаци, эта школа считалась лучшей. К Тюхику приезжали ученики даже из Византии.

Анания Ширакаци — автор многочисленных трудов по философии, географии и физико-математическим наукам. До нас дошла лишь незначительная часть его работ. Это объясняется не только тяжелыми условиями жизни армянского народа, но и тем, что армянская церковь относилась к Анании недоброжелательно, считая его взгляды еретическими.

Из работ Ширакаци в области физико-математических наук сохранились следующие.

«Космография и летоисчисление». В этой работе Ширакаци утверждает, в частности, что Земля шарообразна, что Млечный Путь представляет собой скопление звезд, что Луна не имеет собственного света, а получает его от Солнца, здесь он дает правильное объяснение затмений.

Астрономические таблицы лунного движения, недавно выявленные¹⁰. В основу этих таблиц положен Метонов цикл, но из предисловия видно, что Ширакаци уточнял их на основании личных наблюдений.

Учебник арифметики. Этот труд Ширакаци особенно важен для нас. Долгое время было известно лишь собрание задач, изданное в 1918 г. И. А. Орбели в переводе на русский язык под названием «Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци». И. А. Орбели первый высказал мысль, что это только часть более обширного труда, и дей-

⁹ И. А. Орбели. Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци. Петроград, 1918, стр. 7 (вардапет — ученое звание в старой Армении, обычно для лиц духовного сословия, прошедших высший курс наук).

¹⁰ А. Г. Абрамян. — В кн.: История естествознания и техники. Вып. 1. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1960 (на армянском языке).

[illegible]

ամէ: Զապանայի մոլուէ: Մոլորակ-ի դասիմ
Դաս-Դաս Է: Ի քէ միւր մի-ամբանքայ
'ստ զիտէ: Է գրով: ԼԶ յէ երոտոր
որէ անբաւ հոշմէ: յէ: Զ զնայ պարտ է
Է, Է որ մա զիտիմէ այ: Գ: որէ զանդ

Страница из учебника арифметики Анании Шира-
каци (рукопись VII в.).

ствительно, в 1939 г. проф. А. Г. Абрамян удалось найти другие части арифметического сочинения Ширакаци: таблицы сложения, вычитания, умножения и «Шеститысячник»; они снабжены введениями. Таблицы сложения состоят из четырех частей — для единиц, десятков, сотен и тысяч. Общее число комбинаций — 180. В таблицах вычитания 324 комбинации. В таблицах умножения наибольшие сомножители — 9000 и 10 000, а всего эти таблицы содержат 1332 произведения. «Шеститысячник» — таблица из трех столбцов. В первых двух столбцах помещены такие числа, произведение двух из которых, стоящих в одной строке, дает число 6000, стоящее в той же строке третьего столбца. Иначе говоря, это таблица обратных величин для числа 6000, состав-

раз на целые столетия, достаточно благоприятные экономические и политические условия для развития культуры, в том числе и для развития математики.

До нас дошел в рукописи (хранится в Матенадаране, № 3310) труд ученого XI в. Анании Нарекшици «О толковании чисел». «Тайное» значение чисел Нарекшици толкует на примерах преимущественно из библии. Рукопись относится к XIII в. Она является свидетельством (не единственным) того, что «мистицизм чисел», ведущий свое начало еще от пифагорейцев и весьма распространенный в средневековой науке, не миновал и Армению.

К XI в., не позже его середины, относится древнейший перевод Евклида на армянский язык. Он дошел до нас в отрывках, но и в уцелевшей его части обнаружены поучительные разночтения по сравнению с известными греческими текстами. Можно считать доказанным¹¹, что перевод сделан выдающимся ученым и литератором Григором Магистром (ок. 990—1058).

Ованес Саркавас Имастасер (ок. 1050—1129) был виднейшим деятелем школы при Аппатском монастыре в Лори. Это — философ, занимавшийся главным образом точными науками. В Матенадаране выявлено 17 рукописей Имастасера по календарю, большая часть которых дошла до нас в отрывках. Рукописи содержат много ценных сведений о календарях различных народов. Имастасер был одним из реформаторов армянского календаря. Для нас наибольшее значение имеет его работа «О полигональных числах» (в Матенадаране хранится 10 ее списков, древнейший из них 1280 г.). В качестве источников он использовал труды Никомаха и Филона.

В этой работе рассматриваются арифметические прогрессии, первый член которых единица, а разности равны 1, 2, 3 ... Сумма первых k чисел таких прогрессий, если разность равна $n - 2$,

$$a_k^n = k + \frac{(n-2)(n-1)n}{2},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$; $n = 3, 4, 5, \dots$ Таблицы Имастасера имеют вид

1	1	1	1	1	1	1	1	.
2	3	3	4	4	5	5	6	.
3	6	5	9	7	12	9	15	.
4	10	7	16	10	22	13	28	.
5	15	9	25	13	35	17	45	.
6	21	11	31	16	51	21	66	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

К XII в. относится работа по космографии «О небе и его украшениях» Нерсеса Шнораци (1102—1173). Она написана в стихах и по-

¹¹ Т. Г. Туманьян. Начала Евклида по древнеармянским источникам. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.

лучила широкое распространение (в Матенадаране хранится 66 ее списков).

Ко второй половине XIII в. относится рукопись произведения Ованеса Ерзинкаци «О небесном движении» (1284 г., в Матенадаране хранится несколько ее списков). В ней содержатся не только описания небесных светил, но и попытки объяснить происхождение дождя, града, молнии, грома и т. п.

Сохранились работы различных авторов по календарю, относящиеся к XIV в. Важнейшей из них является работа Акопа Кримици. Как сообщает проф. А. Г. Абрамян, Кримици обстоятельно описывает движения Солнца, Луны, звезд и дает правильные научные объяснения их.

К XIV в. относится также сборник занимательных задач (1321 г.) Мхитара Анеци. Сборник составлен под влиянием арифметических работ Анании Ширакаци.

В начале рассматриваемого периода в Византии жил армянский математик, механик и астроном Левон, известный в византийской литературе под именем Лев. Родился Левон приблизительно в первом десятилетии IX в., умер около 870 г. Работы его до нас не дошли, но из апологии, написанной его учеником Константином, известно, что Левон занимался математикой, прикладной механикой, акустикой и астрономией, разрабатывал систему световой сигнализации. Одно время он был ректором восстановленного императором Вардом Константинопольского университета.

К концу рассматриваемого периода относится деятельность другого армянского ученого, также жившего в Византии, Николая Артавазда из Киликии. Поль Таннери перевел на французский язык две его работы, написанные в эпистолярной форме на греческом языке, и издал их. Это «Краткое и весьма ясное изложение науки счисления, сочиненное в Константиновской Византии, рабдасом Николаем Артаваздом из Киликии, арифметиком и геометром, по просьбе почтеннейшего докладчика, адвоката Георга Хачика, весьма легкое для желающих изучить его» и «Моему очень дорогому сердечному другу Теодору Шавуху из Клазомен Николай Артавазд из Киликии пишет настоящее из Византии». Кроме того, есть сведения, что в Париже хранится геометрическая рукопись Артавазда, пока не изданная и не описанная.

В опубликованных Таннери работах Артавазда содержатся разъяснения алфавитной нумерации, описание пальцевого счета от 1 до 9999, изложение четырех арифметических действий, способ извлечения квадратного корня, в одном случае в первом приближении, в другом — в любом приближении, по схеме

$$x_1 = \sqrt{a} = \sqrt{a_1^2 + b^2} \approx a_1 \pm \frac{b}{2a_1};$$

$$x_2 = x_1 + x'; \quad x' = \frac{A}{x_1},$$

изложение действий с дробями в египетской форме, вопросов летоисчисления, причем, давая правило определения дней церковных праздников, автор указывает, что это его собственное решение различных задач с объяснениями и примерами простого и сложного тройного правила. В заключительной части второй из указанных работ рассмотрено 18 занимательных задач. В расположении приведенных Аратаваздом арифметических таблиц и в выборе задач сказалось несомненное влияние Анании Ширакаци.

В XV—XVIII вв. положение армянского народа было очень тяжелым. Ему грозило полное разорение вследствие опустошительных войн между Персией и Турцией за владение территорией Армении. Лишь с утверждением русского влияния в Закавказье возобновилось развитие экономики и культуры Армении. Однако вся система просвещения была в руках церкви, боровшейся со всякими проявлениями «светской» мысли. Таким образом, и для Армении средневековье затянулось на несколько столетий. С большой задержкой проникали в нее сведения о достижениях науки нового времени.

Армянская математическая литература XV—XVIII вв. в основном представлена учебниками. В Матенадаране хранятся математические рукописи XV в. арифметического содержания. В одной из них (рукопись № 1711, 1463 г.) приведен своеобразный способ умножения однозначных чисел. Он поясняется на примере умножения 6 на 7:

- 1) сложи числа: $6 + 7 = 13$;
- 2) десятки полученного числа умножь на его единицы: $10 \times 3 = 30$;
- 3) из 10 вычти первый сомножитель: $10 - 6 = 4$;
- 4) из 10 вычти второй сомножитель: $10 - 7 = 3$;
- 5) последние два результата перемножь: $3 \times 4 = 12$, произведение добавь к числу, полученному в 2), $30 + 12 = 42$.

Сохранились рукописи XVII и XVIII вв., содержащие либо отрывки из учебников арифметики, либо довольно полный курс арифметики с коммерческим уклоном. В рукописях XVIII в. новыми являются сведения об искусстве счисления у русских, о русских мерах и деньгах.

Сохранились также рукописи с научным уклоном. Важнейшая из них — труд в нескольких томах Аветика Тигранакертци «Книга записей». Автор работал над ней с 1684 по 1709 г. За это время он побывал во многих странах, где изучал науки. В сочинении изложены вопросы математики, астрономии, географии и других наук, описан ряд инструментов, в том числе астролябия.

Первая печатная книга по математике на армянском языке вышла в Марселе в 1675 г. Это — «Искусство счисления», учебник арифметики, предназначенный, видимо, для армянских купцов. Определения и терминология в основном совпадают с определениями и терминологией учебников Таке, Фаульгабера и Магницкого.

В XVIII в. были напечатаны следующие учебные книги по математике: «Арифметические таблицы» (1711 г., Венеция), «Арифметика» С. Агамаянца (1781 г., Венеция), «Краткая арифметика» Х. Сурмеляна (1788 г., Венеция), первая печатная книга по геометрии «Гео-

метрия» С. Петроняна (1794 г., Венеция). Почти все они написаны на древнеармянском языке.

По содержанию и методике изложения эти учебники стоят примерно на уровне учебной математической литературы России и Западной Европы XVIII в. Они способствовали, разумеется, приобщению армян к математическим знаниям. Не случайно они печатались за пределами Армении, в заграничных армянских колониях. Дело не только в том, что Армения находилась под турецким гнетом, но и в том, что эчмиадзинский католикосат монополизировал печатное дело и использовал свою типографию для издания преимущественно религиозной литературы.



Математические знания закавказских народов — грузин, армян и азербайджанцев — развивались в тесной связи с математикой соседних стран — Средней Азии, Византии, Сирии, Ирака, а затем России. Комплекс математических знаний у населения древнейших государственных образований Закавказья, государств Урарту и Манна, по-видимому, соответствовал тем знаниям, которые были обычны для малоазиатских народов I тысячелетия до н. э. — вавилонян, ассирийцев, эламитов, хеттов. О достижениях этих народов можно судить по сохранившимся до нашего времени записям на клинописных вавилонских и ассирийских таблицах.

Эпоха до арабского завоевания характеризуется проникновением в Закавказье через Византию и Сирию математических знаний времен позднего эллинизма. Среди работ известного армянского энциклопедиста VII в. Анании Ширакаци были и чисто математические произведения. Так, ему принадлежит древнейший из известных в настоящее время учебник арифметики.

После арабского завоевания значительные связи устанавливаются между закавказскими учеными и учеными Средней Азии. Выдающийся азербайджанский математик и астроном XIII в. Насираддин ат-Туси усовершенствовал расчетные методы, предложенные среднеазиатскими и иранскими учеными, и выделил тригонометрию как самостоятельную дисциплину. Грузинский философ и ученый XII в. Иоане Петрици комментировал труды Прокла. В XI в. были переведены на армянский язык «Начала» Евклида. Грузинские и армянские ученые IX—XIV вв. ориентировались в своих трудах на византийскую науку и культуру.

Бесконечные захватнические и феодальные войны, разорявшие страны Закавказья на протяжении XV—XVIII вв., тормозили развитие математической культуры, и она пришла в упадок. Правда, в этот период математика сохранялась как предмет школьного преподавания в армянских и грузинских академиях и в азербайджанских медресе, но объем ее был незначителен и преподавалась она в сугубо практических целях. Только соединение с Россией и влияние русской математической культуры в корне изменило и развило математическое образование закавказских народов.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Общая литература

Классики марксизма-ленинизма

- Маркс К. К критике политической экономии. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 13.
- Маркс К. Капитал. Кн. 1. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 23.
- Маркс К. Математические рукописи. — Под знаменем Марксизма, 1933, № 1.
- Маркс К. и Энгельс Ф. Манифест Коммунистической партии. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 4.
- Энгельс Ф. Анти-Дюринг. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 20.
- Энгельс Ф. Диалектика природы. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 20.
- Энгельс Ф. Происхождение семьи, частной собственности и государства. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 21.
- Ленин В. И. Левонародничество и марксизм. — Полн. собр. соч. Т. 25.
- Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч. Т. 18.
- Ленин В. И. Развитие капитализма в России. — Полн. собр. соч. Т. 3.
- Ленин В. И. Философские тетради. — Полн. собр. соч. Т. 29.
- Ленин В. И. Что такое «друзья народа» и как они воюют против социал-демократов? — Полн. собр. соч. Т. 1.

Общенсторическая литература

- Архангельский А. Образование и литература в Московском государстве конца XV—XVII вв. — В кн.: Ученые записки Казанского университета. Кн. 7—8, 1898.
- Асоченский В. И. Киев с древнейшим его училищем академиею. Ч. 1, 2. К., 1856.
- Белькинд Л. Д., Конфедератов И. Я. и Шнейберг Я. А. История техники. Госэнергоиздат, М.—Л., 1956.
- Булгаков М. История Киевской академии. СПб, 1843.
- Витневский Д. Киевская академия в первой половине XVIII столетия. Т. 1. Ч. 1. К., 1903.
- Голубев С. Т. История Киевской духовной академии. Вып. 1. К., 1886.
- Голубев С. Т. Приложение к сочинению: «Киевский митрополит Петр Могила и его сподвижники». Т. 1. К., 1883.
- Греков Б. Д. Киевская Русь. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944.
- Даденков М. Ф. Історія педагогіки. «Радянська школа», К.—Хрк., 1947.
- Данилевский В. В. Русская техника. Изд-во АН СССР, Л., 1948.
- Даннеман Ф. История естествознания. Т. 2, 3. ОНТИ, М.—Л., 1936—1938.

- Иконников В. С. Опыт исследования о культурном значении Византии в русской истории. К., 1869.
- История Академии наук СССР. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958.
- История Белорусской ССР. Под общ. ред. Л. С. Абецедарского. Т. 1. Изд-во АН БССР, Минск, 1961.
- История естествознания в России. Т. 1. Ч. 1. Изд-во АН СССР, М., 1957.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1917—1947). Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1948—1950). Изд-во АН СССР, М., 1955.
- История культуры древней Руси. Т. 1. Под ред. Н. Н. Воронина, М. К. Каргера. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951.
- История педагогики. Под ред. Н. А. Константинова. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- История Польши. Под ред. В. Д. Королюка. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- История русской литературы. Под ред. Д. Д. Благого. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958.
- История СССР. Под ред. Б. Д. Грекова. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1956.
- История Украинской ССР. Т. 1. Изд-во АН УССР, К., 1953.
- История философии. Под ред. М. А. Дынина. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1957.
- К а р а м з и н Н. М. История Государства Российского. Изд. 1-е. Т. 1—8. СПб, 1816—1817. Изд. 2-е. Т. 1—12. СПб, 1818—1829.
- К л ю ч е в с к и й В. О. Курс русской истории. Ч. 1—4. — В кн.: К л ю ч е в с к и й В. О. Сочинения. Т. 1—4. Соцэкгиз, М., 1957—1958.
- К р о т о в А. Морской кадетский корпус. СПб, 1901.
- К у з н е ц о в Б. Г. Очерки истории русской науки. Изд-во АН СССР, М., 1940.
- Л а в р о в с к и й П. А. О древнерусских училищах. Харьков, 1854.
- Л а з а р е в П. П. Очерки истории русской науки. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
- Л а п п о - Д а н и л е в с к и й А. Организация прямого обложения в Московском государстве со времен смуты до эпохи преобразования. СПб, 1890.
- Л и х а ч е в Д. С. Культура Руси эпохи образования русского национального государства. Госполитиздат, М., 1946.
- М и л ю к о в П. Н. Спорные вопросы финансовой истории Московского государства. СПб, 1892.
- М о р д о в ц е в Д. О русских школьных книгах XVII в. — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 4. М., 1861.
- Н е к р а с о в А. И. Древнерусское зодчество XI—XVII вв. Изд-во Всесоюзной Академии архитектуры, М., 1936.
- Н е у с т р о е в А. Историческое разыскание о русских повременных изданиях и сборниках за 1703—1802 гг. СПб, 1875.
- Очерки истории Ленинграда. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1955.
- Очерки истории СССР. Период феодализма. IX—XV вв. (в двух частях). Под ред. Б. Д. Грекова и др. Ч. 1. IX—XIII вв. Древняя Русь. Феодальная раздробленность. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- Очерки истории СССР. Период феодализма. IX—XV вв. (в двух частях). Ч. 2. XIV—XV вв. Под ред. А. Н. Насонова и др. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- Очерки истории СССР. Период феодализма. Конец XV в.—начало XVII в. Под ред. А. Н. Насонова и др. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- Очерки истории СССР. Период феодализма. XVII в. Под ред. А. Н. Насонова и др. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- Очерки истории СССР. Период феодализма. Россия в первой четверти XVIII в. Преобразования Петра I. Под ред. А. Н. Насонова и др. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- П е к а р с к и й П. П. История Императорской Академии наук. Т. 1, 2. СПб, 1870—1873.
- П е к а р с к и й П. П. Наука и литература в России при Петре Великом. Т. 1, 2. СПб, 1862.
- П е т р о в Н. И. Очерк истории православной духовной школы на Волыни. — В кн.: Труды Киевской духовной академии. Т. 2. К., 1867.

- Погодин М. П. Образование и грамотность в древнем периоде русской истории.— Журнал Министерства народного просвещения, 1871, № 1—2.
- Полное собрание русских летописей. Т. 2. СПб, 1843. Т. 7, СПб, 1856.
- Райков Б. Е. Очерки по истории гелиоцентрического мировоззрения в России. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1937.
- Райнов Т. И. Наука в России XI—XVII вв. Ч. 1—3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940.
- Райнов Т. И. О роли русского флота в развитии естествознания XVIII в.— В кн.: Труды Института естествознания АН СССР. Т. 1. М., 1947.
- Райнов Т. И. Очерки истории представлений о природе в русской литературе XI—XVIII вв. Т. 1. XI—XVI вв. Изд-во АН СССР, М., 1940.
- Рыбаков Б. А. Ремесло Древней Руси. Изд-во АН СССР, М., 1948.
- Рыбаков Б. А. Русские системы мер длины XI—XV вв.— Советская этнография, 1949, № 1.
- Смирнов С. История Московской славяно-греко-латинской академии. М., 1855.
- Соловьев С. М. История России с древнейших времен. В 15-ти кн. Соцэкгиз, М., 1959—1964.
- Сухомлинов М. История Российской академии наук. Вып. 2, 3. СПб, 1875—1876.
- Таннери П. Исторический очерк развития естествознания в Европе. Гостехиздат, М.—Л., 1934.
- Черепнин Л. В. Русские феодальные архивы XIV—XV вв. Ч. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
- Шахманов А. А. Обзорные русские летописные своды XIV—XVI вв. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1938.
- Kurdubacha L. Z dziejów pedagogiki ariańskiej. Warszawa, 1958.
- Lukaszewicz J. Historia szkół w Koronie i w Wielkim Księstwie Litewskiem od najdawniejszych czasów aż do roku 1794, T. 1—4. Poznań, 1849—1851.

Литература по истории физико-математических наук

- Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П. Л. Эйлер.— В кн.: Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961.
- Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П. Леонард Эйлер.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- Белюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Учпедгиз, М., 1940.
- Берри А. Краткая история астрономии. ОГИЗ, М.—Л., 1946.
- Бобынин В. В. Очерки истории развития физико-математических знаний в России. XVII в. Вып. 1. М., 1886. Вып. 2. М., 1893.
- Бобынин В. В. Русская физико-математическая библиография. Т. 1—3 (до 1816 г.). М., 1885—1897.
- Бобынин В. В. Состояние математических знаний в России до XVI века.— Журнал Министерства народного просвещения, 1884, № 4.
- Бобынин В. В. Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века.— Журнал Министерства народного просвещения, 1907, № 11; 1908, № 1—2.
- Боев Г. П. Лекции по истории математики. Ч. 1. Изд-во Саратовского университета, 1956.
- Бутаков П. Г. Объяснение русских старинных мер — литейной и путевой.— Журнал Министерства внутренних дел, 1884, кн. 8.
- Васильев А. В. Математика. Вып. 1 (1725—1863). Очерк истории математики в России до начала 60-х годов XIX в. Петроград, 1921.
- Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. Петроград, 1922.
- Ващенко-Захарченко М. Е. История математики. Т. 1. К., 1883.
- Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. Под ред. А. П. Юшкевича. Физматгиз, М., 1960.
- Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. ОНТИ, М.—Л., 1935.

- Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. ГТТИ, М.—Л., 1941.
- Галанин Д. Д. История методических идей по арифметике в России. Ч. 1. М., 1915.
- Гнеденко Б. В. Краткие беседы о зарождении и развитии математики. Изд-во АПН РСФСР, М., 1946.
- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. ГИТТЛ, М.—Л., 1946.
- Григорьян А. Т. Очерки истории механики в России. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Григорьян А. Т. и Зубов В. П. Очерки развития основных понятий механики. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
- Делоне Б. Н. Развитие теории чисел в России.— В кн.: Ученые записки Московского университета. Т. 1. Кн. 1. Вып. 91, 1947.
- Депман И. Я. История арифметики. Учпедгиз, М., 1959.
- Динзе О. В. и Шафрановский К. И. Математика в изданиях Академии наук СССР. 1728—1935. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936.
- Зубов В. П. Из истории средневековой атомистики.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 1. М.—Л., 1947.
- Зутер Г. История математических наук. Пер. с нем. СПб, 1905.
- Кауфман И. И. Русский вес, его развитие и происхождение. СПб, 1906.
- Колмогоров А. Н. Математика.— БСЭ. Изд. 2-е. Т. 26.
- Кольман Э. Вклад Эйлера в развитие математики в России.— В кн.: Вопросы истории естествознания и техники. Вып. 4. Изд-во АН СССР, М., 1957.
- Кольман Э. История математики в древности. Физматгиз, М., 1961.
- Копелевич Ю. Х. Материалы к биографии Леонарда Эйлера.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Копелевич Ю. Х. Переписка Л. Эйлера и Я. В. Брюса.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Космодемьянский А. А. Очерки по истории теоретической механики в России.— В кн.: Ученые записки Московского университета. Т. 2. Вып. 122, 1948.
- Кострюков К. И. Об одной попытке издать труды Леонарда Эйлера.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- Котек В. В. Леонард Эйлер. Учпедгиз, М., 1961.
- Кравчук М. Ф. Влияние Эйлера на дальнейший розвиток математики. Вид-во ВУАН, К., 1935.
- Красоткина Т. А. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Крылов А. Н. Леонард Эйлер.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
- Кудрявцев П. С. История физики. Т. 1. Учпедгиз, М., 1948.
- Кудрявцев П. С. и Конфедератов И. Я. История физики и техники. Учпедгиз, М., 1960.
- Кузнецов Б. Г. Развитие научной картины мира в физике 17—18 вв. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- Кузнецов Б. Г. Развитие учения об электричестве в русской науке XVIII в.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 19. М., 1957.
- Кузнецов С. К. Древнерусская метрология. Малых на Вятке, 1913.
- Кэджори Ф. История элементарной математики. Перев. с англ., ред. и прим. И. Ю. Тимченко. Изд. 2-е. Одесса, 1917.
- Лауэ М. История физики. Гостехиздат, М., 1956.
- Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Под ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.

- Л и т в и н о в а Е. Ф. Лаплас и Эйлер, их жизнь и научная деятельность. СПб, 1892.
- Л у з и н Н. Н. Эйлер.— Социалистическая реконструкция и наука, 1933, № 8.
- Л у р ь е С. Я. Неопубликованная научная переписка Эйлера. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М., 1935.
- Математика в СССР за тридцать лет. ГТТИ, М.—Л., 1948.
- Математика в СССР за сорок лет. Т. 1, 2. Физматгиз, 1959.
- М и х а й л о в Г. К. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР. (Общее описание и заметки по механике.)— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- М о и с е е в Н. Д. Очерки развития механики. Изд-во Московского университета, М., 1961.
- М о л о д ш и й В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. Учпедгиз, М., 1963.
- М о л о д ш и й В. Н. Учение о натуральных числах в XVIII веке.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М.—Л., 1950.
- Н е й г е б а у э р О. Лекции по истории античных математических наук. ОНТИ, М.—Л., 1937.
- Н и к и т с к и й А. И. К вопросу о мерах в древней Руси.— Журнал Министерства народного просвещения, 1894, № 4.
- О т р а д н ы х Ф. П. Курс истории математики. Изд-во Ленинградского университета, Л., 1951.
- О т р а д н ы х Ф. П. Математика XVIII века и академик Леонард Эйлер. «Советская наука», М., 1954.
- П р о з о р о в с к и й Д. И. Древняя русская меры жидкостей.— Журнал Министерства народного просвещения, 1854, № 3.
- П р о з о р о в с к и й Д. И. О старинном русском счислении часов. — В кн.: Труды 2-го археологического съезда. Вып. 2. СПб, 1884.
- П р у д н и к о в В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. Учпедгиз, М., 1956.
- Р о з е н б е р г е р Ф. История физики. Ч. 2. Гостехиздат, М.—Л., 1933.
- Р ы б н и к о в К. А. История математики. Т. 1, 2. Изд-во Московского университета, М., 1960—1963.
- С а т к е в и ч А. А. Леонард Эйлер.— Русская старина, 1907, декабрь.
- С м и р н о в И. И. К вопросу о мерах в Московском государстве XVI в.— В кн.: Ученые записки Ленинградского университета. Серия исторических наук. Вып. 5, № 48, 1939.
- С о к о л о в Ю. Д. Основні праці Леонарда Ейлера в галузі аналізу нескінченно малих та теорії чисел.— У кн.: Историко-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- С п а с с к и й Б. И. История физики. Ч. 1. Изд-во Московского университета, М., 1956.
- С у ш к е в и ч А. К. Обозначения чисел у разных народов.— Математика в школе, 1948, № 4.
- Т р о п ф к е И. История элементарной математики в систематическом изложении. Т. 1. Арифметика и алгебра. М., 1914.
- Т ю л и н а И. А. и Р а к ч е е в Е. Н. История механики. Изд-во Московского университета, М., 1962.
- У с т ю г о в Н. В. Очерк древнерусской метрологии.— Исторические записки, 1946, № 19.
- Ф а ц ц а р и Г. Краткая история математики с древнейших времен, кончая средними веками. Пер. с ит. «Задруга», М., 1923.
- Ф е с е н к о в В. Г. Очерк истории астрономии в России в XVII и XVIII столетиях.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2 — 3. М., 1948.
- Ц е й т е н Г. Г. История математики в древности и в средние века. ГТТИ, М.—Л., 1932. Изд. 2-е, 1938.
- Ч е р е п н и н Л. В. Русская метрология. Изд-во АН СССР, М., 1944.

- Швецов К. И. Перший російський підручник з математики. «Радянська школа», К., 1959.
- Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. Учпедгиз, М., 1940.
- Юшкевич А. П. История математики в средние века. Физматгиз, М., 1960.
- Юшкевич А. П. Математика и ее преподавание в России XVII—XIX веков.— Математика в школе, 1947, № 1—6; 1948, № 1—5; 1949, № 1, 3.
- Юшкевич А. П. Эйлер и русская математика в XVIII ст.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 3, М., 1949.
- Archibald R. C. Outline of the history of mathematics. 6 ed. Oberlin, Ohio, 1949.
- Ball W. W. R. A short account of the history of mathematics. London, 1893.
- Bell E. T. Men of mathematics. New York, 1937.
- Bell E. T. The development of mathematics. 2 ed. New York — London, 1945.
- Beugheem C. Bibliographia mathematica. Amsterdam, 1688.
- Bortolotti E. Storia della matematica elementare. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. T. 3. P. 2. Milano, 1950.
- Boutroux P. L'idéal scientifique des mathématiciens. Paris, 1920.
- Braunmühl A. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Leipzig, 1900.
- Brunschwig L., Les étapes de la philosophie mathématique. 3 ed. Paris, 1929.
- Cajory F. A history of mathematical notations. V. 1, 2. New York, 1928—1929.
- Cajory F. A history of mathematics. 2 ed. New York, 1929.
- Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd 1 (bis 1200). Bd 2 (1200—1668). Bd 3 (1668—1758). Bd 4 (1759—1799). 3 Aufl. Leipzig, 1907—1913.
- Condorcet M. J. A. Eloge d'Euler. Strassbourg, 1786.
- Dampier W. C. A history of science and its relations with philosophy and religion. London, 1942.
- Dianni J. i Wachulka A. Z dziejów polskiej myśli matematycznej. Warszawa, 1957.
- Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. T. 1—3. Milano, 1930—1950.
- Encyclopédie des sciences mathématiques. Paris—Leipzig, 1904 etc.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd 1—6. Leipzig, 1898—1934.
- Fuss P. N. Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18-eme siècle. St Petersburg, 1843.
- Fütter R. Leonhard Euler. Basel, 1948.
- Grosse H. Historische Rechenbücher des 16 und 17 Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit. Leipzig, 1901.
- Hankel H. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
- Hoffman J. E. Geschichte der Mathematik. T. 3. Berlin, 1957.
- Hoppe E. Geschichte der Physik. Braunschweig, 1926.
- Loria G. Guida allo studio della storia delle matematiche. 2 ed. Milano, 1946.
- Loria G. Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX. 2 ed. Milano, 1950.
- Marczewski E. Rozwój matematyki w Polsce. Kraków, 1948.
- Müller F. Gedenktagebuch für Mathematik. 3 Aufl. Leipzig, 1912.
- Müller F. Über bahnbrechende Arbeiten Leonard Eulers aus dem reinen Mathematik, Festschrift zur Feier des 200 Geburtstages L. Eulers. Leipzig — Berlin, 1907.
- Poggendorf J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Bd 1 (A — L), 2 (M — Z). Leipzig, 1863.
- Sarton G., Appreciation of ancient and medievat science during the Renaissance (1450—1600). Philadelphia, 1953.
- Sarton G. Introduction to the history of science. V 1—3. Baltimore, 1927—1948.
- Sarton G. The study of the history of mathematics. Cambridge, 1936.
- Smith D. E. History of mathematics. V. 1, 2. 2 ed. Boston — London, 1928—1930.
- Spieß O. Leonhard Euler. Ein Beitrag zum Geistesgeschichte des 18 Jahrhunderts. Leipzig, 1929.

- Stäckel P. Varierte Kurven bei Daniel Bernoulli und Leonhard Euler.— Arch. für Gesch. d. Naturwiss. u. Technik. Bd 1, 1909.
- Struik D. F. A concise history of mathematics. V. 1, 2. New York, 1948.
- Tropfke J. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Bd 1—7. Berlin—Leipzig, 1921—1924.
- Unger F. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig, 1888.
- Whewell W. History of the inductive sciences. V. 1. London, 1858.
- Zeller M. C. The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. Ann-Arbor, 1946.
- Zebrowski T. Bibliografia piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki. Kraków, 1873.

Источники и источниковедение

- Азанов Д. В. Алфавитный каталог рукописных книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени (1862—1908). Оренбург, 1908.
- Акты исторические, собранные и изданные Археографической комиссией. Т. 1—5. СПб, 1841—1842.
- Акты археографической экспедиции Императорской Академии наук. Т. 1—4. СПб, 1836.
- Акты юридические или Собрание форм старинного делопроизводства. Изд. Археографической комиссии. СПб, 1838.
- Артемьев А. И. Описание рукописей, хранящихся в библиотеке Казанского университета. СПб, 1882.
- Барсуков Н. Рукописи Археографической комиссии. М., 1870.
- Бодянский О. Библиотека Императорского Общества истории и древностей российских. М., 1845.
- Бычков И. А. Каталог хранящихся в Императорской публичной библиотеке изданий, напечатанных гражданским шрифтом при Петре Великом. СПб, 1897.
- Викторов А. И. Каталог славяно-русских рукописей. М., 1871.
- Викторов А. Е. Собрание рукописей И. Д. Беляева. М., 1881.
- Востоков А. Х. Описание русских и славянских рукописей Румянцевского музея. СПб, 1842.
- Временник Императорского Московского общества истории и древностей российских. Кн. 17. М., 1853.
- Георгиевский Г. П. Собрание Н. С. Тихонравова. М., 1913.
- Георгиевский Г. П. Рукописи Т. Ф. Большакова, хранящиеся в Московском и Румянцевском музеях. Петроград, 1915.
- Голубев И. Ф. Коллекция рукописей Государственного архива Калининской области. Краткий обзор. Калинин, 1960.
- Горский А. Описание славянских рукописей Московской синодальной библиотеки. М., 1855—1869.
- Каразин В. Каталог славяно-русским рукописям (погибшим в 1812 г.) проф. Баузе. — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 28. М., 1812.
- Каратаев Н. Хронологическая рукопись славянских книг, напечатанных кирилловскими буквами (1491—1730). СПб, 1861.
- Каратаев Н. Описание славяно-русских книг, напечатанных кирилловскими буквами (1491—1652), 1883.
- Каталог Патриаршей библиотеки, составленный в 1718 г. Изд. Императорского Общества любителей древней письменности. СПб, 1849.
- Коллайдович К. Известия о древностях славяно-русских... Материалы для истории русской книжной торговли. СПб, 1879.
- Краткий отчет рукописного отдела за 1914—1938 гг. Со вступительным историческим очерком. Под ред. Т. К. Ухмыловой и В. Г. Геймана. Л., 1940.
- Лебедев А. Рукописи церковно-археологического музея Императорской Киевской духовной академии. Т. 1. Саратов, 1916.

- Л о п а р е в Х. Описание рукописей Императорского Общества любителей древней письменности. СПб. Ч. 1, 1892. Ч. 2, 1893. Ч. 3, 1899.
- М а с л о в С. И. Обзор рукописей библиотеки Императорского Университета св. Владимира. К., 1910.
- Обстоятельное описание славяно-русских рукописей Ф. А. Толстого. М., 1825. Памятники древней письменности. СПб, 1878—1879.
- П е т р о в Н. И. Описание рукописных собраний, находящихся в г. Киеве. М. Вып. 1, 1891. Вып. 2, 1896. Вып. 3, 1904.
- П е т р о в Н. И. Книги гражданской печати XVIII в. Изд-во АН УССР, К., 1956.
- П о к р о в с к и й А. А. Древнее Псковско-Новгородское письменное наследие. Обзор пергаментных рукописей Типографской и Патриаршей библиотек. — В кн.: Труды XV Археологического съезда в Новгороде. Т. 2. М., 1916.
- П р и с е л к о в М. Д. История русского летописания XI—XV вв. Изд-во Ленинградского университета, 1940.
- С о б о л е в с к и й А. И. Переводная литература Московской Руси XIV—XVII вв. СПб, 1903.
- С о б о л е в с к и й А. И. Образованность Московской Руси XV—XVII вв. СПб, 1892.
- С т р о е в П. Библиотека Императорского Общества истории и древностей российских. М., 1845.
- Судебники XV—XVI вв. Под ред. Б. Д. Грекова. Изд-во АН СССР, М., 1952.
- Ш в е ц о в К. І. Бібліографія староруських математичних рукописів. — У кн.: Наукові записки Станіславського педагогічного інституту. Серія фізики та математики. Вип. 1. «Радянська школа», К., 1955.
- Ш в е ц о в К. І. Староруські математичні пам'ятники IX—XVI ст. — У кн.: Наукові записки Миколаївського педагогічного інституту. Вип. 5. «Радянська школа», К., 1956.

2. Литература к главам

К главам I и II

- А н д р и а н о в В. К литературной истории «Толковой палей». К., 1910.
- А р ц и х о в с к и й А. В. и Т и х о м и р о в М. Н. Новгородские грамоты на бересте (из раскопок 1951 г.). Изд-во АН СССР, М., 1953.
- А р ц и х о в с к и й А. В. Новгородские грамоты на бересте (из раскопок 1952 г.). Изд-во АН СССР, М., 1954.
- А ф а н а с ь е в К. Н. Геометрический анализ храма св. Софии в Константинополе. — Византийский временник, 1952, т. 5.
- А ф а н а с ь е в К. М. Про пропорціональність пам'ятників древнеруської архітектури XI—XII ст. — У кн.: Архітектурні пам'ятники. Збірник наукових праць. Вид-во Академії архітектури УРСР, К., 1950.
- Б а ш м а к о в а И. Г. и Ю ш к е в и ч А. П. Происхождение систем счисления. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики. Под ред. П. С. Александрова и др. Кн. 1. Арифметика. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- Б о д я н с к и й О. М. О времени происхождения славянских письмен. М., 1855.
- [Б о л о х в и т и н о в] Евгений. Сведения о Кирике, предлагавшем вопросы Нифонту — епископу Новгородскому. — В кн.: Труды Общества любителей российской словесности при Императорском Московском университете. Ч. 4. Кн. 1, 1828.
- З у б о в В. П. Кирик Новгородец и древнерусские деления часа. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- З у б о в В. П. Примечания к «Наставлению, как человеку познать счисление лет» Кирика Новгородца. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- И с т о м и н К. К. К вопросу о редакциях «Толковой палей». — В кн.: Известия отделения русского языка и словесности Академии наук. Т. 10. Кн. 1. СПб, 1913.

- Истрин В. М. Замечания о составе «Толковой палей». — В кн.: Известия отделения русского языка и словесности Академии наук. Т. 2. Кн. 6. СПб., 1898.
- Каргер М. К. Памятники Переяславского зодчества XI—XVI вв. — Советская археология, 1951, т. 15.
- Качалов Н. Исследования о «Русской правде». Ч. 1. М., 1846. Изд. 2-е. СПб, 1880.
- Колайдovich К. Иоанн экзарх Болгарский. М., 1824.
- Максимов П. Опыт исследования пропорций в древнерусской архитектуре. — Архитектура СССР, 1940, № 1.
- Майстров Л. Е. О математических знаках и терминах, встречающихся в археологических памятниках древней Руси. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Михайлов А. В. К вопросу о происхождении и литературных источниках «Толковой палей». — В кн.: Известия отделения русского языка и словесности Академии наук. Т. 1. Кн. 1. СПб., 1828.
- «Палей толковая» по списку, сделанному в г. Коломне в 1406 г. М., 1892.
- Правда Русская. Комментарии под ред. Б. Д. Грекова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
- Прудников В. Е. Об одной русской математической рукописи XVII в. — Математика в школе, 1951, № 2.
- Редин Е. К. Христианская топография Козьмы Индикоплова по греческим и русским спискам. Ч. 1. М., 1916.
- Рыбаков Б. А. Архитектурная математика древнерусских зодчих. — Советская археология, 1957, т. 1.
- «Русская Правда». Тексты под ред. Юшкова С. К., 1935.
- «Русская Правда». Тексты под ред. Б. Д. Грекова. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1940.
- Соколов М. И. Славянская книга Еноха Праведного. Тексты, латинский перевод и исследования. М., 1910.
- Спицын А. Тмутараканский камень. — В кн.: Записки отделения русской и славянской археологии Императорского Русского археологического общества. Т. 11. Вып. 2. СПб, 1915.
- Степанов Н. В. Заметки о хронологической статье Кирика (XII в.). — В кн.: Известия отделения русского языка и словесности Академии наук. Т. 15. Кн. 3. СПб, 1910.
- Срезневский И. Сведения о некоторых неизвестных и заметки о малоизвестных памятниках. СПб, 1867.
- Срезневский И. Обзорение древних русских списков Кормчей книги. СПб, 1897.
- Филиппов А. И. О славянской нумерации. — Математическое образование, 1913, № 3.
- Хавский П. Примечания на русские хронологические вычисления XII в. — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 6. М., 1847.
- Хавский П. Дополнительная выписка из вычислений Кирика (XII в.). — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 6. М., 1847.
- Швецов К. И. Славянская нумерация. — Математика в школе, 1952, № 2.
- Юшкевич А. П. О некоторых статьях «Правды Русской». — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2. М., 1948.
- Dehio G. Untersuchungen über das gleichseitige Dreieck als Norm Gotischer Proportionen. Stuttgart, 1894.

К главе III

- Аристотель. Метафизика. Перев. и примеч. А. В. Кубицкого. Соцэкгиз, М.—Л., 1934.
- Белокуров С. А. Московский печатный двор в 1649 г. — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 4. Отд. 4. М., 1877.

- Будовниц И. У. Русская публицистика XVI в. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
- Веселовский С. Б. Сошное письмо. Т. 2. М., 1916.
- Викторов А. Е. Не было ли в Москве опытов книгопечатания прежде первопечатного Апостола 1564 г.? — В кн.: Труды III Археологического съезда в Киеве в 1874 г. Т. 2. К., 1878.
- Зубов В. П. Вопрос о «неделимых» и бесконечном в древнерусском литературном памятнике XV века. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М.—Л., 1950.
- Иосиф Волоцкий [Санин]. Просветитель. Изд. 3-е. Казань, 1896 (о пасхалиях).
- Казанская история. Историческая повесть 16-го века. Под ред. В. П. Адриановой-Перетц. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954.
- Ключевский В. О. Сочинения. В 8-ми томах. Госполитиздат. М., 1956—1959.
- Книжка описательная, како молодым людям торг вести и знати всему цену (с предисловием издания Сахаровым И. П.). — В кн.: Записки отделения русской и славянской археологии Императорского Русского археологического общества. Т. 1. Отд. 3. 1851.
- Костомаров Н. И. Собрание сочинений. Кн. 3. Т. 7—8. СПб, 1904.
- Лапшина Р. П. Феодосий Косой — идеолог крестьянства XVI в. — В кн.: Труды отделения древнерусской литературы. Институт русской литературы АН СССР. Т. 9. М., 1953.
- Маневский А. Д. Возникновение книгопечатания на Руси. Государственный исторический музей. М., 1939.
- Новосадский Л. В. Возникновение печатной книги в России XVI в. — В кн.: Иван Федоров — первопечатник. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
- Ржигла В. Ф. Литературная деятельность Ермолая Эразма. — В кн.: Летопись занятий Археологической комиссии. Вып. 33. Изд-во АН СССР, М., 1926.
- Святский Д. О. Астрономическая книга «Шестокрыл» на Руси XV в. — Мироведение, 1927, Т. 16, № 2.
- Степенная книга «Сказание о святом благочестем русских началодержец и исемеми их святого и прочих». М., 1755.
- Торговые книги. — В кн.: Временник Императорского Московского Общества истории и древностей российских. Кн. 8, 1850.
- Швецов К. І. Математика Російської централізованої держави. — У кн.: Наукові записки Науково-дослідного інституту педагогіки УРСР. Т. 18. Фізико-математична серія. Вып. 3. «Радянська школа», К., 1962.
- «Шестоднев». — В кн.: Чтения в Императорском Обществе истории и древностей российских при Московском университете. Кн. 3. М., 1879.

К главе IV

- Букварь Ивана Федорова. 1574 (фотокопия). — Harvard Library Bulletin, 1955, V. 11.
- Варченко А. М. Украинская национальная школа конца XVI и начала XVII столетия. — Советская педагогика, 1941, № 6.
- Викторов А. Е. Не было ли в Москве опытов книгопечатания прежде первопечатного Апостола 1564 г.? — В кн.: Труды III Археологического съезда в Киеве в 1874 г. Т. 2. К., 1878.
- Даденков М. Ф. Школа на Україні в XVI—XVII ст. у боротьбі народу за возз'єднання України з Росією. — Радянська школа, 1954, № 5.
- Илие Попа. Из истории математики в Румынии. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.
- Медынский Е. Н. Братские школы Украины и Белоруссии в XVI—XVII вв. и их роль в воссоединении Украины с Россией. Изд-во АПН РСФСР, М., 1954.
- Петров Н. И. Очерк истории православной духовной школы на Волыни. — В кн.: Труды Киевской духовной академии. Т. 2. К., 1867.
- Сokolov И. Отношение протестантизма к России в XVI и XVII веках. М., 1880.

- Ужгородський «Полустав» у пергаментовій рукописі XIV ст.— У кн.: Записки Наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка. Т. 141—143. Праці фільологічної секції. Львів, 1925.
- Харламович К. Западнорусские православные школы XVI и начала XVII века. Казань, 1898.
- Хічій О. Ф. Про «лінійну арифметику» XVI ст. та її автора Бенедикта Гербеста.— В кн.: Доклады и сообщения Ужгородского университета. Серия физико-математических и исторических наук. № 5, 1962.
- Хічій О. Ф. і Швецов К. І. Математика у василіяньських школах України в другій половині XVIII ст.— В кн.: Доклады и сообщения Ужгородского университета. Серия физико-математических и исторических наук. № 5, 1962.
- Варанієскі М. А. Arytmetyka. Warszawa, 1884.
- Broscius J. Arithmetica integrorum. Cracoviae, 1620.
- Farmancovic J. S. Arithmetica practica bipartita generalis numerorum et specialis. Cracoviae, 1669.
- Grzepski S. Geometria to jest miernicka nauka. Wroclaw, 1957.
- Klatowski O. Nowe knyżky wo Poctech na Cyfry (a na Liny)... Praha, 1553.
- Kłos T. Algorithmus to jest nauka liczby polską rzeczą wydana. Kraków, 1538.
- De Lanczut J. Algorithmus linealis cum pulchris conditionibus duarum regularum De Tri, una de integris, altera vero de fractis, regulique socialibus et semper exemplis idoneis adiuntis. Cracoviae, 1515.
- Peurbach G. Elementa arithmetices, algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus. Cracoviae, 1536.
- Scharffenberg H. (edidit). Arithmetices introductio ex variis autoribus concinnata. Cracoviae, 1549.
- Sacro Bosco J. Algorithmus. Cracoviae, 1513.
- Schedel K. Nauki Arithmetyki księga... o liczbie rozumnej i dosknalej. Kraków, 1648.
- Schottus C. Cursus mathematicus, sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum Enciclopaedia in libros XXVIII digesta. Bambergae, 1677.
- Stegman J. Institutionum Mathematicarum Libri II quibus initia I Arithmeticae. II Geometriae pro incipientibus dilucide explicantur et ad praxin variae accomodantur. Racov, 1630.
- Tonsci J. Arithmetica vulgaris et Trigonometria... Cracoviae, 1645.
- Wojewódka B. Algorithm to jest nauka liczby. Kraków, 1553.

К главе V

- Астряб О. М. Викладання математики в Росії та на Україні в XVII—XVIII століттях.— У кн.: Записки Науково-дослідного інституту педагогіки УРСР. Т. 10. «Радянська школа», К., 1958.
- Башмакова И. Г. Арифметические книги «Начал» Евклида.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948.
- Баше Клод Гаспар. Игры и задачи, основанные на математике. Изд. Вольфа, 1877.
- Белый Ю. А., Швецов К. И. Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959.
- Выгодский М. Я. «Начала» Евклида.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948.
- Евклид. Начала. Перев. с гр. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. При редакционном участии И. Н. Веселовского. Гостехиздат, М.—Л. Кн. 1—6, 1948. Кн. 7—10, 1949. Кн. 11—15, 1950.
- Кикец Ю. А. Исторические сведения к разделу «Прогрессии».— Математика в школе, 1956, № 1.
- Лавровский П. А. О древнерусских училищах. Харьков, 1854.
- Рудио Ф. О квадратуре круга. Пер. с нем. Под ред. и с прим. С. Н. Бернштейна. Изд. 3-е. Гостехиздат, М.—Л., 1936.
- Спасский И. Г. Происхождение и история русских счетов.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952.

- «Счетная мудрость». Изд. Общества любителей древней письменности. СПб, 1879.
Устав ратных, пушечных и других дел. СПб. Ч. 1, 1777. Ч. 2, 1781.
- Феттер Гвидо. Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.
- Швецов К. И. Арифметичні задачі та методи їх розв'язання в російських рукописах XVII ст.— У кн.: Наукові записки Науково-дослідного інституту педагогіки УРСР. Т. 18. Вип. 3. «Радянська школа», К., 1961.
- Швецов К. И. К вопросу истории преподавания арифметики в России в XVII веке.— Математика в школе, 1957, № 6.
- Швецов К. И. Методика викладання арифметики цілих і дробових чисел в російських арифметичних рукописах XVII ст.— У кн.: Наукові записки Науково-дослідного інституту педагогіки УРСР. Т. 10. Фізико-математична серія. Вип. 1. «Радянська школа», К., 1958.
- Швецов К. И. О характерных чертах арифметических рукописей XVII столетия.— Математика в школе, 1954, № 5.
- Юшкевич А. П. Об одной задаче теории чисел в русских математических рукописях XVIII в.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 17. М., 1957.
- Barreме. Arithmétique ou le livre facile pour apprendre l'arithmétique de soi-même et sans maître. Paris, 1672.
- Bever J. H. Logistica decimalis. Frankfurt, 1619.
- Churchill W. A. Watermarks in papers in Holland, England, France etc. in the XVII and XVIII centuries and their interconnection. Amsterdam, 1955.
- Dechaies C. F. M. Cursus seu mundus mathematicus. T. 1—3. Leiden, 1674.
- Faulhaber J. Arithmetischer Wegweiser. Ulm, 1675.
- Kaestner A. G. Geschichte der Mathematik. T. 3. Göttingen, 1779.
- {O z a n a m}. L'arithmétique où toutes tes opérations de cette science sont démontrée par une methode fort simple, et appliqué à la guerre, au finance et à la marchandise. Tiré du cours mathématique... Paris, 1720.
- Ramus P. Arithmeticae libri duo, Geometriae septem et viginti. Francoforti, 1599.
- Ries A. Rechnung auff der linihen und federn... Erffordt, 1522.
- Ryff P. Quaestiones Geometriae in Euclidis et P. Rami Στοιχεων. Francofurti, 1621.
- Schuore van der J. Arithmetica... Haarlem, 1600.
- Stifel M. Deutsche Arithmetica. Nürnberg, 1545.
- Taquet A. Arithmeticae theoria et praxis. Löwen, 1656.

К главе VI

- Белый Ю. А. и Швецов К. И. Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959.
- Бобынин В. В. Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII в.— Журнал Министерства народного просвещения. Новая серия, 1908, № 1—2.
- Галанин Д. Д. Леонтий Филиппович Магницкий и его «Арифметика». Вып. 1. М., 1914.
- Гнеденко Б. В. и Погребиский Й. Б. 250 років «Арифметики» Л. П. Магницького.— Вісник АН УРСР, 1953, № 7.
- Голубев И. Новые данные о Л. Ф. Магницком.— Математика в школе, 1948, № 6.
- Депман И. Я. Геометрия практика.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955.
- Депман И. Я. О первом печатном руководстве по геометрии на русском языке.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 3. М., 1949.
- Крыницкий Н. А. Л. Ф. Магницкий.— В кн.: Труды II Областного тверского археологического съезда в 1903 г. Тверь, 1906.

- Ланков О. В. До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики. «Радянська школа», К., 1953.
- Магницкий Л. Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славенский язык преведенная, и во едино собрана, и на две книги разделена... М., 1703.
- Оtradных Ф. П. К 250-летию «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. — Вестник Ленинградского университета, 1953, № 11.
- Прудников В. Е. Первый русский арифметик и геометр. — Математика в школе, 1953, № 2.
- Рахилевич М. К. Геометрические идеи Леонтия Магницкого. — В кн.: Ученые записки Пермского пединститута. Вып. 3, 1938.
- Фель С. Е. Петровская геометрия. — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 4. М., 1952.
- Чистович И. А. Феофан Прокопович и его время. — В кн.: Сборник отделения русского языка и словесности Императорской Академии наук. Т. 1. СПб., 1868.
- Швецов К. І. Першоджерела «Арифметики» Л. Магницкого та її зв'язок з російськими математичними рукописами XVII ст. — У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962.
- Швецов К. І. Перший друкований підручник з математики в Росії і російські математичні рукописи XVII ст. — У кн.: Наукові записки Миколаївського педінституту. Вип. 5. «Радянська школа», К., 1955.

К главе VII

- Александрова Н. В. Некоторые вопросы истории вариационного исчисления в XVIII—XIX вв. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 22. М., 1959.
- Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функций. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952.
- Гуссов В. В. Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- Добровольський В. О. Д. О. Граве про пріоритет Ейлера в одному питанні аналізу. — У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Кушнир Е. А. Решение Л. Эйлером разностных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами методом определенных интегралов. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Лихин В. В. Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах отечественных математиков. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959.
- Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Маркушевич А. И. Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Генезис и история теории пределов (XVIII в.). — Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 2 (15).
- Симонов Н. И. Исследования Леонарда Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 28. М., 1958.
- Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Симонов Н. И. О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.

- Симонов Н. И. О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956.
- Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. Гостехиздат, М., 1957.
- Симонов М. И. Про дослідження Леонарда Ейлера з теорії звичайних диференціальних рівнянь.— У кн.: Историко-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Симонов М. И. Про перший період розвитку теорії рівнянь з частинними похідними першого порядку.— У кн.: Историко-математичний збірник. Вип. 2. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
- Погребський И. Б. Вступительная статья и комментарии.— В кн.: Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечных. Т. 2. Физматгиз, М., 1961.
- Рыбников К. А. О роли алгоритмов в истории обоснования математического анализа.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 17. М., 1957.
- Рыбников К. А. О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- Рыбников К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 2. Физматгиз, М., 1949.
- Тимченко И. Ю. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Т. 1. До начала XIX столетия. Одесса, 1899.
- Фихтенгольц Г. М. О преобразовании переменных в кратных интегралах.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952.
- Франкль Ф. И. Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Brill A. und Nöther M. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. Bd 3. Berlin, 1894.
- Burkhardt H. Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der Mathematischen Physik.— Jahresber. Dtsch. Math. Ver. Bd 10. Leipzig, 1908.
- Hofmann J. E. Um Eulers erste Reihenstudien. Sammelband der zu Ehren Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlungen. Berlin, 1959.
- Hofmann J. E. Zur Entwicklungsgeschichte der Eulerschen Summenformel.— Math. Zeitschr. Bd 67, N 2, 1957.
- Juschewitsch A. P. Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. Sammelband der zu Ehren Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlungen. Berlin, 1959.
- Kneser A. Euler und die Variationsrechnung.— Abhandl. zur Gesch. der math. Wiss. Bd 25, 1908 (Festschr. zur Feier des 200 Geburtstages Leonhard Eulers).
- Landaу E. Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.— Bibl. math. S. 3. Bd 7, 1907.
- Prinsheim A. Über ein Eulersches Konvergenzkriterium.— Bibl. math. S. 3. Bd 6, 1906.
- Reiff R. Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889.
- Sachse A. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen.— Abhandl. zur Gesch. der math. Wiss. Bd 3, 1880.
- Stäckel P. Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18 Jahrhundert.— Bibl. math. S. 3. Bd 2, 1901.

К главе VIII

- Б а ш м а к о в а И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Б е л ы й Ю. А. Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.
- В е н к о в В. А. О работах Эйлера по теории чисел. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
- Г е л ь ф о н д А. О. Роль работ Л. Эйлера в теории чисел. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Г н е д е н к о Б. В. О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдения, демографии и страхованию. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Г н е д е н к о Б. В. Развитие теории вероятностей в России. — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2. М., 1948.
- Г н е д е н к о Б. В. Про дослідження Л. Ейлера з теорії ймовірностей, теорії обробки спостережень, демографії та страхування. — У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Д е л о н е Б. Н. Эйлер как геометр. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- К о т е к В. В. Работы Л. Ейлера з теорії чисел. — У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962.
- М е л ь н и к о в И. Г. Открытие Эйлером удобных чисел. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- М е л ь н и к о в И. Г. Эйлер и его арифметические работы. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- М е л ь н и к о в И. Г. и К и с е л е в А. А. К вопросу о доказательстве Эйлером теоремы существования первообразного корня. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Р о з е н ф е л ь д Б. А. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- С т р о й к Д. Дж. Очерк истории дифференциальной геометрии до XX ст. Гостехиздат, М.—Л., 1941.
- Т е с л е н к о І. Ф. Про елементарно-геометричні роботи Л. Ейлера. — У кн.: Наукові записки Львівського педінституту. Т. 14. Львів, 1958.
- Х о в а н с к и й А. Н. Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Ш а л ь М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1871. Изд. 2-е, 1883.
- Ю ш к е в и ч А. П. Леонард Эйлер о квадратуре круга. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Ю ш к е в и ч А. П. Последнее письмо Л. Эйлера к Х. Гольдбаху. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- В о у е r С. В. History of analytic geometry. New York, 1956.
- В r a u n m ü h l A. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Bd 1, 2. Leipzig, 1900—1903.
- В r a u n m ü h l A. Zur Geschichte der Trigonometrie im 18 Jahrhundert. — Bibl. math. S. 3. Bd 2, 1901.
- С z u b e r E. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeits theorie und ihrer Anwendungen. — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. Bd 7. Leipzig, 1899.
- D i c k s o n L. E. History of the theory of numbers. V. 1—3. 2 ed. Washington, 1934.
- E n e s t r ö m G. Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung. — Bibl. math. S. 3. Bd 6, 1906.
- S t ä c k e l P. Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. — Bibl. math. S. 3. Bd 8, 1908.
- T o d h u n t e r J. A history of the mathematical theory of the probability from the time of Pascal to that of Laplace. Cambridge — London, 1865.

- Багратуни Г. В. Вступительная статья.— В кн.: Л. Эйлер. Избранные картографические статьи. Геодезиздат, М., 1959.
- Бирман К. Р. Задачи галуэзского лото в работах классиков теории вероятностей.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957.
- Вавилов С. И. Физическая оптика Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
- Варвак П. М. Эйлер і технічні науки.— У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Дорфман Я. Г. Физические воззрения Леонарда Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958.
- Котек В. В. Про філософські погляди Леонарда Ейлера.— У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Крутков Ю. А. Из эйлеровской «Theoriae motus».— В кн.: Труды Института истории науки и техники АН СССР. Серия 2. Вип. 1. М., 1935.
- Кузнецов Б. Г. Физика Эйлера и учение Лейбница о монадах.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2. М., 1948.
- Мандрыка А. П. Баллистические исследования Леонарда Эйлера. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958.
- Мандрыка А. П. Основная задача внешней баллистики в трудах Леонарда Эйлера.— Вопросы истории естествознания и техники, 1957, вып. 4.
- Минченко Л. С. Физика Эйлера.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 19. М., 1957.
- Михайлов Г. К. Леонард Эйлер.— Известия АН СССР. Отделение технических наук, 1955, № 1.
- Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
- Паевский В. В. Демографические работы Леонарда Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
- Погребиський Й. Б. Эйлер як механік.— У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 1. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- Раскин Н. М. Вопросы механики у Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958.
- Раскин Н. М. Л. Эйлер и рассмотрение проектов моста через реку Неву.— Известия АН СССР. Отделение технических наук, 1957, № 3.
- Слюсарев Г. Г. Диоптрика Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Соболь С. Л. История микроскопа и микроскопических исследований в России в XVIII веке. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949.
- Соболь С. Л. Лейденская выставка по истории микроскопа.— Вопросы истории естествознания и техники, 1956, вып. 2.
- Сретенский Л. Н. Динамика твердого тела в работах Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Субботин М. Ф. Астрономические работы Леонарда Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Субботин М. Ф. Леонард Эйлер и астрономические проблемы его времени.— Вопросы истории естествознания и техники, 1959, вып. 7.
- Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. Пер. с англ. Гостехиздат, М., 1957.
- Тюлина И. А. О работах Л. Эйлера по теории гидрореактивного судна и водяной турбины.— Вопросы истории естествознания и техники, 1957, вып. 4.

- Фрадли Б. Н. Краткий исторический очерк развития проблемы n тел. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники. Т. 34, М., 1960.
- Фрадли Б. Н. Проблема обертання твердого тіла навколо нерухомої точки та роль вітчизняних учених в її розвитку. — У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962.
- Франкль Ф. И. Гидродинамические работы Эйлера. — Успехи математических наук, 1950, т. 5, № 4.
- Фрейман Л. С. Л. Эйлер и аналитический метод в механике. — Вопросы истории естествознания и техники, 1957, вып. 4.
- Ченакал В. Л. Малые обсерватории Петербургской академии наук. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М., 1957.
- Ченакал В. Л. Оптика в дореволюционной России. — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 1. М., 1947.
- Ченакал В. Л. Первая обсерватория Петербургской академии наук. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М., 1957.
- Шредер К. О трудах Леонарда Эйлера в области прикладных наук. — В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Euler L. Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. St Petersburg, 1768.

К главе X

- Алешинцев И. А. История гимназического образования в России. СПб, 1912.
- Андрохович А. Образки з історії середнього шкільництва в Галичині в XVIII—XIX ст. — У кн.: Записки Наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка. Т. 100. Львів, 1930.
- Барабаш Н. И. К истории мореходного образования в России. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Берх В. Опыт истории российского флота. Ч. 1. СПб, 1831.
- Биларский П. С. Материалы для биографии Ломоносова. СПб, 1865.
- Бобынин В. В. М. Е. Головин. — Математическое образование, 1912, т. 1.
- Бобынин В. В. Элементарная геометрия и ее деятели во 2-й половине XVIII века. — Журнал Министерства народного просвещения, 1907, № 11.
- Бороздин А. К. Академический университет в XVIII веке. — Исторический вестник, 1886, № 4.
- Бранденбург Н. Е. Материалы для истории артиллерийского управления в России. СПб, 1876.
- Вавилов С. И. Ломоносов и русская наука. Воениздат, М., 1947.
- Веревкин М. Жизнь покойного М. В. Ломоносова. — В кн.: Полное собрание сочинений М. В. Ломоносова. Т. 1. СПб, 1784.
- Веселаго Ф. Ф. Очерк истории Морского кадетского корпуса. СПб, 1852.
- Веселовский К. С. Отношение императора Павла I к Академии наук. — Русская старина, 1898, апрель.
- Владимирский-Буданов М. Государство и народное образование в России XVIII века. Ч. 1. Ярославль, 1874.
- Воронцов А. Историко-статистическое обозрение учебных заведений С.-Петербургского учебного округа с 1715 по 1728 год включительно. СПб, 1849.
- В память столетнего юбилея Горного института в Петрограде. — Горный журнал, 1923, № 11.
- Глебов П. Артиллерийская школа в царствование императрицы Анны Иоановны. — Артиллерийский журнал, 1862, № 11.
- Гнучева В. Ф. Ломоносов и географический департамент Академии наук. — В кн.: М. В. Ломоносов. Сборник статей и материалов. Под ред. А. И. Андреева и Л. Б. Модзалевского. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940.
- Головацкий Я. О. О первом литературно-умственном движении русинов в Галиции со времен австрийского владычества в той земле. — В кн.: Галицкий исторический сборник, издаваемый обществом галицко-русской матицы. Вып. 1. Львов, 1865.

- Денисьевский М. Специальная школа «инженерная и артиллерийская». — Инженерный журнал, 1904, № 6—7.
- Зубов В. П. Ломоносов и Славяно-греко-латинская академия. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 1. М., 1954.
- Идельсон Н. И. Замечания по поводу теории Ломоносова о кометных хвостах и вызванной ею дискуссии. — В кн.: М. В. Ломоносов. Сборник статей и материалов под ред. А. И. Андреева и Л. Б. Модзалевского. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940.
- Историко-статистическое описание Рязанской духовной семинарии. Новгород, 1864.
- Историческое обозрение 2-го кадетского корпуса. СПб, 1862.
- История Московского университета. Т. 1. Изд-во Московского университета, 1955.
- История Эстонской ССР. Т. 1. Ред. А. Вассара и Г. Наана. Эстгосиздат, Таллин, 1961.
- Кирпичников А. Былые знаменитости русской литературы. — Исторический вестник, 1887, № 9.
- Коган Ю. П. Свободомыслие Я. П. Козельского. — В кн.: Вопросы истории религии и атеизма. Изд-во АН СССР, М., 1950.
- Колбасин Е. Литературные деятели прежнего времени. СПб, 1859.
- Котельников С. К. Слово о пользе упражнения в чистых математических рассуждениях. СПб, 1761.
- Кулябко Е. С. Ломоносов и учебные планы академического университета. — В кн.: М. В. Ломоносов. Сборник статей и материалов. Вып. 3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951.
- Кулябко Е. С. М. В. Ломоносов и учебная деятельность Петербургской академии наук. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1962.
- Лалаев М. Исторический очерк военно-учебных заведений... СПб, 1880.
- Левцкий Г. В. Биографический словарь профессоров и преподавателей Юрьевского, быв. Дерптского университета за 100 лет его существования. Т. 1. Юрьев, 1902.
- Ментушкин В. Н. Жизнеописание Михаила Васильевича Ломоносова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
- Огородников С. Ф. Три астрономические обсерватории в Лапландии. — Русская старина, 1882, январь.
- Петров Н. И. Киевская академия в царствование императрицы Екатерины II (1762—1796). К., 1906.
- Райнов Т. И. Русское естествознание второй половины XVIII в. и Ломоносов. — В кн.: М. В. Ломоносов. Сборник статей и материалов. Под ред. А. И. Андреева и Л. Б. Модзалевского. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940.
- Рождественский С. В. Очерки по истории систем народного просвещения в России XVIII—XIX вв. Т. 1. СПб, 1912.
- Ряго Г. Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. — В кн.: Ученые записки Тартуского университета. Т. 37, 1955.
- Савельев А. Исторический очерк инженерного управления в России. СПб, 1879.
- Сергеев В. К. Московская математико-навигационная школа (1701—1752). — В кн.: Вопросы географии. Сб. 34. Географиздат, М., 1954.
- Смирнов В. И. и Кулябко Е. С. Михаил Софронов — русский математик середины XVIII века. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- Толстой Д. А. Академическая гимназия в XVIII в. — В кн.: Записки Императорской Академии наук. Приложение к т. LI. № 2. СПб, 1885.
- Толстой Д. А. Академический университет в XVIII столетии. — В кн.: Записки Императорской Академии наук. Приложение к т. LI. № 3. СПб, 1885.
- Толстой Д. А. Взгляд на учебную часть в России в XVIII столетии до 1782 г. СПб, 1883.
- Федотова Р. К. и Хетагурова Е. В. Документы о математике Степана Назарове. — Исторический архив, 1960, № 1.

- Харкевич Е. Хроніка Львівської академічної гімназії. Звіт дирекції гімназії за 1900—1901 рік. Львів, 1901.
- Чечулин Н. Д. Воспитание и домашнее обучение в России в XVIII в.— В кн.: Дела и дни. Кн. 1, 1920.
- Шперк В. Ф. Военно-инженерное образование в России в XVIII в.— В кн.: Вестник Военно-инженерной академии РККА им. В. В. Куйбышева. М., 1939.
- Юшкевич А. П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948.
- Bednarski S. Dzieje kulturalne jezuickiego kollegium we Lwowie. T. 33. Lwów, 1936.
- Finkel-Starzyński. Historia uniwersytetu lwowskiego. Lwów, 1894.
- Sadok-Barącz. Pamiątki buczackie. Lwów, 1882.
- Swistun F. Kronika gimnazjum rzeszowskiego.— Sprawozdanie dyrekcji gimnazjum za rok 1885—1886. Rzeszów, 1886.
- Tomaszewski S. Pogląd na rozwój gimnazjum brzezańskiego (1789—1905). Cz. 1. Sprawozdanie dyrekcji gimnazjum za rok 1905—1906, 1906.
- Zagórski W. O szkole grecko-prawosławnej we Lwowie.— Museum, Lwów, 1893.
- Zaleski S. Jezuici w Polsce T. 3. Cz. 2. Lwów, 1900.

К главе XI

- Абу Рейхан ал-Бируни. Избранные произведения. Т. 1. Памятники минувших поколений. Перев. М. А. Салье. Изд-во АН УзССР. Ташкент, 1957.
- Абу Рейхан ал-Бируни. Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него. Перев. С. А. Красновой.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 3. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Ахадова М. Работа математиков Средней Азии по теории параллельных линий.— В кн.: Труды III Всесоюзного математического съезда. Т. 4. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Бартольд В. В. История культурной жизни Туркестана. Изд-во АН СССР, Л., 1927.
- Беленицкий А. М. Картина мира по Бируни.— В кн.: Ученые записки Ленинградского университета. Серия востоковедческих наук. Вып. 1. № 8. Л., 1949.
- Бируни. Сборник статей под ред. С. П. Толстова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
- Бируни — великий узбекский ученый средневековья. Сборник статей под ред. В. Ю. Захидова, А. А. Семенова, Я. Г. Гуляшова. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1950.
- Бретаницкий Л. С. и Розенфельд Б. А. Архитектурная глава трактата «Ключ арифметики» Гияс ад-Дина Каши.— В кн.: Искусство Азербайджана. Вып. 5. Изд-во АН АзССР, Баку, 1956.
- Выгодский М. Я. Происхождение «правил двух ложных положений».— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Гафуров Б. Г. История таджикского народа. В кратком изложении. Т. 1. Госполитиздат, М., 1949.
- Джальялов Г. Д. Бируни и астрономическая наука.— В кн.: Бируни. Изд-во АН СССР, Ташкент, 1950.
- Джальялов Г. Д. Бируни и картография.— Известия АН УзССР, 1950, № 1.
- Джальялов Г. Д. Гияс ад-Дин Джамшид Чустӣ (Каши) — крупнейший астроном и математик XV века.— В кн.: Ученые записки Ташкентского пединститута. Физико-математическая серия. Вып. 7, 1957.
- Джальялов Г. Д. К вопросу о составлении планетных таблиц самаркандской обсерватории.— В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М., 1955.
- Джальялов Г. Д. Отличие «Зидж Гурагони» от других подобных зиджей.— В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М., 1955.
- Джальялов Г. Д. Секстант как главный инструмент обсерватории Улугбека.— Астрономический журнал, 1947, вып. 4.

- Д ж е м ш и д Г и я с ъ д д и н а л - К а ш и. Ключ к арифметике. Трактат об округности. Перев. Б. А. Розенфельда, ред. В. С. Сегалья и А. П. Юшкевича, коммент. А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда. Гостехиздат, М., 1956.; Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- История Узбекской ССР. Изд. 2-е, испр. Т. 1. Кн. 1. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1955.
- К а г а н В. Ф. Основания геометрии. Ч. 1. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
- К а з и - з а д е а р - Р у м и. Трактат об определении синуса одного градуса. Перев. Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- К а р п о в а Л. А. и К р а с н о в а С. А. О математическом трактате ал-Бируни «Об определении хорд в круге при помощи свойств ломаной линии, вписанной в него». — В кн.: Тезисы докладов и сообщений на Межвузовской конференции по истории физико-математических наук. 25 мая — 2 июня 1960 г. Изд-во Московского университета, М., 1960.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. Астрономическая школа Улугбека. Изд-во АН СССР, М., 1950.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. Великий ученый и мыслитель. — В кн.: Материалы научной сессии АН УзССР, посв. 1000-летию юбилею Ибн Сины. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1953.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. Обсерватория Улугбека в свете новых данных. — В кн.: Материалы научной сессии АН УзССР. Ташкент, 1947.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. О культурном наследии узбекского народа. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1960.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. О некоторых результатах, полученных обсерваторией Улугбека. Доклад на XXV Международном конгрессе востоковедов. Изд-во восточной литературы, М., 1960.
- К а р ы - Н и я з о в Т. Н. Улугбек — великий узбекский астроном XV века. — Природа, 1952, № 10.
- Л е о н о в Н. И. Научный подвиг самаркандских астрономов XV в. Физматгиз, М., 1958.
- Л е о н о в Н. И. Улугбек — великий астроном XV в. (1394—1449). Гостехиздат, М., 1960.
- М а л ы г и н К. А. Развитие математики в Средней Азии в IX—XV вв. — Математика в школе, 1955, № 3.
- М а м е д б е й л и Г. Д., Г а ш и м з а д е М. У. О значении в истории математики произведения «Шаклул Гита». — Известия АН АзССР, 1951, № 8.
- М а с с о н М. Е. Обсерватория Улугбека. Изд-во АН СССР. Уз. филиал, Ташкент, 1941.
- М е д о в о й М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- М о р о ч н и к С. Б. и Р о з е н ф е л ь д Б. А. Омар Хайям — поэт, мыслитель, ученый. Таджикгосиздат. Сталинабад, 1957.
- М у х а м е д о в Х. Абу-Али ибн-Сина — математик. — В кн.: Тезисы докладов и сообщений на Межвузовской конференции по истории физико-математических наук. 25 мая — 2 июня 1960 г. Изд-во Московского университета, М., 1960.
- О м а р Х а й я м. Математические трактаты. Перев. Б. А. Розенфельда, прим. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- Р о з е н ф е л ь д Б. А. Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана Ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.
- Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Омара Хайяма. — Успехи математических наук, 1953, т. 8, вып. 3 (55).
- Р о з е н ф е л ь д Б. А. Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии. — В кн.: В. Ф. К а г а н. Основания геометрии. Ч. 2. ГИТТЛ, М., 1956.
- Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Джемшида Гиясэддина Каши. — В кн.: Ученые записки Азербайджанского университета. № 5, 1957.

- Розенфельд Б. А. О математических работах Омара Хайяма.— В кн.: Ученые записки Азербайджанского университета. № 9, 1957.
- Розенфельд Б. А. Попытка квадратичного интерполирования у Абу-р-Рейхана ал-Бируни.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века.— Советское востоковедение, 1958, № 3, 6.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. О трактате Кази-заде ар-Руми об определении синуса одного градуса.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Предыстория неевклидовой геометрии на средневековом Востоке. Доклад на XXV Международном конгрессе востоковедов. Изд-во восточной литературы, М., 1960.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.
- Розенфельд Б. А., Краснова С. А. и Рожанская М. М. О математических работах Абу-р-Райхана ал-Бируни.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 3. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Садыхов Х. У. Астрономическое учение Бируни.— В кн.: Бируни. Изд-во АН СССР, М., 1950.
- Садыхов Х. У. Бируни и его работы по астрономии и математической географии. Гостехиздат, М., 1953.
- Салье М. А. Мухаммед ал-Хорезми — великий узбекский ученый. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1954.
- Салье М. А. Об освещении так называемой «арабской культуры» в Средней Азии.— В кн.: Труды Института востоковедения АН УзССР. Вып. 3. Ташкент, 1954.
- Толстов С. П. По следам древнехорезмийской цивилизации. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
- Халилов А. А. Математическое наследие среднеазиатских ученых.— В кн.: Труды Туркменского пединститута. Вып. 6. № 5, 1959.
- Хатилов А. Э. О первой книге геометрического трактата Омара Хайяма.— В кн.: Труды Самаркандского университета. Новая серия. № 107. Самарканд, 1960.
- Хатилов А. Э.-А. Теория параллельных Омара Хайяма.— В кн.: Труды Узбекского университета. Вып. 78. Самарканд, 1958.
- Шамс ад-Дин ас-Самарканди. Основные предложения (отрывок). Перев. Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.
- Шишкин В. А. Обсерватория Улугбека и ее исследования.— В кн.: Труды Института истории и археологии АН УзССР. Т. 5, 1953.
- Щеглов В. П. К вопросу о географических координатах и азимуте секстанта обсерватории Улугбека в Самарканде.— Астрономический журнал, 1953, т. 30, вып. 2.
- Юсупов Н. Из истории математики народов Ближнего и Среднего Востока.— В кн.: Труды II Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Изд-во АН СССР, Л., 1936.
- Юсупов Н. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Татиздат, Казань, 1932.
- Юшкевич А. П. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 1. М., 1954.
- Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV веках.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951.
- Юшкевич А. П. Омар Хайям и его алгебра.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2. М., 1948.
- Юшкевич А. П. О новых работах в СССР по истории математики.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.

- Юшкевич А. П. и Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в средние века.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 1. Изд-во АН СССР, М., 1960.
- Avicenne. Le livre de science. II (physique, mathématique). Paris, 1958.
- Bielawski J. Książka w świecie islamu. «Ossolineum», Wrocław, 1961.
- Brockelmann C. Geschichte der arabischen Literatur. Bd 1—5. Weimar, Berlin — Leiden, 1898—1942.
- Carra de Vaux. L'Almageste d'Aboul Wefa Albûzjani.— Journal asiatique. S. 8. T. 19, 1892.
- Gandz S. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra.— Osiris. V. 3, 1937.
- Gandz S. The sources of al-Khowārizmī algebra.— Osiris. V. 1, 1936.
- Encyklopädie des Islams. Bd 1—4. Leyden — Leipzig, 1913—1936.
- Karpiński L. Ch. Robert of Chester's latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. New York, 1915.
- Kennedy E. S. The Planetary equatorium of Jamshid Ghi Yath ad-Din al-Kashi. Princeton, 1960.
- Landau R. Arab contribution to civilisation. San Francisco, 1958.
- Luckey P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Camisid b. Mas'ūd al-Kāṣī, Berlin, 1953.
- Luckey P. Die Rechenkunst bei Čamṣīd b. Mas'ūd al-Kāṣī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden, 1950.
- Mieli A. La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial. Leiden, 1939.
- Mohammed ben Musa. The algebra, edited and translated by F. Rosen. London, 1831.
- O'Leary D. L. How Greek science passed to arabs. London, 1948.
- Omar Alkhayyam. L'algebre, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke. Paris, 1851.
- Omar Khayyam. The algebra, translated by D. S. Kasin. New York, 1931.
- Plooiij E. B. Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by arabian commentators. Rotterdam, 1950.
- Riesler J. C. La civilisation arabe. Paris, 1955.
- Rosen J. Ein wissenschaftlicher Aufsatz Umar-i-Khayyams.— Zeitschrift d. Deutsch. Morgenländ. Gesellsch. Bd 4 (79), 1925.
- Ruska J. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst.— Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, 1917.
- Schoy C. Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l Reihān Muhammed ibn Ahmad al-Biruni, dargestellt nach al-Qānun al Mas'ūdi. Hannover, 1927.
- Smith D. E. Euclid, Omar Khayyam and Saccheri.— Scripta mathematica. T. 3. N 1, 1935.
- Suter H. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l Reihan Muh el'Biruni.— Bibl. math. Bd 11, 1911.
- Suter H. Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l-Wefa. Erlangen, 1922.
- Suter H. Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient und den Okzident. Aarau., 1897.
- Suter H. Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke. Leipzig, 1900—1902.
- Wieleitner H. Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Atchwarāzmi.— Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht. Bd 53, 1922.
- Woepcke F. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafā.— Journal asiatique. V. 5, 1855.
- Wüstenfeld F. Die Akademien der Araber und ihre Lehrer. Göttingen, 1837.

К главе XII

- Абрамян А. Г. Рукописные сокровища Матенадарана. Ереван, 1959.
- Анания Ширакаци. Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци — армянского математика VII века. Перев. И. А. Орбели, 1918.
- Анания Ширакаци. Космография и календарь (обработка текста А. Абрамяна). Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1940.
- Обынин В. В. История развития счисления у кавказских народов. — В кн.: Труды XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей. Т. 6. Тифлис, 1914.
- Обынин В. В. Об изучении кавказских народных математических знаний. — В кн.: Труды XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей. Т. 6. Тифлис, 1914.
- Касумханов Ф. А. Теория непрерывных величин и учение о числе в работах Мухаммеда Насирэддина Туси. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 1. М., 1954.
- Мамедбейли Г. Д. Выдающийся азербайджанский ученый. — Известия АН УзССР, 1951, № 9.
- Мамедбейли Г. Д. Значение научных трудов Мухаммеда Насирэддина в развитии астрономии и математики. — В кн.: Тезисы докладов на сессии, посвященной 750-летию со дня рождения выдающегося азербайджанского ученого Мухаммеда Насирэддина. Изд-во АН АзССР, Баку, 1951.
- Мамедбейли Г. Д. Из истории Марагинской обсерватории. — В кн.: Труды Всесоюзного совещания по истории естествознания. 24 — 26 декабря 1946 г. Изд-во АН СССР, М., 1948.
- Мамедбейли Г. Д. Марагинская астрономическая обсерватория XIII в. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 3. Физматгиз, М., 1957.
- Мамедбейли Г. Д. Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насирэддин Туси. Изд-во АН АзССР, Баку, 1961.
- Мамедбейли Г. Д. и Халилов З. И. Предисловие к кн.: Мухаммед Насирэддин Туси. Трактат о полном четырехстороннике (Шаклул гита). Изд-во АН АзССР, Баку, 1952.
- Манандян Я. А. О торговле и городах Армении в связи с мировой торговлей древних времен. Изд-во Ереванского университета, Ереван, 1954.
- Меликишвили Г. А. Наир-Урарту. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1954.
- Насир ад-Дин ат-Туси. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий. Перев. Б. А. Розенфельда, статьи и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Насир ад-Дин ат-Туси. Трактат о полном четырехстороннике. Перев. и ред. Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфельда. Изд-во АН АзССР, Баку, 1952.
- Петросян Г. Б. Математические труды Николая Артавазда. — В кн.: Труды III Всесоюзного математического съезда. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1956.
- Петросян Г. Б. и Розенфельд Б. А. Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида. — Известия АН АрмССР, 1960, т. 13, № 1.
- Питровский Б. Б. История и культура Урарту. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1944.
- Розенфельд Б. А. О математических работах Мухаммеда Насирэддина (на азербайдж. яз.). — Известия АН АзССР, 1953, № 4.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. О трактате Насир ад-Дина ат-Туси о параллельных линиях. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Султанов Р. М. Насирэддин Туси о постулате параллельности. — Известия АН АзССР, 1951, № 10.
- Туманьян Т. Г. «Начала» Евклида по древнеармянским источникам. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- Цхакая Д. Г. История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1959.
- Чалоян В. К. Армянский ренессанс. Изд-во АН СССР, М., 1963.
- Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasse-redini Tusini nunc primum arabice impressi. Roma, 1594.

3. Русские математические рукописи XVII века

Рукописи, известные по литературным источникам

Рукопись публичной библиотеки QIX-43¹. 12 листов издано в 1879 г.²

Рукопись библиотеки редакции журнала «Физико-математические науки в их настоящем и прошлом».

Рукопись бывшей библиотеки Московского архива Министерства иностранных дел № 549 (по старому каталогу № 1043) «Книга сошному письму и росписи полевой мере».

Рукопись Археографической комиссии № 29.

Рукописи Государственной публичной библиотеки им. В. И. Ленина

Собр. Унд. 681 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 216 л.

Собр. Унд. № 683 Цифрное учение (по милости). Без начала и конца. Скоропись, XVII в., в 4°, 18 л.

Муз. Собр. № 2606 Арифметика письменная. Скоропись, XVII в., в 4°, 169 л.

Собр. Рум. Музея № 932 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 284 л.

Муз. Собр. № 982 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 264 л.

Собр. Унд. № 833 Сошное письмо. Скоропись, XVII в., в 4°, 63 л.

Собр. И. Д. Беляева № 70 (1579) Уложение царя Алексея Михайловича. Скоропись, 377 л.

Собр. Рум. Музея № 12 Старинная арифметика, астрономия и астрология. Полуустав и скоропись, XVII в., в 4°, 299 л.

Собр. Рог. клад. № 23 Арифметика или «цифирная счетная мудрость». Скоропись, вторая половина XVII в., в 4°, 277 л.

Собр. Тихон № 514 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 35 л.

Собр. ОИДР № 216 Сборник из отдельных тетрадей разных почерков. Скоропись, XVII в., в 4°, 74 л.

Собр. Унд. № 682 Арифметика. Полуустав, XVII в., в 4°, 168 л.

Собр. Унд. № 1335 Арифметика, XVII—XVIII вв., в 4°, 169 л.

Рукописи Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина

FIX-3 Воинская книга о всякой стрельбе и огненных. Скоропись, написана в 1606—1607 гг., 548 л. размером 23 × 36 см.

QIX-10 Арифметика. Скоропись, конца XVII в., в 4°, 279 л.

QIX-3 Сборник. Скоропись, конца XVII в., в 4°, 251 л.

QIX-43 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 204 л.

Собр. Погод. № 1664 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 291 л.

QIX-14 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 293 л.

QIX-13 Сборник. Скоропись, конца XVII в. или начала XVIII в., в 4°, 224 л.

QIX-46 Арифметика. Скоропись, середины XVII в., в 4°, 226 л.

QIX-64 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 151 л.

QIX-10 Арифметика. Скоропись второй половины XVII в., в 4°, 256 л.

FIX-47 Книга, именуемая геометрия или землемерие радикалом и циркулем. Скоропись, XVII в., в 1°, 55 л.

Q XVII-66 Сборник. Скоропись, XVII в., в 4°, 226 л.

¹ В Государственной публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина хранится математическая рукопись с таким же шифром QIX-43, но она отличается от указанной.

² «Счетная мудрость», 1879.

ОЛДП (ОIII)-28 Арифметика без начала. Скоропись, второй половины XVII в., в 4°, 147 л. (14 утрачено).

QIX-50 Арифметика. Скоропись, 1684 г., в 4°, 121 л.

Собр. Титова Арифметика (без начала). Скоропись, XVII в., в 4°, 24 л.

Рукописи Библиотеки АН СССР

17.6. 24 (осн. 434) Арифметика. Сборник. Скоропись, XVII в., в 4°, 208 л.

Архг. Собр. № 479 Арифметика. Скоропись, конца XVII в., в 4°, 238 л.

Архг. Собр. № 478 Арифметика. Сборник словесных и математических наук. Скоропись, XVII в., в 4°, 207 л.

Собр. тек. пост. № 569 Арифметика. Скоропись, конца XVII в., в 4°, 334 л.

Рукописи Государственного исторического музея

Черт. № 372 Арифметика. Скоропись, 1700 г., в 8°, 120 л.

Муз. № 52 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 4°, 247 л.

Щук. № 592 Арифметика. Скоропись, 1678 г., в 4°, 279 л.

Собр. Уварова № 1911 (155). Сборник. Скоропись, XVII в., в 8°, 413 л.

Забел. № 24 Арифметика. Скоропись, XVII в., в 1°, 126 л.

Барс. № 2194 Арифметика. Скоропись, 1621 г., в 4°, 287 л.

Синодальная 42. Геометрия. Полуустав, XVII в., 173 л. размером 37 × 24 см.

4. Учебная литература по математике в России XVII—XVIII вв.

Адамс Дж. Описание совершеннейшаго планетника и показателей движений Луны и Земли, то есть Лунария и Теллуриана. Из Астрономических уроков, изданных г. Адамсом. Пер. с англ. СПб, 1797, 56 с., 2 л. черт.

Альберт А. Правила о перспективе, изданные в пользу любителей художеств, скульпторов, живописцев, архитекторов и прочих. Кн. 1, 2, СПб, 1791.

Аничков Д. С. Начальные основания алгебры, или арифметики литеральной, служащая для удобнейшаго и скорейшаго вычисления как арифметических, так и геометрических задач, в пользу и употребление российского юношества... М., 1781, 227 с., 12 л. черт.

Аничков Д. С. Начальные основания фортификации, или военной архитектуры, служащая в пользу и употребление российского юношества... М., 1787, 183 с., 17 л. черт.

Аничков Д. С. Теоретическая и практическая арифметика, в пользу и употребление юношества... М., 1764, 271 с. Изд. 2-е. М., 1775, 328 с. Изд. 3-е, доп. М., 1786, 392 с. Изд. 4-е. М., 1793.

Аничков Д. С. Теоретическая и практическая геометрия, в пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии... М., 1780, 366 с., 37 л. черт.

Аничков Д. С. Теоретическая и практическая тригонометрия, в пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии... М., 1780, 123 с., 12 л. черт.

Аничков Д. С. Теоретическая и практическая тригонометрия, в пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии... вновь исправленная с приобщением таблиц, синусов и тангенсов, також логарифмов их и простых чисел, начиная от 1 до 10 000... М., 1787, 346 с., 12 л. илл.

Арифметик без пера и карандаша и без поверки, или удобнейший способ скоро и без ошибки сделать всякий счет в продажах, покупках, мерах и весах... М., 1796, XII, 109 с.

Архимедовы теоремы Андреем Таккветом езуитом выбранныя, и Георгием Петром Домкиио сокращенныя, с латинскаго на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым предложенныя... СПб, 1745, 171 с.

- Аршеневский В. К. Слово о начале, связи и взаимном пособии математических наук и пользе оных... М., 1794, 16 с.
- Барсов А. Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление... М., 1797, VIII, 196 с., 2 л. черт.
- Безу Э. Курс математики... Ч. 1—5, М., 1798—1803. Ч. 1. Арифметика, 1798, XIV, 212 с. Ч. 2. Содержащая геометрию и плоскую тригонометрию, 1798, VII, 302 с., 6 л. черт. Ч. 3. Содержащая в себе алгебру с приноворкою ея к геометрии и коническое сечение, 1801, VIII, 412 с., 3 л. черт. Ч. 4. Содержащая в себе исчисление, служащее введением в физико-математическая науки и общия правила механики и гидростатики, 1803, VIII. 400 с., 6 л. черт. Ч. 5. Содержащая в себе применение общих правил механики к разным случаям движения и равновесия, 1803, 529 с., 13 л. черт., 2 л. табл.
- Безу Э. Навигационныя или мероходныя изследования..., с французскаго подлинника на российский язык переведены и дополнены Семеном Гурьевым. Ч. 1—2. СПб, 1790—1791.
- Безу Э. Основания арифметики... СПб, 1795, 208, III с.
- Безу Э. Основы геометрии... СПб, 1794, II, 232 с., 7 л. черт. Оттиск 2й. СПб, 1798, II, 142 с., 5 л. черт.
- Безу Э. Плоская и сферическая тригонометрии... СПб, 1800, 88 с., 7 л. черт.
- Безу Э. Сферическая тригонометрия (служащая продолжением второй части Математического курса г. Безу), переведена для благороднаго юношества... М., 1799, 58 с.
- Белидор Б. Ф. де. Новой курс математической для артиллеристов и инженеров, в котором показывается употребление наиболее полезных частей сея науки в теории и практике разных в военном искусстве случающихся действий. Ч. 1—2. СПб, 1766—1769.
- Буркхард фон Пюркенштейн А. Э. Геометрия славенски землемерие. Приемы циркуля и линейки, или избраннейшее начало в математических искусствах... СПб, 1708, 353 с. с черт. Изд. 2-е. СПб, 1709. Изд. 3-е. СПб, 1725.
- Вейдлер И. Ф. Аналитика специоза или Алгебра, переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым. М., 1765, 68 с.
- Вейдлер И. Ф. Аналитика или Алгебра, переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым, новое издание исправленное и дополненное магистром Александром Барсовым. М., 1795, 115 с.
- Вейдлер И. Ф. Арифметика, переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым, исправленная и дополненная магистром Александром Барсовым. М., 1795, 134 с.
- Вейдлер И. Ф. Арифметика теоретическая и практическая, переведенная с латинского языка... Дмитрием Аничковым. М., 1765, 103 с. Изд. 2-е. М., 1787.
- Вейдлер И. Ф. Геометрия, переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым, новое издание исправленное магистром Александром Барсовым. М., 1795, 156 с., 8 л. черт.
- Вейдлер И. Ф. Геометрия теоретическая и практическая, переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым. М., 1765, 128 с., 8 л. черт. Оттиск 2-й. М., 1776. Изд. 2-е. М., 1787.
- Вейдлер И. Ф. Наставления к подземной геометрии или маркшейдерской науке переведены... Алексеем Мартовым. СПб, 1777, 120 с., 4 л. черт.
- Вейдлер И. Ф. Наставления чистой математики, содержащая в себе арифметику, геометрию, тригонометрию и алгебру с присовокуплением к сим фортификации. Изд. 2-е. М., 1787, 99 с.
- Вейдлер И. Ф. Плоская тригонометрия... М., 1765, 51 с., 1 л. черт.
- Войтяховский Е. Д. Полный курс чистой математики. Т. 1—4. М., 1794—1798. Изд. 2-е. Т. 1—4. М., 1798.
- Войтяховский Е. Д. Теоретической и практической курс чистой математики, содержащий в себе арифметику, геометрию, тригонометрию, с практикою и описанием, пропорционального циркуля или сектора, алгебру с вышними степенями, криволинейную геометрию с теориею и практикою искусства бросания бомб... Т. 1. Арифметика. Изд. 1-е. М., 1786, 294 с. Изд. 2-е. Т. 1—4. М., 1787—1790.

- В о л ь ф Х. Сокращение первых оснований мафиматики... Т. 1—2. СПб, 1770—1771. Оттиск 2-й, 1791.
- Гадательная арифметика для забавы и удовольствия. СПб, 1789, 62 с.
- Геометрия практика [1714], 152 с.
- Г е р м а н Я. и Д е л и л ь Ж. Н. Сокращение математическое ко употреблению... Перев. с фр. И. С. Горлицкого. Ч. 1—3. СПб, 1728—1730.
- Г и л а р о в с к и й П. И. Сокращение вышней математики... СПб, 1796, 138 с., 3 л. черт.
- Г о л о в и н М. Е. Краткое руководство к геометрии, издано для народных училищ Российской империи... СПб, 1786, 202 с., 6 л. черт. Оттиск 2-й, 1790. Оттиск 3-й, 1796.
- Г о л о в и н М. Е. Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами... СПб, 1789, 64 с., 3 л. черт.
- Г у р ь е в С. Е. Опыт о усовершеннии элементов геометрии, составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева. СПб, 1798, 264 с., 5 вкл. л. черт.
- Д е г р а ф А. Книга, учащая морского плаванья ... от латинского языка переведена славяно-русский диалект... Копиевский. Амстердам, 1701.
- Д о д с л и Р. Наставник или Всеобщая система воспитания, преподающая первые основания учености. Ч. 1—12. СПб., 1789—1792. Ч. 2. О математике, науке чисел и землемерии. 1790, 345 с., 6 л. черт. Ч. 3. Об арифметике, механике, географии и астрономии, 1790, 513 с.
- Д о д с л и Р. Учитель, или Всеобщая система воспитания, в которой предложены первые основания наук. Перев. А. А. Петров. Ч. 1—3. М., 1789. Ч. 1. Отд. 2. О математике вообще, об арифметике и геометрии.
- Евклидовы элементы из двенадцати нефтоновых книг выбранные, и в осьмь книг через профессора... Андрея Фархварсона сокращенныя, с латинскаго на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым предложеныя. СПб, 1739, 284 с., 13 л. черт.
- Евклидовых стихий осьм книг... Перев. с гр. Прохором Суворовым и Василием Никитиным. СПб., 1789.
- Элементы геометрии, то есть первые основания науки о измерении протяжения... С французского переведены и изданы... трудом Николая Курганова... СПб, 1769, 288 с.
- К а н к р и н Ф. Л. Первые основания искусства горных и соляных производств. Ч. 1—10, 1785—1791. Ч. 6. Отд. 1. Содержащий в себе маркшейдерскаго искусства первое отделение, заключающее арифметику, геометрию и плоскую тригонометрию. СПб, 1789, 723 с., 32 вкл. л. черт.
- К е с т н е р А. Г. Начальные основания математики... Ч. 1—2. СПб, 1792—1794. Ч. 1. Содержащая арифметику и алгебру, 1792, 235 с. Ч. 2. Содержащая геометрию, тригонометрию плоскую и сферическую, перспективу и сечения конуса, 1794, 430 с., 7 л. черт.
- К и п р и а н о в В. Новый способ арифметики феорики или зрительныя, сочинен в вопросах ради удобнейшаго понятия. М., 1705.
- К л е в е ц к и й М. Я. Руководство к географии с употреблением земнаго шара и ландкарт, состоящее в трех частях с приложением генеральных правил арифметики, сочиненное для преподавания... СПб, 1773, 138 с.
- К о з е л ь с к и й Я. П. Арифметическия предложения для употребления обучающагося в Артиллерийском и инженерном шляхетном кадетском корпусе благороднаго юношества. СПб, 1764, 285 с.
- К о з е л ь с к и й Я. П. Механическия предложения... СПб, 1764, 344 с., 30 л. черт. Оттиск 2-й, 1877, 242 с., 30 л. черт.
- К о п и е в с к и й И. Краткое и полезное руковедение во аритметику, или в обучение и познание всякого счету, в сочтении всяких вещей... Амстердам, 1699, 48 с.
- К о т е л ь н и к о в С. К. Первых оснований математических наук часть первая, содержащая в себе арифметику... Ч. 1. СПб, 1766, 167 с. Оттиск 2-й, 1784. Оттиск 3-й, 1789.
- К о т е л ь н и к о в С. К. Слово о пользе упражнения в чистых математических разсуждениях... СПб, 1761, 18 с.

- Крафт Г. В. Краткое руководство к теоретической геометрии в пользу учащегося в гимназии при Имп. Академии наук российского юношества... СПб, 1748, 207 с., 14 л. черт. Изд. 2-е. СПб, 1762, 268 с., 18 л. черт.
- Курганов Н. Г. Универсальная арифметика, содержащая основательное учение как легчайшим способом разные во обществе случающиеся, математике принадлежащая, арифметическая, геометрическая и алгебраическая выкладки производить... СПб, 1757, 411 с.
- Курганов Н. Г. Новая арифметика или Числословие, содержащее в себе все правила цифирного вычисления, случающегося в общежитии.... СПб, 1771, 224 с.
- Курганов Н. Г. Арифметика или Числовник, содержащий в себе все правила цифирного вычисления, случающегося в общежитии, в пользу всякого учащегося, воинского, статского и купеческого юношества. Изд. 3-е. СПб, 1776, 227 с. Изд. 4-е. Ч. 1—2. СПб, 1791.
- Курганов Н. Г. Генеральная арифметика то есть всеобщей или полной числовник предлагающей порядочное и основательное знание как легчайшим способом разные житейския математике принадлежащая, арифметичныя, геометричныя и алгебраичныя вычисления производить. Изд. 2-е. СПб, 1794.
- Курганов Н. Г. Генеральная геометрия или Общее измерение протяжения составляющее теорию и практику оной науки. Кн. 1. СПб, 1765, 366 с., 9 л. черт.
- Людёвих К. Краткое руководство к арифметике... СПб, 1758.
- Магницкий Л. Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славенский язык преведеная, и во едино собрана, и на две книги разделена... М., 1703, 306 с.
- Матинский М. А. Начальные основания геометрии, сочиненныя для Общества благородных девиц. СПб, 1798, 125 с., 3 л. черт.
- Меморский М. Ф. Краткая арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества... в двух частях... М., 1794, 168 с.
- Мордвинов С. И. Книги полного собрания о навигации... Ч. 1—4. СПб, 1748—1753. Ч. 1. Геометрию, тригонометрию плоскую и сферическую в себе содержащая. 1748, 90 с. с илл., 3 л. черт.
- Мразович А. Руководство к науке численной. Вена, 1798.
- Муравьев Н. Е. Начальное основание математики... Ч. 1. СПб, 1752, 310 с.
- Назаров С. Практическая геометрия... Ч. 1—2. СПб, 1760—1761. Ч. 1, 1760, 319 с., 36 л. черт. Ч. 2, 1761, 298 с., 17 л. черт. Ч. 1. Оттиск 2-й, 1767. Изд. 2-е. Ч. 1, 2, 1768—1772. Ч. 1. Оттиск 2-й, 1775.
- Неандр Второй. Описание геометрического инструмента... для измерения на поле разстояния всех предметов, высот и поверхностей, без всякого вычисления и математического знания. СПб, 1792, 12 с., 1 л. илл.
- Новиков И. Ключ к выкладкам курсов, или Ныне изобретенный, самый кратчайший способ верно выкладывать аглинской и голландской курс помощью особливых таблиц, с ясным описанием о том, что под словом курс разумеется, и от чего оной по большей части повышается и упадает... М., 1794, IV, 81, 40 с.
- Розин М. Начальные основания теоретической и практической геометрии, составленной в пользу и употребление обучающегося юношества... СПб, 1797, 308 с., 8 вкл. л.
- Руководство к арифметике для употребления в народных училищах Российской империи... Ч. 1—2. СПб, 1784—1786. Ч. 1, 1784, 102 с., 1 вкл. л. Ч. 2, 1786, 138 с. Изд. 4-е. СПб, 1792—1797.
- Руководство к механике, издано для народных училищ Российской империи... СПб, 1785, 130 с., 6 вкл. л. Изд. 2-е. СПб, 1790.
- Румовский С. Я. Сокращения математики. Ч. 1. Содержащая начальная основания арифметики, геометрии и тригонометрии... СПб, 1760, 458 с., 10 вкл. л. табл.
- Суворов П. И. и Никитин В. Н. Тригонометрий две книги, содержащая плоскую и сферическую тригонометрию. СПб, 1787, XXXIX, 120 с., 2 табл. черт.
- Считание удобное, которым всякий человек, купующий или продающий, зело удобно изыскати может число всякия вещи. М., 1682. Изд. 2-е. СПб, 1714.

Таблица первых правил арифметики. СПб, 1788.

Таблицы логарифмов, и синусов, тангенсов, секансов к научению мудролюбивых тщателей... [Л. Магницкий, А. Фархварсон, С. Гвин], 1703, 141 с. Изд. 2-е. М., 1716. Изд. 3-е. СПб, 1746. Изд. 4-е. СПб, 1761. Изд. 5-е. СПб, 1791.

Фархварсон А. Книжица о сочинении и описании сектора, скал плоской и гунтерской со употреблением оных инструментов, в решении разных математических проблем... СПб, 1739, 54 с.

Фусс Н. И. Геометрия в пользу и употребление обучающегося благородного юношества... СПб, 1799, 321 с., 6 вкл. л. черт.

Фусс Н. И. Начальные основания алгебры, выбранные из алгебры Леонарда Эйлера... Пер. с фр. СПб, 1798, 345 с.

[Цицианов Д.]. Краткое математическое изъяснение землемерия межевого 1757 года, 1757, 112 с., 6 л. черт.

Шмидт Н. Новейшая арифметика, заключающая в одном ценном правиле большую часть тех правил, которые обыкновенно в арифметиках преподаются... Перев. с нем. А. Барсова. М., 1797, 190 с.

Эйлер Л. Руководство к арифметике для употребления гимназии... Ч. 1—2. СПб, 1740—1760. Ч. 1. Перев. с нем. В. Адодурова, 1740, 312 с. Ч. 2. Перев. с нем. В. Кузнецова, 1760, 258 с.

Эйлер Л. Универсальная арифметика... Перев. с нем. П. Иноходцева и И. Юдина. Т. 1—2. СПб, 1769. Изд. 2-е. СПб, 1787—1788.

Якоби А. Геометрия для детей от 8 до 12 лет... Перев. с нем. А. Барсова. М., 1790, VI, 71 с., 2 вкл. л. черт.

Якович Ф. И. Руководство учителям первого и второго классов народных училищ Российской империи. СПб, 1783.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абецедарский Л. С. 451
 Абрамян А. Г. 443, 447, 472
 Абу-л-Вафа 397, 398, 469, 471
 Абу Наср ибн Ирак 399, 400
 Абу Сахл ал-Масихи 400
 Авенариус 20
 Авиценна (см. Ибн Сина)
 Агамаянц С. 448
 Аганис 442, 443, 472
 Адамс Дж. 474
 Адодуров В. Е. 192, 194, 478
 Азанов Д. В. 456
 Александров А. Д. 26, 31
 Александров П. С. 26, 31, 457
 Александрова Н. В. 462
 Алешинцев И. А. 466
 Альберт А. 474
 Алумяэ Н. А. 30
 Анахт Д. 442
 Андреев А. И. 466, 467
 Андрианов В. 457
 Андрианова-Перетц В. П. 459
 Андронов А. А. 27, 28
 Андронович А. 378, 466
 Андрунакиевич В. А. 26, 29
 Анеци Мхитар 447
 Аничков Д. С. 359, 372, 373, 474, 475
 Аполлоний Пергский 283
 Аппельтауэр 379
 Арескин Р. 173
 Аржаных И. С. 27, 29
 Аристотель 57, 77, 84, 312, 323, 397, 399, 428, 433, 458
 Арнольд В. И. 31
 Артавазд Николай 447, 448, 472
 Артемьев А. И. 456
 Артоболевский И. И. 28
 Архангельский А. 450
 Архимед 128, 131, 141, 160, 201, 399, 401
 Арциховский А. В. 457
 Арчибалд Р. К. 455
 Аршеневский В. К. 358, 359, 475
 Аскоченский В. И. 450
 Астряб О. М. 460
 Афанасьев К. Н. 63, 64, 457
 Ахадова М. 468
 Ахизер Н. И. 27, 30
 Ахмес 125
 Багалей Д. И. 93, 371
 Багратуни Г. В. 465
 Байер З. Т. 168
 Бакуви Саид Яхья 435
 Барабаш Н. И. 466
 Баранецкий М. А. 460
 Барма 76
 Барреме 461
 Барсов А. А. 358
 Барсов А. Д. 475, 478
 Барсуков Н. 456
 Бартольд В. В. 468
 Батищев Я. 148, 327
 Батонишвили И. 439
 Баузе Ф. Г. 78, 108, 456
 Баше К. Г. 125, 126, 460
 Башмакова И. Г. 2, 38, 452, 457, 460, 464
 Бевер И. Г. 461
 Беднарский С. 377, 468
 Бадраддин Эмир Сеид Ахмед Ляляви 435
 Безу Э. 475
 Бекон 168, 313
 Белавский И. 471
 Беленицкий А. М. 468
 Белидор Б. Ф. 475
 Белл Э. Т. 455
 Белокуров С. А. 458
 Белый Ю. А. 284, 460, 461, 464
 Белькинд Л. Д. 450
 Белюстин В. 452
 Беляев И. Д. 127, 456, 473
 Беляев И. Е. 175
 Берг А. И. 28, 31
 Березанский Ю. М. 27, 30
 Беринг В. 149, 197
 Бердыев А. А. 29

- Бернулли (братья) 14, 205, 233
 Бернулли Д. 171, 181—190, 192, 201—203, 205, 206, 212, 233, 286, 295, 299, 307, 313, 350, 353, 462
 Бернулли И. (второй) 181
 Бернулли И. (первый) 171, 181, 183, 204, 205, 209, 212, 216, 221, 233, 241, 245, 273, 274, 307, 313, 353.
 Бернулли Н. (второй) 171, 181, 182, 205, 233
 Бернулли Н. (первый) 186
 Бернулли Я. (второй) 181
 Бернулли Я. (первый) 175, 185, 204, 225, 273, 274, 303, 353
 Бернштейн С. Н. 27, 30, 460
 Берри А. 452
 Берх В. 466
 Бетанкур 319
 Бигхем К. 455
 Билярский П. С. 466
 Бирджанди Абдаллах ибн Мухаммед 414
 Бирман К.-Р. 465
 Бируни 389, 390, 396, 400—402, 419, 468—471.
 Бицадзе А. В. 27
 Благой Д. Д. 451
 Благонравов А. А. 31
 Блюментрост Л. Л. 170, 183
 Бобынин В. В. 13, 82, 108, 160, 162, 452, 461, 466, 472
 Боголюбов А. Н. 2, 6
 Боголюбов Н. Н. 2, 27, 28, 30
 Бодянский О. М. 456, 457
 Боев Г. П. 452
 Бойер К. Б. 464
 Болл В. В. 455
 Болохвитинов Евгений 457
 Болтянский В. Г. 27, 31
 Большаков Т. Ф. 456
 Бороздин А. К. 466
 Бортолотти Э. 455
 Брайчевский М. Ю. 6
 Бранденбург Н. Е. 466
 Браун Э. 294
 Браунмюль А. 455, 464
 Брешман Н. Д. 25
 Бретаницкий Л. С. 468
 Бриль А. 463
 Брожек Я. 97, 98, 164
 Броккельманн Г. 471
 Броскиус И. 460
 Броссе 437
 Брульон 373
 Бруншвиг Л. 455
 Брюс Я. В. 161, 162, 173, 195, 341, 453
 Будовниц И. У. 459
 Булгаков М. 167, 371, 450
 Бурбаки Никола 10, 20
 Буркхард Г. 463
 Буркхард Пюркенштейн А. Э. фон 161, 475
 Бурцев В. 107
 Бутаков П. Г. 452
 Бутру П. 10, 455
 Быков Я. Б. 29
 Бычков И. А. 456
 Бюльфингер Г. Б. 171, 176, 190, 205
 Вавилов С. И. 311, 312, 336, 465, 466
 Вагнер 383
 Варвак П. М. 465
 Вариньон П. 307
 Варченко А. М. 459
 Васильев А. В. 452
 Васко да Гама 424
 Вахулка А. 455
 Вашенко-Захарченко М. Е. 452
 Вега Г. 379
 Вейдлер И. Ф. 359, 373, 475
 Вейерштрасс К. 216
 Вейтбрехт И. 171
 Векуа И. Н. 26—28, 31
 Векуа Н. П. 27
 Венков Б. А. 26
 Венков В. А. 464
 Вепке Ф. 471
 Веревкин М. 466
 Верещагин Н. В. 365, 366
 Веселаго Ф. Ф. 466
 Веселовский И. Н. 460
 Веселовский К. С. 466
 Веселовский С. Б. 459
 Викторов А. Е. 456, 459
 Вилейтнер Г. 452, 471
 Виллис 319
 Вильбрехт А. М. 369
 Вильсон 288
 Виниус А. А. 173
 Виноградов И. М. 26, 31, 180, 290
 Винсгейм Х. 194
 Вишневский Д. 450
 Владимирский-Буданов М. 466
 Воевудка Б. 460
 Войтяховский Е. Д. 365—366, 475
 Волков Б. А. 346, 374
 Вольф Х. 14, 21, 171, 190, 312, 324, 330, 332, 336, 339, 344, 346, 348, 358, 359, 379, 386, 476.
 Воронин Н. Н. 451
 Воронов А. 466
 Вороной Г. Ф. 25
 Воротнеци Ованес 423
 Востоков А. Х. 456
 Вуяновский С. 349
 Выгодский М. Я. 126, 453, 460, 468
 Выродков И. 76
 Вышнеградский И. А. 24, 25

- Вюнстенфельд Ф. 471
 Газали 77, 84
 Галанин Д. Д. 453, 461
 Галеркин Б. Г. 31
 Галилей 14, 146, 168, 201, 273, 295, 303, 312
 Галлей 200, 295
 Галуа 12
 Гамкрелидзе Р. В. 31
 Гандз С. 471
 Гассенди 312
 Гаусс К. Ф. 187, 288, 289
 Гафуров Б. Г. 468
 Гашимзаде М. У. 469
 Гвин С. 147, 160, 478
 Гегель 18, 21
 Гейман В. Г. 456
 Гельфанд И. М. 26—27, 31
 Гельфонд А. О. 2, 26—27, 291, 464
 Генкель И.-Ф. 330
 Генсиус 342
 Георгиевский Г. П. 456
 Герак 47
 Герман Я. 162, 171, 175—178, 190, 195, 233, 307, 313, 476
 Герон Александрийский 102, 124, 137, 141, 157, 418
 Гертсид Лев 469
 Гжепский С. Г. 100, 140, 460
 Гильберт Д. 291
 Гиляровский П. И. 476
 Гиппарх 428
 Гиппократ Хиосский 284, 346
 Гихман И. И. 27, 30
 Глебов П. 466
 Глушков В. М. 2, 26, 28, 30, 31
 Гмелин И. Г. 171, 174
 Гнеденко Б. В. 2, 27, 30, 120, 453, 461, 464
 Гнейзиус Г. Н. 309
 Гнучева В. Ф. 466
 Гокиели Л. П. 29
 Головацкий Я. О. 466
 Головин М. Е. 207, 306, 348, 349, 360, 466, 476
 Голубев В. В. 28
 Голубев И. Ф. 456, 461
 Голубев С. Т. 450
 Голубцов И. И. 194
 Голузин Г. М. 27, 31
 Голынин П. О. 175
 Гольдбах Х. 171, 178—181, 185, 215, 218, 233, 290, 309, 464
 Гольфельд Я. 380
 Гоппе Э. 455
 Горлицкий И. С. 162, 476
 Горский А. 456
 Гофманн И. Е. 463
 Гошовский Л. 377
 Граве Д. А. 26, 30, 462
 Грацианская Л. Н. 6
 Греков Б. Д. 62, 450, 451, 457, 458
 Григор Магистр 446
 Григорьян А. Т. 453
 Гринев И. 375
 Гришов А. Н. 358
 Гродзицкий Ф. 377
 Гроссе Г. 455
 Гук Р. 303
 Гуляшов Я. Г. 468
 Гуржий И. А. 6
 Гурьев С. Е. 475, 476
 Гусейнов А. И. 29
 Гуссов В. В. 462
 Гюйгенс Х. 185, 186, 232, 307, 311, 312
 Гюнтер Н. М. 27
 Даденков Н. Ф. 450, 459
 Даламбер 187, 200—202, 209, 210, 212, 233, 263, 268, 299, 305, 307, 308, 351, 375, 463
 Дампьер В. К. 455
 Данилевский В. В. 450
 Данилюк И. И. 26, 30
 Даннеман Ф. 450
 Дарбу 277
 Дашкова Е. Р. 348
 Деграф А. 476
 Декарт 17, 23, 168, 205, 291, 313, 320, 325
 Делиль Ж. Н. 162, 171, 178, 194, 195, 281, 309, 310, 476
 Делоне Б. Н. 2, 26, 453, 464
 Денисьевский М. 467
 Депман И. Я. 161, 162, 453, 461
 Дерахашвили Ив. 437
 Дехио Г. 458
 Дешаль К. Ф. М. 461
 Джавадов М. А. 29
 Джалялов Г. Д. 468
 Джаухари 394, 433
 Джрбашян М. М. 27, 29
 Дианни И. 455
 Диксон Л. Е. 464
 Динзе О. В. 453
 Диофант 287
 Дирихле 189, 216
 Добровольский В. А. 462
 Добровольский О. В. 29
 Додсли Р. 476
 Доллонд Дж. 206, 312
 Домкино Г. П. 474
 Дородницын А. А. 28, 31
 Дорфман Я. Г. 465
 Драгомиров Н. 375
 Дрогобич Ю. 96, 97
 Дынный М. А. 451
 Дювернуа И. 171
 Дядиченко В. А. 6

Евклид 12, 77, 82, 84, 98—100, 103, 117, 128—132, 135, 141, 160, 162, 164—166, 169, 290, 291, 339, 354, 368, 377, 379, 385, 394, 397, 400, 401, 405, 406, 423, 427, 432—434, 442, 445, 446, 449, 460, 469—472, 476
 Егоров Д. Ф. 26
 Елизарьев И. 127, 128, 131, 132, 141
 Ерзинкаци Ованес 423, 447
 Ермолай-Еразм 82
 Еругин Н. П. 2, 27, 29, 31
 Ершов А. С. 25
 Ефимов Н. В. 26, 31

Жаутыков О. А. 29
 Жебровский Т. 385, 456
 Жуковский Н. Е. 25, 27
 Журавлев Ю. И. 31
 Завадовский П. В. 360
 Загурский В. 468
 Залеский С. 468
 Зарудный И. 150
 Захава П. 327
 Захзе А. 463
 Захидов В. Ю. 468
 Земанчик И. 380
 Зенон 44
 Зизаний Л. 96
 Золотарев Е. И. 25
 Золотарев И. 375, 376
 Зубов В. П. 59, 60, 77, 453, 457, 459, 467
 Зутер Г. 453, 471

Ибн ал-Хайсам Хасан 433, 469
 Ибн ал-Хуммар 400
 Ибн Мискавейх 400
 Ибн Сина 396, 397, 399, 400, 427, 469, 471
 Ибрагимов И. И. 27, 29
 Иванов В. К. 31
 Иванов П. П. 415
 Идельсон Н. И. 467
 Износков И. А. 49
 Иконников В. С. 451
 Ильюшин А. А. 28, 31
 Имастасер Ованес Саркавас 446
 Иноходцев П. Б. 335, 346—348
 Иоане (монах) 78, 437
 Иоанн экзарх Болгарский 57, 60, 61
 Иосиф Волоцкий (Санин) 459
 Истомин А. В. 457
 Истомин К. 107
 Истрин В. М. 458
 Ишлинский А. Ю. 2, 28, 30

Кабулов В. К. 30
 Каган В. Ф. 26, 31, 469

Кази-заде ар-Руми 413, 414, 469, 470
 Калмыков И. И. 175
 Кангро Г. Ф. 30
 Канкрин Ф. Л. 476
 Кантор М. 393, 413, 455
 Канторович Л. В. 27, 31
 Каразин В. 78, 456
 Карамзин Н. М. 78, 451
 Каратаев Н. 456
 Каргер М. К. 451, 458
 Карпинский Л. Х. 471
 Карпова Л. А. 469
 Карра Во де 471
 Кары-Ниязов Т. Н. 29, 410, 469
 Кассини 194
 Кастильон Д. Ф. 283
 Касумханов Ф. А. 472
 Кауфман И. И. 70, 453
 Качалов Н. 458
 Кашп Гиясадин Джемшид 410—413, 427, 469, 471
 Келдыш М. В. 27, 28, 31
 Кемаладдин Мусам ибн Юнис 427
 Кеннеди Е. С. 471
 Кеплер 177, 199, 344
 Керес Х. П. 30
 Кестнер А. Г. 342, 348, 354, 379, 461, 476
 Кикец Ю. А. 460
 Кикин А. В. 171, 173
 Кильчевский Н. А. 30
 Ким Е. И. 29
 Киприанов В. 147, 160, 476
 Кирик Новгородец 56—60, 63, 457, 458
 Кириллов И. И. 316
 Кирпичников А. 467
 Киселев А. А. 464
 Клатовский О. 460
 Клевецкий М. Я. 476
 Клеро А. 200, 256, 294
 Клос Т. 124, 125, 460
 Ключевский В. О. 451, 459
 Кнезер А. 463
 Ковалевская С. В. 25, 202
 Коваленко А. Д. 30
 Коган Ю. П. 467
 Кодеш Ф. 380
 Козельский Я. П. 160, 364, 365, 374, 467, 476
 Козьма Индикоплов 55, 57, 61, 458
 Колайдович К. 456, 458
 Колбасин Е. Я. 367, 467
 Колесса Ф. 88
 Колмогоров А. Н. 26, 27, 31, 453
 Кольчев Ф. 76
 Кольман Э. 453
 Кононов А. К. 354, 355
 Кондорсе М. 455
 Константинов Н. А. 451
 Конфедератов И. Я. 450, 453

- Конь Ф. 76
 Копелевич Ю. Х. 453
 Коперник Н. 94, 103, 146, 160, 168
 Копиевский И. 150, 151, 476
 Коркин А. Н. 25
 Королюк В. Д. 451
 Космодемьянский А. А. 453
 Костомаров Н. И. 459
 Кострюков К. И. 453
 Котельников С. К. 168, 207, 335,
 342—344, 354, 386, 467, 476
 Котек В. В. 6, 453, 464, 465
 Коши О. 12, 218, 251, 301, 309
 Коуэлл 295
 Кравчук М. Ф. 30, 453
 Краковский 164
 Крамер 283, 386
 Крамер Г. 187
 Красильников А. Д. 194
 Краснова С. А. 468—470
 Красносельский М. А. 27
 Красовский Н. Н. 27
 Красоткина Т. А. 453
 Крафт В.-Л. 207, 348, 350, 351, 359,
 369, 386
 Крафт Г.-В. 132, 171, 174, 192—195,
 477
 Крашенинников С. П. 197, 345
 Крейн М. Г. 27, 30
 Кримеци Аюп 447
 Крипякевич И. П. 91
 Кротов А. 451
 Крутков Ю. А. 465
 Крылов А. Н. 28, 31, 294, 305, 306, 453
 Крылов В. И. 28
 Крылов Н. М. 27, 28
 Крыницкий Н. А. 461
 Кубицкий А. С. 458
 Кубилюс И. П. 2, 26, 29
 Кудрявцев П. С. 453
 Кузнецов Б. Г. 451, 453, 465
 Кузнецов В. 478
 Кузнецов С. К. 453
 Куклес И. С. 30
 Кулибин И. П. 208
 Кулябко Е. С. 333, 334, 336, 345, 346,
 348, 467
 Куник А. А. 331
 Купрадзе В. Д. 27, 29
 Курганов Н. Г. 366—368, 476, 477
 Курдыбаха Л. 452
 Курош А. Г. 26
 Кушнир Е. А. 462
 Кушчи Алааддин Али ибн Мухаммед
 414
 Кэджори Ф. 453, 455

 Лаврентьев М. А. 27—31, 453
 Лавровский П. А. 451, 460
 Лагранж Ж. 177, 185, 188, 200, 201,
 203, 210—212, 216, 222, 223, 234,
 245, 266, 274, 276, 283, 289, 293,
 301, 302, 343, 386
 Лазарев П. П. 451
 Лалаев М. 364, 467
 Ламберт 312
 Ландау Е. 463
 Ландау Р. 471
 Ланков О. В. 462
 Ланц Х.-М. 319
 Лаплас 199, 200, 233, 269, 293, 295,
 299, 301, 454
 Лаппо-Данилевский А. 27, 451
 Лапшина Р. П. 459
 Лауэ М. 453
 Лебедев А. 456
 Лебедев С. А. 28, 31
 Левитан Б. М. 31
 Левицкий Г. В. 467
 Левон (Лев) 447
 Лежандр 250, 277, 288
 Лейбниц 14, 17, 21, 23, 171, 181, 198,
 209, 210, 222, 273, 277, 324, 465
 Лейтман И. Г. 171, 175
 Лексель А. И. 207, 283, 351, 352, 386
 Ленин В. И. 8, 9, 19—22, 74, 104—106,
 162, 320—323, 450, 473
 Ленский И. 377
 Леонардо Пизанский 124, 125
 Леонов М. Я. 29
 Леонов Н. И. 469
 Лепехин И. И. 335
 Лизганин И. 380
 Ликкей П. 471
 Линник Ю. В. 2, 26, 27, 31
 Литвинова Е. Ф. 454
 Лиувилль 185
 Лихачев Д. С. 451
 Лихин В. В. 462
 Лобачевский Н. И. 12, 25, 189, 216,
 283, 324
 Лодий П. 380
 Лойцянский Л. Г. 31
 Локк 323, 325
 Ломоносов М. В. 14, 15, 151, 168, 174,
 184, 192, 194, 197, 207, 208, 310,
 313, 314, 322, 329—341, 345, 346,
 348, 356, 370, 374, 375, 466, 467
 Лопарев Х. 457
 Лопатинский Я. Б. 27, 30
 Лопиталь Г. 216, 221, 225, 273
 Лориа Дж. 455
 Лузин Н. Н. 26, 216, 312, 454
 Лукашевич Я. 94, 164, 452
 Лупанов О. Б. 31
 Лурье А. И. 28
 Лурье С. Я. 454
 Людевих К. 364, 477
 Люстерник Л. А. 27, 31
 Ляпунов А. М. 25, 26, 28

Магницкий Л. Ф. 131, 146, 147, 150—160, 169, 195, 329, 448, 461, 462, 477, 478

Майер Т. 294, 379

Майер Ф.-Х. 171, 190—192, 194

Майстров Л. Е. 6, 458

Маклорен 295

Максимнллиан Г. 370

Максимов П. 458

Малыгин К. А. 469

Мальцев А. И. 26, 31

Мамедбейли Г. Д. 469, 472

Манандян Я. А. 441, 472

Мандрыка А. П. 308, 465

Маневский А. Д. 459

Марджанишвили К. К. 26

Марков А. А. 25, 26, 28

Маркс К. 15—19, 73, 198, 324, 450

Маркушевич А. И. 2, 27, 462

Марриот Э. 303

Мартов А. 475

Марчевский Э. 455

Марченко В. А. 27, 30

Маслов С. И. 457

Массон М. Е. 469

Масуди Шарафаддин 427

Матвиевская Г. П. 462

Матинский М. А. 477

Мах 19, 20

Махмуд ибн Мухаммед ал-Чагмини 414

Махмуд Кашгарский 402

Медовой М. И. 469

Медынский Е. Н. 459

Меликишвили Г. А. 472

Мельников И. Г. 464

Меморский М. Ф. 477

Менелай Александрийский 352, 399, 429—431

Ментушкин В. Н. 467

Менье 277

Меньшиков 205

Меньшов Д. Е. 27, 31

Мервази Ахмед ибн Абдалла (ал-Хабаш) 394, 398

Мергелян С. Н. 2, 27, 29, 31

Мерсенн 307

Месроп Маштоц 421

Миели А. 471

Микеладзе Ш. Е. 28, 29

Миллер 93, 346

Минченко Л. С. 465

Миславский С. 335, 336, 371, 374

Митропольский Ю. А. 2, 27, 28, 30

Митюрлов Б. 95

Михайлов А. В. 458

Михайлов Г. К. 454, 465

Мишко Д. И. 6

Мищенко Е. Ф. 31

Могилевкина Г. М. 6

Модзалевский Л. Б. 466, 467

Мойсеев Н. Д. 454, 465

Мойсеева Г. Н. 329

Молодший В. Н. 454

Монж Г. 266, 277, 280, 319

Мопертюи 206, 343

Мордвинов М. И. 364, 365

Мордвинов С. И. 368, 477

Мордовцев Д. 451

Мордухай-Болтовской Д. Д. 460, 462

Морозов Б. И. 105

Морочник С. Б. 469

Мразович А. 477

Мстиславец Петр 75, 89

Муавр 217

Муравьев Н. Е. 477

Мухелишвили Н. Н. 2, 27—29, 31

Мухамедов Х. 469

Мушенбрук П. 174

Мюллер Ф. 455

Навье 301

Назаров А. 376

Назаров С. 364, 467, 477

Найризи (Табризи, Акарициус) 442

Накцианович Я. 385

Нарекшизи А. 446

Нартов А. К. 148, 175, 327, 332

Насави Абу-л-Хасан Али 399

Насираддин ат-Туси Мухаммед 394, 426—434, 449, 472

Насираллах Хамхани 435

Насонов А. Н. 451

Неандр Второй 477

Невежа Тимофеев Андроник 75

Нейгебауэр О. 454

Некрасов А. И. 451

Немыцкий В. В. 27

Нетер М. 463

Неустроев А. 451

Низами Гянджеви 422, 426

Никитин В. Н. 368, 476, 477

Никитский П. И. 454

Николаев И. Н. 375, 376

Николай Е. Л. 304

Никольский С. М. 27, 31

Никомах 400, 446

Никомед 346

Никонов Е. 149

Новиков 328

Новиков И. 477

Новиков П. С. 26, 31

Новосадский Л. В. 459

Норвайша Ф. М. 386

Ньюберн 366

Ньютон 14, 17, 23, 198—200, 206, 209, 225, 228, 230, 273, 277, 292, 294, 295, 307, 310, 311, 322, 325, 386, 407

Ованес Софист 423
Огородников С. Ф. 467
Озанам 125, 461
О'Лери Д. Л. 471
Орбели И. А. 443, 471
Орлов Ф. Е. 25
Оствальд 19
Остроградский М. В. 24, 25
Отрадных Ф. П. 320, 454, 462

Паевский В. В. 465
Памва Берында 89
Панкевич М. И. 358, 359
Пановко Я. Г. 29
Папп Александрийский 128, 283
Парасюк О. С. 2, 28, 30
Паскаль 185
Патарский Мефодий 55
Паурбах Г. 99, 460
Пачоли Л. 116, 125, 439
Пекарский П. П. 147, 162, 451
Пелль 289
Пентковский М. В. 29
Перрон О. 234, 237
Персидский К. П. 27, 29
Петрици Иоане 436, 437, 449
Петров А. А. 476
Петров Б. Н. 28
Петров Г. И. 28
Петров Н. И. 451, 457, 459, 467
Петровский И. Г. 27, 31, 237
Петронян С. 449
Петросян Г. Б. 442, 472
Петрушевский И. П. 424
Пиотровский Б. Б. 472
Пирсон 20
Писаренко Г. С. 30
Пифагор 14, 128—130, 135, 160, 340, 393, 412
Платон 24
Плуй Е. Б. 471
Поггендорф И. С. 455
Погодин М. П. 452
Погорелов А. В. 26, 30, 31
Погребынский И. Б. 2, 6, 461, 463, 465
Покровский А. А. 457
Ползунов И. И. 327
Полубаринова-Кочина П. Я. 31
Понтик 47
Понтрягин Л. С. 26, 27, 31
Попа Илие 459
Посник 76
Посошков И. Т. 145
Постников А. Г. 27
Постников М. М. 27, 31
Почобут-Одляницкий М. 385, 386
Привалов И. И. 27
Принсгейм А. 463
Приселков М. Д. 457

Прозоровский Д. И. 454
Прокл 437, 449
Протасов А. П. 168
Прохоров Ю. В. 27
Прудников В. Е. 365, 366, 454, 458, 462
Птолемей 166, 352, 391, 396, 400, 414, 427, 428
Пуанкаре 20, 22
Пуассон С. 276
Пфейффер Г. В. 29

Радищев 328
Радзиминский М. 377
Райков Б. Е. 452
Райн И. 380
Райнов Т. И. 58, 60, 61, 78, 82, 108, 452, 467
Райфф Р. 463
Ракчеев Е. Н. 454
Рамус П. 127, 128, 131, 141, 461
Раскин Н. М. 465
Рассиньол 386
Растрелли В. В. 198
Рахилевич М. К. 462
Рахманинов И. Н. 25
Редин Е. К. 57, 458
Рей Абель 21
Ремез Е. Я. 2, 27, 30
Ремезов С. И. 149
Ризе А. 124, 158, 461
Риккати 178, 181, 182, 185, 234, 235, 250, 258
Риман 203, 212, 290, 309
Рислер И. К. 471
Рифф П. 461
Рихман Г. В. 192, 331—333, 338, 340, 342, 358
Робинс Б. 206, 299, 307
Рожанская М. М. 470
Рождественский С. В. 467
Розен И. 471
Розенбергер Ф. 314, 454
Розенфельд Б. А. 2, 427, 442, 464, 468—470, 472
Розин М. 477
Романенко Г. Н. 6
Рост И. А. 358, 360
Ртищев Ф. М. 107
Рудио Ф. 460
Румовский С. Я. 207, 309, 333, 344—347, 375, 386, 477
Руска И. 471
Рыбаков Б. А. 42, 48, 70, 452, 458
Рыбников К. А. 2, 6, 454, 463
Ряго Г. 467

Сабит ибн Корра 470
Савельев А. 362, 467

Савин Г. Н. 28, 30
 Садок-Баронч 377, 468
 Садыков Х. У. 401, 470
 Сакробоско И. 98, 99, 460
 Салье М. А. 468, 470
 Самарский А. А. 28
 Сартон Г. 455
 Сарымсаков Т. А. 29
 Сатановский А. 163
 Сатаров И. 132, 474, 476
 Саткевич А. А. 454
 Сахаров И. П. 459
 Свистун Ф. 468
 Севернан Гавальский 57
 Сегаль В. С. 468
 Сегнер Янош Андраш 315, 316
 Седов Л. И. 28, 31
 Секержинский Т. 377
 Семенов А. А. 468
 Сенявин 368
 Сергеев В. К. 467
 Сердюков М. 149
 Сиверс 205
 Сидоров М. В. 327
 Симеон Полоцкий 94, 163
 Симонов Н. И. 6, 256, 462, 463
 Симпликий 442
 Симпсон Р. 434
 Синцов Д. М. 26, 30
 Сираждинов С. Х. 30
 Сичкар О. А. 6
 Скарга П. 88
 Сковорода Г. С. 371
 Скорина Г. Л. 88
 Скорняков-Писарев Г. 147, 148
 Славенас П. В. 385, 386
 Славенецкий Епифаний 94
 Слюсарев Г. Г. 465
 Смирнов В. И. 2, 27, 31, 345, 467
 Смирнов И. И. 454
 Смирнов Н. В. 27, 31
 Смирнов С. 452
 Смирнов Ю. М. 27
 Смит Д. Э. 455, 471
 Смотрицкий М. 96, 107, 147, 329
 Снелль В. 432
 Соболев С. Л. 27, 31
 Соболевский А. И. 77, 78, 457
 Сობоль С. Л. 465
 Соколов И. 459
 Соколов М. И. 57, 458
 Соколов Ю. Д. 2, 27, 30, 454
 Сократ 24
 Соловьев С. М. 452
 Сологуб В. С. 2, 6
 Соломонюк Э. И. 46
 Софронов М. 207, 333, 345, 346, 467
 Спасский Б. И. 454
 Спасский И. Г. 123, 460
 Спейдель 131, 141

Спиноза 21
 Спицын А. 458
 Срезневский И. 458
 Сретенский Л. Н. 465
 Старов 91
 Стегман И. 100—103, 140, 460
 Стеклов В. А. 25, 28
 Степанов В. В. 27
 Степанов Н. В. 458
 Стечкин Б. С. 28, 31
 Стирлинг Дж. 453
 Стокс 301
 Строев П. 457
 Стройк Д. Ф. 456, 464
 Струве О. В. 309
 Субботин М. Ф. 428, 465
 Суворов Г. Д. 30
 Суворов П. И. 368, 476, 477
 Султанов Р. М. 472
 Сумароков 197
 Сурмелян Х. 448
 Сухомлинов М. 342, 344, 452
 Сушкевич А. К. 454
 Схоттус К. 460

Тайманов А. Д. 29
 Таке 448
 Такквет Андрей 461, 474
 Таннери П. 447, 452
 Тараби 408
 Тарасиев Никифор 75
 Тарталья Н. 307
 Татищев В. Н. 78, 337, 341, 353
 Тауберт 334, 336
 Тейлор Б. 189, 225, 230
 Теплов 346
 Тесленко И. Ф. 464
 Тигранакертци Аветик 448
 Тимошенко С. П. 465
 Тимченко И. Ю. 463
 Титов 474
 Тихо Браге де 160
 Тихомиров М. Н. 457
 Тихонов А. Н. 27, 31
 Тихонравов Н. С. 456
 Тодгэнтер И. 464
 Толстов С. П. 468, 470
 Толстой Д. А. 467
 Толстой Ф. А. 457
 Томашевский Д. С. 378
 Томашевский С. 468
 Тонский И. 460
 Торричелли 307
 Трапезников В. А. 28, 31
 Третьяков П. Н. 35
 Тропфке И. 454, 456
 Туманьян Т. Г. 446, 472
 Туранский С. 376
 Тылковский 385

Тюлина И. А. 454, 465
Тюхик (Тюкикос) 443

Убейд Табризи 427
Уваров 474
Уитни Эли 327
Улугбек Мухаммед Тарагай 397, 407—
410, 412—414, 419, 468—470
Унгер Ф. 456
Ундольский 69
Урысон П. С. 26
Устюгов Н. В. 454
Ухмылова Т. К. 456
Ушаков С. 108
Уэвелл В. 456

Фаддеев Д. К. 26
Фальковский И. А. 372, 373
Фараби (Отрар) 396, 397, 399
Фарадей 314
Фарманкович И. С. 124, 460
Фархварсон А. 132, 146, 147, 160, 162,
476, 478
Фаульгабер И. 158, 448, 461
Фахраддин ар-Рази 407
Фахраддин Ихлати 427
Фахраддин Мараги 427
Фаццари Г. 454
Федоров Иван 75, 89, 96, 459
Федорович Г. Ф. 168
Федотова Р. К. 364, 467
Фель С. Е. 161, 462
Феофан Прокопович, 91, 145, 146, 167—
169, 195, 328, 341, 342, 462
Фергани 396
Фирдоуси 427
Ферма П. 14, 185, 283, 287—289, 291,
397

Фесенков В. Г. 454
Феттер Г. 461
Фибоначчи 62
Филалет Христофор 88
Филиппов А. И. 458
Филон 446
Фильчаков П. Ф. 28, 30
Финкель-Стажинский 468
Фихтенгольц Г. М. 463
Фишер Р. 187
Флери 386
Фрадлин Б. Н. 466
Франк И. 164
Франклин 331
Франкль Ф. И. 269, 463, 466
Фрейман Л. С. 466
Френель 312
Фрик 423
Фролов К. Д. 327
Фурье 12, 189, 212, 216
Фурнейрон Б. 315

Фусс Н. И. 184, 207, 283, 302, 348, 350
352, 355, 478
Фусс П. Н. 455
Фюттер Р. 455

Хавский П. 458
Хайям Омар 397, 403—407, 419, 427,
433, 434, 469—471
Халилов А. А. 416, 470
Халилов З. И. 27, 29, 472
Ханкель Г. 455
Хардер Х. 383
Харкевич Е. 468
Харлампович К. 460
Хатилов А. Э. 470
Хачик Георг 447
Хелль М. 370
Хетагурова Е. В. 364, 467
Хилл Дж. 294
Хинчин А. Я. 26, 27, 31, 186
Хичий О. Ф. 349, 460
Хованский А. Н. 464
Ходженди Абу Мухаммед Хадим 397
Хорезми Мухаммед ибн Муса 22, 391—
393, 396, 419, 427, 470, 471
Хоренац Мовсес 421, 442
Христианович С. А. 28, 31
Хумал А. К. 30

Цейтен Г. Г. 432, 454
Целлер М. К. 456
Цицерон 384
Цицианов Д. 478
Цицишвили Д. 439
Цубер Э. 464
Цхакая Д. Г. 437, 439, 472
Цыганкова Э. Г. 6

Чайковский Н. А. 6
Чалоян В. К. 423, 472
Чаплыгин С. А. 27, 28
Чеботарев Н. Г. 26, 31
Чебышев П. Л. 24, 25, 228, 290
Челеби Мирим 412, 414
Челюскин С. 197
Ченакал В. Л. 340, 341, 386, 466
Черепнин Л. В. 59, 70, 452, 454
Черчилль У. А. 461
Четаев Н. Г. 27, 30
Чечулин Н. Д. 328, 468
Чириков А. 197
Чириков М. В. 463
Чирнгаузен 346
Чистович И. А. 462
Чогошвили Г. С. 2, 26, 29
Чохов А. 76
Чуб А. Т. 6

Чудаков Н. Г. 26
Чунихин С. А. 29

Шавух Теодор 447
Шагинян А. Л. 27, 29
Шаль М. 464
Шамсаддин ас-Самарканди 413, 470
Шарффенберг Х. 460
Шафаревич И. Р. 26, 31
Шафиров П. П. 173
Шафрановский К. И. 453
Шахманов А. А. 452
Швейпольт Фиоль 88
Швецов К. И. 6, 455, 457—462
Шереметьевский В. П. 455
Ширакаци Анания 421, 443—445, 447, 449, 472
Ширани Гиясаддин 435
Ширвани Фазим Фаридаддин 426
Ширвани Фелеки 426
Ширвани Хагани 426
Ширвани Шамсаддин 427
Ширшов А. И. 26
Шишкин В. А. 470
Шмидт Н. 478
Шмидт О. Ю. 26, 30
Шнейберг Я. А. 450
Шнирельман Л. Г. 26, 27, 290
Шнорацци Нерсес 446
Шой К. 471
Шперк В. Ф. 468
Шписс О. 455
Шредер К. 316, 466
Штекель П. 456, 463, 464
Штифель М. 158, 461
Штокало И. З. 2, 5, 6, 27, 30
Штурм И. Х. 359

Шуберт Ф. И. 352, 353, 355
Шуере 158, 461
Шумахер И. Д. 171, 172, 183, 190, 194, 206, 331, 332, 334, 342, 346, 356

Щеглов В. П. 470

Эйлер И.-А. 207, 350, 351
Эйлер Л. 12, 14, 16, 171, 173, 178, 180, 183—185, 187—189, 191, 192, 195, 199—326, 332, 334, 340—342, 344—351, 353, 366, 367, 386, 452—455, 462—466, 478
Эйлер П. 204
Энгельс Ф. 15—19, 21, 72, 73, 198, 324, 450
Эратосфен 61, 290
Юдин И. 478
Юнг 312
Юсупов Н. 470
Юцис А. П. 29
Юшкевич А. П. 2, 6, 33, 122, 393, 401, 407, 427, 452, 453, 455, 457, 458, 461, 463, 464, 468—470, 471
Юшков С. 458

Яблонский С. В. 31
Якоби А. 101, 102, 139, 140, 295, 478
Якоби Б. 218
Якубайтис Э. А. 29
Якут 402
Ян из Ланцуты 124, 460
Янин В. Л. 47
Янкович Ф. И. 360, 478

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ (И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов)	7

Г Л А В А I. МАТЕМАТИКА ДОПИСЬМЕННОГО ПЕРИОДА

1. Историческая характеристика дописьменного периода развития отечественной математики (М. Ю. Брайчевский)	32
2. Возникновение математических понятий (Л. Н. Грацианская)	36
3. Зарождение математических представлений в каменном и бронзовом веках (А. Н. Боголюбов, М. Ю. Брайчевский)	39
4. Об элементах математических знаний у скифо-сарматских племен (А. Т. Чуб)	44
5. Математические знания у древних восточных славян (М. Ю. Брайчевский, Л. Н. Грацианская)	47

Г Л А В А II. МАТЕМАТИКА КИЕВСКОЙ РУСИ

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Киевской Руси (К. И. Швецов, В. А. Дядиченко, З. Р. Вельянинова)	52
2. Основные источники математических знаний (К. И. Швецов)	56
3. Сочинение Кирика «Учение им же ведати человеку числа всех лет» (К. И. Швецов)	57
4. Математика в памятниках духовного содержания (К. И. Швецов)	60
5. Математика в «Русской Правде» (К. И. Швецов)	62
6. Математические знания древнерусских зодчих и ремесленников (А. Н. Боголюбов, К. И. Швецов)	63
7. Славянская нумерация (К. И. Швецов)	67
8. Метрология (К. И. Швецов)	69

Г Л А В А III. МАТЕМАТИКА ПЕРИОДА СОЗДАНИЯ РУССКОГО ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ГОСУДАРСТВА (XIV—XVI вв.)

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Руси в XIV—XVI вв. (К. И. Швецов, В. А. Дядиченко, З. Р. Вельянинова)	72
2. Математика в литературе XVI в. (К. И. Швецов)	76
3. Русские математические рукописи XVI в. (К. И. Швецов)	78
4. Математика сошного письма (К. И. Швецов)	79
5. Метрология (К. И. Швецов)	82

Г Л А В А IV. МАТЕМАТИКА НА УКРАИНЕ, В БЕЛОРУССИИ И ЛИТВЕ В XIV—XVII вв.

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития Украины и Белоруссии в XIV—XVII вв. (К. И. Швецов, В. А. Дядиченко) 85
2. Математика в произведениях архитектуры и ремесла (А. Н. Боголюбов) 89
3. Обучение математике в школах (А. Н. Боголюбов) 92
4. Общая характеристика математической литературы (К. И. Швецов) 96

Г Л А В А V. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ В XVII в.

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России (К. И. Швецов, В. А. Дядиченко, Э. Р. Вельянинова) 104
2. Общая характеристика рукописных источников математических знаний (К. И. Швецов) 108
3. Арифметика на линиях в арифметических рукописях XVII в. (К. И. Швецов) 113
4. Арифметика целых и дробных чисел (К. И. Швецов) 115
5. Арифметические задачи и методы их решения в русских математических рукописях XVII в. (К. И. Швецов) 119
6. Первоисточники русских арифметических рукописей XVII в. (К. И. Швецов) 123
7. Геометрия в рукописи «Синодальная 42» (К. И. Швецов) 127
8. Рукописные практические руководства по геометрии XVII в. и их источники (К. И. Швецов) 132

Г Л А В А VI. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ XVIII в.

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России (А. Н. Боголюбов, К. И. Швецов) 142
2. «Арифметика» Магницкого (К. И. Швецов) 150
3. Обзор другой учебной математической литературы (К. И. Швецов) 160
4. Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии в конце XVII — первой четверти XVIII в. (А. Н. Боголюбов, О. А. Сичкарь) 163
5. Основание Петербургской академии наук (В. В. Котек) 170
6. Первые математики в Петербургской академии наук (В. В. Котек, В. С. Сологуб) 175

Г Л А В А VII. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ В СЕРЕДИНЕ XVIII в. ТРУДЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России во второй четверти XVIII в. (А. Н. Боголюбов) 196
2. Новые задачи математики, обусловленные развитием техники и естествознания (Н. И. Симонов) 198
3. Леонард Эйлер (В. В. Котек) 203
4. Развитие основных понятий математического анализа в XVIII в. (Н. И. Симонов) 208
5. Дифференциальное исчисление (Н. И. Симонов) 216
6. Интегральное исчисление и теория обыкновенных дифференциальных уравнений (Н. И. Симонов) 226
7. Методы интегрирования нелинейных уравнений (Н. И. Симонов) 234
8. Теория линейных дифференциальных уравнений (Н. И. Симонов) 244
9. Методы приближенного решения дифференциальных уравнений (Н. И. Симонов) 250
10. Элементы теории особых решений (Н. И. Симонов) 254

ГЛАВА VIII. ТРУДЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ГЕОМЕТРИИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1. Теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (<i>Н. И. Симонов</i>)	257
2. Теория уравнений математической физики (<i>Н. И. Симонов</i>)	266
3. Вариационное исчисление (<i>Н. И. Симонов</i>)	272
4. Геометрия (<i>В. В. Котек</i>)	277
5. Теория вероятностей (<i>Л. Е. Майстров</i>)	285
6. Теория чисел (<i>В. В. Котек</i>)	287

ГЛАВА IX. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ И ТЕХНИКА В ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА. МИРОВОЗЗРЕНИЕ ЭЙЛЕРА

1. Астрономия и механика твердого тела (<i>В. В. Котек</i>)	292
2. Гидродинамика, гидравлика и акустика (<i>В. В. Котек</i>)	299
3. Сопротивление материалов (<i>В. В. Котек</i>)	303
4. Теория корабля (<i>В. В. Котек</i>)	305
5. Баллистика (<i>В. В. Котек</i>)	307
6. Картография (<i>В. В. Котек</i>)	309
7. Оптика, теплота, электричество и магнетизм (<i>В. В. Котек</i>)	310
8. Теория турбин (<i>В. В. Котек</i>)	315
9. Механика машин (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	317
10. Мирозозрение Эйлера (<i>В. В. Котек</i>)	320

ГЛАВА X. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII в.

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	326
2. М. В. Ломоносов (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	329
3. Труды русских математиков в последней четверти XVIII в. (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	341
4. Организация системы общего образования в России. Математика в Московском университете (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	355
5. Математика в русских военных и инженерных школах (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	361
6. Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии от 40-х годов до конца XVIII в. (<i>А. Н. Боголюбов и О. Н. Сичкаръ; Н. А. Чайковский</i>)	370
7. Математические знания в Прибалтике до XIX в. (<i>И. Б. Погребысский</i>)	380

ГЛАВА XI. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В СРЕДНЕЙ АЗИИ

1. Истоки науки и культуры Средней Азии (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	388
2. Арабское завоевание. Ал-Хорезми (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	390
3. Развитие математики в Средней Азии в IX—XI вв. (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	394
4. Средняя Азия в XII в. Математическое творчество Омара Хайяма (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	402
5. Монгольское завоевание Средней Азии и его последствия. Улугбек и его школа (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	407
6. Культурное развитие Средней Азии в XVI—XVIII вв. Уровень математических знаний (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	415

ГЛАВА XII. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ЗАКАВКАЗЬЕ

1. Исторические пути народов Закавказья (А. Н. Боголюбов)	420
2. Математика в Азербайджане (И. Б. Погребысский)	425
3. Математика в Грузии (И. Б. Погребысский)	435
4. Математика в Армении (И. Б. Погребысский)	440

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Общая литература (В. С. Сологуб, К. И. Швецов)	450
2. Литература к главам	457
3. Русские математические рукописи XVII века (К. И. Швецов)	473
4. Учебная литература по математике в России XVII—VIII вв. (Э. Г. Цыганкова)	474

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	479
-----------------------------	-----

Печатается по постановлению ученого совета Института истории АН УССР и главной редакции
Редакторы Е. Л. Орлик, Ю. А. Храмов. Художественный редактор И. П. Антонюк. Оформление
художника Валуенко Б. В. Технический редактор Н. А. Турбанова. Корректор
Л. П. Блажесвич

БФ 01984. Зак. № 1293. Изд. № 10. Тираж 16000. Формат бумаги $70 \times 100^{1/16}$. Печ. физ. листов
30,75. Условн. печ. листов 39,85. Учетно-изд. листов 37,35. Подписано к печати 27/VII 1966 г.
Цена 2 руб. 58 коп. Бумага № 1.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3,
Киевская ф-ка набора Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, ул. Довженко, 5.

